BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

Tạp chí KHOA HỌC

JOURNAL OF SCIENCE

CÁC NGÀNH KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NATURAL SCIENCES

TẬP XXXIV - SỐ 2A - 2005

ĐẠI HỌC VINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
Tập 34, Số 2A/ 2005

VINH UNIVERSITY
JOURNAL OF SCIENCE
T.34, Nº 2A/2005

Xuất bản theo giấy phép hoạt động báo chí số 211/GP-BVHTT ngày 15 tháng 7 năm 2003 của Bộ Văn hóa - Thông tin. In 300 bản tại Xưởng in Đại học Vinh. Nộp lưu chiểu 08/2005.
Địa chỉ liên hệ: Phòng Quản lý Khoa học - Thiết bị, Đại học Vinh, 182 Lê Duẩn, TP. Vinh, Nghệ An. Điện thoại: 038.856700, Fax: 84.38.855269, E-mail: tcdhv@yahoo.com.

MỤC LỤC

MỘT SỐ KẾT QUẢ VỀ MÔĐUN U-LIÊN TỤC VÀ MÔĐUN U-TỰA LIÊN TỤC

NGÔ SĨ TÙNG [(a)], THIỀU ĐÌNH PHONG [(b)]

Tóm tắt. Một môđun M được gọi là *u-liên tục* nếu M là liên tục đối với các môđun con đều (uniform). Các kết quả chính của bài báo là chứng minh được rằng nếu $M = \oplus_{i\in I}U_i$, trong đó U_i là các môđun đều với mọi $i \in I$, thì môđun M là liên tục khi và chỉ khi M là u-liên tục. Từ đó đưa ra được một số kết quả về môđun tựa liên tục và áp dụng để đặc trưng các lớp QF-vành và co-H-vành. Các kết quả này là mở rộng một vài kết quả trong [8].

I. MỞ ĐẦU

Môđun liên tục và vành liên tục đã được nhiều tác giả nghiên cứu đặc biệt là nghiên cứu vành với lớp môđun trên vành đó là liên tục (chẳng hạn xem [3], [4], [7], [9]). Trong bài báo này chúng tôi đưa ra khái niệm môđun u-liên tục và chứng tỏ rằng môđun M có dạng $M = \oplus_{i\in I}U_i$ (trong đó U_i là môđun con đều với mọi $i\in I$) là liên tục nếu và chỉ nếu nó là u-liên tục. Môđun M có tính chất mọi hạng tử trực tiếp địa phương là hạng tử trực tiếp và mọi môđun con đóng của M có chứa một môđun đều thì M là môđun u-liên tục nếu và chỉ nếu M là môđun u-tựa liên tục. Áp dụng vào QF-vành ta thu được kết quả: một vành R là QF nếu R là u-liên tục phải và H-vành phải hoặc co-H-vành phải.

II. ĐỊNH NGHĨA VÀ KÝ HIỆU

Các vành R xét trong bài này được giả thiết là vành kết hợp có đơn vị, mọi R-môđun là R-môđun phải unita. Các ký hiệu $N \subset M$, $N \subset^{\oplus} M$, $N \subseteq^{e} M$, tương ứng để chỉ rằng N là môđun con, hạng tử trực tiếp, môđun con cốt yếu của môđun M. Với môđun M đã cho, bao nội xạ, căn Jacobson, môđun con suy biến của M được viết tương ứng là $E(M)$, $J(M)$, $Z(M)$.

Ta xét các điều kiện sau đối với một môđun M:

(C_1): Mọi môđun con của M là cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của M. Nói cách khác mọi môđun con đóng trong M là hạng tử trực tiếp của M.

(C_2): Nếu A và B là các môđun con của M, $A \cong B$, A là hạng tử trực tiếp của M, thì B cũng là hạng tử trực tiếp của M.

(C_3): Nếu A và B là các hạng tử trực tiếp của M và $A \cap B = 0$, thì $A \oplus B$ cũng là hạng tử trực tiếp của M.

Nhận bài ngày 09/3/2005. Sửa chữa xong 06/5/2005.

Một môđun M được gọi là *CS-môđun* nếu M thoả mãn điều kiện (C_1). Môđun M được gọi là *có tính chất* (U) hay M là (1-C_1)-*môđun* nếu mọi môđun con đóng đều của M là hạng tử trực tiếp của M.

Một môđun M được gọi là *liên tục* nếu nó thoả mãn điều kiện (C_1) và (C_2). Môđun M được gọi là *u-liên tục* nếu M là môđun liên tục đối với môđun con đều, nghĩa là nếu M có tính chất (U) và thoả mãn (C_2).

Môđun M được gọi là *tựa liên tục* nếu M là môđun thỏa mãn điều kiện (C_1) và (C_3). Môđun M được gọi là *u-tựa liên tục* nếu M là môđun tựa liên tục đối với môđun con đều, nghĩa là nếu M có tính chất (U) và thoả mãn (C_3).

Vành R được gọi là *liên tục phải* nếu R_R là liên tục, vành R được gọi là *u-liên tục phải* nếu R_R là u-liên tục.

Vành R được gọi là *tựa Frobenius* (viết tắt là *QF-vành*) nếu R là vành artin phải thoả mãn điều kiện $r(l(A)) = A$; $l(r(B)) = B$ với mọi ideal phải A và ideal trái B của vành R.

Họ $\{M_i : i \in I\}$ các môđun con của môđun M được gọi là *hạng tử trực tiếp địa phương* của M nếu $\sum_{i\in I} M_i$ là tổng trực tiếp và $\oplus_{i\in F} M_i$ là hạng tử trực tiếp của M với mọi tập con hữu hạn F của tập chỉ số I.

Một sự phân tích $M = \oplus_{i\in I} M_i$ được gọi là *bù hạng tử trực tiếp đều* nếu với mọi hạng tử trực tiếp đều U của M, tồn tại tập con $J \subseteq I$ sao cho

$$M = U \oplus (\oplus_{j\in J} M_j).$$

III. MÔĐUN U-LIÊN TỤC VÀ MÔĐUN U-TỰA LIÊN TỤC

Bổ đề 3.1. *Nếu môđun M có tính chất (U) (u-liên tục, u-tựa liên tục), thì mọi hạng tử trực tiếp của M cũng có tính chất (U) (u-liên tục, u-tựa liên tục).*

Chứng minh. Được suy ra từ định nghĩa.

Bổ đề 3.2. *Cho môđun* $M = \oplus_{i\in I} U_i$ *trong đó* U_i *là các môđun đều (với mọi* $i \in I$*). Nếu A là một môđun con đóng của M thì tồn tại tập* $F \subset I$ *sao cho*

$$A \oplus (\oplus_{i\in F} U_i) \subseteq^e M.$$

Chứng minh. Nếu $A = M$ thì hiển nhiên tồn tại $F = \varnothing$ thoả mãn.

Nếu $A \neq M$ khi đó do A đóng nên tồn tại $i \in I$ sao cho $A \cap U_i = 0$. Lấy F là tập con tối đại của I với tính chất $A \cap (\oplus_{i\in F} U_i) = 0$.

Đặt $V_1 = \oplus_{i\in F} U_i$ và $V_2 = \oplus_{i\in J} U_i$, trong đó $J = I \setminus F$.

Do tính tối đại của F nên $A \cap (V_1 \oplus U_k) \neq 0$ với mọi $k \in J$. Khi đó tồn tại $a \in A$, $a \neq 0$ sao cho $a = x + u$, trong đó $x \in V_1$, $u \in U_k$, $u \neq 0$. Do đó $u = a - x \in A \oplus V_1$. Vì vậy $U_k \cap (A \oplus V_1) \neq 0$ với mọi $k \in J$.

Từ [2, Proposition 3.6] ta có $A \oplus V_1 \subseteq^e M$. □

Mệnh đề 3.3. *Nếu M là môđun u-liên tục (u-tựa liên tục) thì mọi môđun con đóng có dạng $X \oplus U$ là hạng tử trực tiếp của M, trong đó X là hạng tử trực tiếp của M và U là môđun đều.*

Chứng minh. Giả sử $A = X \oplus U$ là môđun con đóng của M với X là hạng tử trực tiếp của M, U là môđun đều. Giả sử $M = X \oplus M_1$ với M_1 là môđun con nào đó của M.

Xét phép chiếu $\pi : M \to M_1$. Khi đó do $X \cap U = 0$ nên $\pi|_U : U \to M_1$ là đơn cấu. Suy ra $\pi(U) \cong U$. Vì vậy $\pi(U)$ là môđun con đều của M_1. Theo Bổ đề 3.1, ta có M_1 là u-liên tục nên tồn tại môđun con V là hạng tử trực tiếp của M_1 mà $\pi(U) \subseteq^e V$. Dễ thấy V cũng là môđun con đều của M_1. Hiển nhiên ta có $X \oplus U \subset \pi^{-1}(V) \subset X \oplus V$.

Do V đều nên ta thu được $A = X \oplus U \subseteq^e X \oplus V$. Lại do A đóng nên $A = X \oplus V$. Từ $M = X \oplus M_1$ và V hạng tử trực tiếp của M_1 nên suy ra $X \oplus V$ là hạng tử trực tiếp của M. □

Định lý 3.4. *Cho M là môđun có dạng $M = \oplus_{i \in I} U_i$, trong đó mỗi U_i là môđun con đều (với mọi $i \in I$). Khi đó M là môđun liên tục nếu và chỉ nếu M là môđun u-liên tục.*

Chứng minh. Nếu M là môđun liên tục thì hiển nhiên M là môđun u-liên tục.

Ngược lại, nếu M là môđun u-liên tục, ta chứng minh M là môđun liên tục. Do M là môđun u-liên tục nên nó có tính chất (C_2). Vì vậy ta chỉ cần chứng minh M là CS-môđun. Giả sử A là môđun con đóng của môđun M. Theo Bổ đề 3.2, tồn tại môđun con V_1 của M có dạng $V_1 = \oplus_{i \in F} U_i$ trong đó $F \subset I$, sao cho: $A \oplus V_1 \subseteq^e M$.

Đặt $V_2 = \oplus_{i \in J} U_i$, với $J = I \setminus F$.

Ký hiệu π_1, π_2 là phép chiếu của M tương ứng lên V_1 và V_2. Khi đó $\pi_2|_A$ là đơn cấu (do $A \cap V_1 = 0$). Đặt $\alpha = \pi_1(\pi_2|_A)^{-1}$ là đồng cấu của $\pi_2(A)$ vào V_1. Dễ thấy

$$A = \{x + \alpha(x) \mid x \in \pi_2(A)\}.$$

Chúng ta sẽ chỉ ra rằng α không mở rộng được thực sự trong V_2. Giả sử $\overline{\alpha} : B \to V_1$ trong đó $\pi_2(A) \subset B \subset V_2$, là mở rộng của α trong V_2.

Đặt $C = \{x + \overline{\alpha}(x) : x \in B\}$. Từ $A \oplus V_1$ là cốt yếu trong M ta có $\pi_2(A) = \pi_2(A \oplus V_1)$ cốt yếu trong $\pi_2(M) = V_2$. Suy ra $\pi_2(A)$ cốt yếu trong $B \subset V_2$. Do đó A là cốt yếu trong C. Nhưng do A đóng nên ta thu được $A = C$, suy ra $\pi_2(A) = B$, nghĩa là $\overline{\alpha} = \alpha$.

Bây giờ với mỗi $k \in J$, ta đặt $X_k = U_k \cap \pi_2(A)$. Dễ dàng thấy rằng $X_k \neq 0$, với mọi $k \in J$. Do đó X_k là đều. Đặt $A_k = \{x + \alpha(x) : x \in X_k\}$. Ta có $X_k \cong A_k$ nên A_k là môđun con đều của A.

Giả sử $A_k \subseteq^e T \subset U_k \oplus V_1$. Từ $A_k \cap V_1 = 0$ ta có $T \cap V_1 = 0$. Suy ra $\pi_2|_T$ là đơn cấu. Đặt $\alpha_k = \alpha|_{\pi_2(A_k)}$. Vì α không mở rộng được thực sự trong V_2 nên α_k cũng không mở rộng được thực sự trong $\pi_2(A_k)$.

Đặt $f_k = \pi_1(\pi_2|_T)^{-1}: \pi_2(T) \to V_1$. Khi đó f_k là một mở rộng của α_k, do đó

$$\pi_2(T) = \pi_2(A_k).$$

Mặt khác, từ $\pi_2|_T$ là đơn cấu và $A_k \subseteq^e T$ suy ra $A_k = T$. Do đó, A_k là môđun con đóng và đều, nên $A_k \subset^{\oplus} M$. Mà $X_k \cong A_k$, nên theo tính chất (C_2), ta cũng có $X_k \subset^{\oplus} M$. Do $X_k \subseteq^e U_k \subset^{\oplus} M$ và U_k là đều nên $X_k = U_k$ (với mọi $k \in J$). Suy ra $\pi_2(A) = V_2$. Vì vậy $A = V_2$ và $A \subset^{\oplus} M$ (do (C_2)). □

Hệ quả 3.5. *Cho M là môđun với chiều Goldie hữu hạn. Khi đó M là môđun liên tục nếu và chỉ nếu M là môđun u-liên tục.*

Chứng minh. Trước hết ta chỉ ra rằng nếu M có chiều Goldie hữu hạn và là môđun u-liên tục thì M là tổng trực tiếp của hữu hạn các môđun con đều. Do M có chiều Goldie hữu hạn nên tồn tại môđun con đều X_1. Gọi U_1 là bao đóng của X_1 trong M. Khi đó U_1 cũng là môđun con đều. Do tính u-liên tục của M nên U_1 là hạng tử trực tiếp của M, nghĩa là $M = U_1 \oplus M_1$ với môđun con M_1 nào đó của M. Theo Bổ đề 3.1 thì M_1 cũng là môđun u-liên tục. Lý luận như trên đối với M_1 ta sẽ có $M_1 = U_2 \oplus M_2$ trong U_2 là môđun con đóng đều của M_1. Như vậy $M = U_1 \oplus U_2 \oplus M_2$. Tiếp tục quá trình này ta có $M = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots U_n \oplus \dots$

Do M có chiều Goldie hữu hạn nên tồn tại n để $M = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots. \oplus U_n$, trong đó U_i là môđun con đều ($1 \le i \le n$). Áp dụng Định lí 3.4 ta có M là môđun u-liên tục nếu và chỉ nếu M là môđun liên tục. □

Định lý 3.6. *Cho M là môđun mà mọi hạng tử trực tiếp địa phương của M là hạng tử trực tiếp của M và mọi môđun con đóng của M có chứa môđun đều. Khi đó M là môđun liên tục (tựa liên tục) nếu và chỉ nếu M là môđun u-liên tục (u-tựa liên tục).*

Chứng minh. Giả sử M là môđun u-liên tục thì rõ ràng M là môđun u-tựa liên tục

Ngược lại, do môđun liên tục và môđun u-tựa liên tục đều có tính chất (C_3) nên ta chỉ cần chứng minh M là CS-môđun. Thật vậy, cho U là môđun con đóng bất kỳ của M. Ta chứng minh U là hạng tử trực tiếp của M. Theo giả thiết, tồn tại $K \subseteq U$, K là hạng tử trực tiếp đều của M. Xét họ

$$\xi = \{\oplus_{i \in I} N_i\},$$

trong đó $N_i \subset U$ và N_i đều, $\oplus_{i \in I} N_i$ là hạng tử trực tiếp địa phương của M.

Theo Bổ đề Zorn, tồn tại $\oplus_{i \in I} N_i$ là hạng tử trực tiếp địa phương tối đại trong ξ. Suy ra $N = \oplus_{i \in I} N_i$ là hạng tử trực tiếp của M. Ta chứng minh $U = N$. Giả sử $U \neq N$. Do N là hạng tử trực tiếp của M suy ra $M = N \oplus X$. Theo luật Modular ta có $U = N \oplus Y$, trong đó $Y = X \cap U$. Do X, U đóng trong M nên Y đóng trong M. Nếu $Y \neq 0$, theo giả thiết Y có chứa môđun đều Y_1 là hạng tử trực tiếp của M. Khi đó

$N \oplus Y_1$ là một phần tử của họ ξ, mâu thuẫn với tính chất tối đại của N.

Do đó $Y = 0$, tức là $U = N$ là hạng tử trực tiếp của M. Vậy M là CS-môđun.

Bổ đề 3.7. *Cho M là môđun u-liên tục. Nếu $M = U \oplus V$ trong đó U và V là các môđun đều, thì U và V là những môđun nội xạ lẫn nhau.*

Chứng minh. Ta chứng minh V là U-nội xạ.

Lấy X là môđun con tuỳ ý của U và $\alpha : X \to V$ là một đồng cấu bất kỳ.

Đặt $X' = \{x - \alpha(x) : x \in X\}$. Gọi Y là bao đóng của X' trong M.

Ta có $X' \cap V = 0$. Suy ra $Y \cap V = 0$. Do đó $Y \cong \pi_U(Y)$, trong đó π_U là ánh xạ chiếu của M lên U. Vì Y là môđun con đóng đều của M nên Y là hạng tử trực tiếp của M. Do M thoả mãn điều kiện (C_2) nên $\pi_U(Y)$ cũng là hạng tử trực tiếp của M. Nhưng U là môđun đều nên ta nhận được $\pi_U(Y) = U$.

Cho $M = u + v$, với $u \in U$, $v \in V$. Khi đó tồn tại $c \in Y$ sao cho $\pi_U(c) = u$. Suy ra $c = u + v'$, với $v' \in V$. Ta có $M = u + v = (c - v') + v = c + (v - v') \in Y \oplus V$. Như vậy $M = Y \oplus V$.

Gọi $\pi_V : M \to V$ là phép chiếu của M lên V và đặt $\overline{\alpha} = \pi_V|_U$. Khi đó với mọi $x \in X$, ta có $\overline{\alpha}(x) = \pi_V(x) = \pi_V[(x - \alpha(x)) + \alpha(x)] = \alpha(x)$ (do $x - \alpha(x) \in Y$).

Như vậy $\overline{\alpha}$ là một mở rộng của α, hay V là U-nội xạ. Tương tự ta có U là V-nội xạ. □.

Bổ đề 3.8. *Cho $M = U \oplus V$ trong đó $U \cong V$ là những môđun liên tục và đều. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

i) Nếu A là một hạng tử trực tiếp khác 0 của M thì $A \cong U$.

ii) M thoả mãn điều kiện (C_2).

Chứng minh. i) Cho $M = A \oplus X$ với môđun con X nào đó của M. Do U là môđun liên tục và theo [6, Theorem 3.24], U có tính chất trao đổi, nên ta có $U \oplus V = U \oplus A_1 \oplus X_1$, trong đó $A_1 \subset A$ và $X_1 \subset X$. Khi đó $V \cong A_1 \oplus X_1$. Mà V là môđun đều, nên $A_1 = 0$ hoặc $X_1 = 0$. Điều này kéo theo $A \cong U$.

ii) Giả sử A và B là những môđun con của M với $A \cong B$ và $A \subset^{\oplus} M$.

Theo (i) : $B \cong A \cong U$. Do đó B là môđun đều và chúng ta có $B \cap U = 0$, hoặc $B \cap V = 0$.

Nếu $B \cap V = 0$ thì $B \cong \pi_U(B)$, trong đó π_U là phép chiếu của M lên U. Do $B \cong U$, suy ra $\pi_U(B) \cong U$. Theo cách chứng minh của Bổ đề 3.6, ta thu được $B \oplus V = M$, nên $B \subset^{\oplus} M$. Tương tự nếu $B \cap U = 0$, ta cũng có $B \subset^{\oplus} M$. □

Định lý 3.9. *Cho $M = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$ là tổng trực tiếp của hữu hạn các môđun con đều U_i $(1 \le i \le n)$ sao cho $U_i \oplus U_j$ là CS-môđun với mọi $1 \le i \le j \le n$. Khi đó nếu M là môđun u-liên tục thì M là môđun tựa nội xạ.*

Chứng minh. Suy ra từ Bổ đề 3.7 và [4, Corollary 1.19]. □

Định lý 3.10. *Cho R là vành nửa hoàn chỉnh phải, u-liên tục phải sao cho eR ⊕ eR là CS-môđun với mỗi phần tử luỹ đẳng nguyên thủy e của R. Khi đó R là vành tựa nội xạ phải.*

Chứng minh. Vì R là vành nửa hoàn chỉnh phải nên tồn tại hệ luỹ đẳng trực giao nguyên thuỷ $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$, sao cho $R_R = e_1R \oplus e_2R \oplus \ \ldots \oplus e_nR$.

Theo [1, Proposition 27.10], các môđun e_iR là không phân tích được với mọi $i = 1, 2,\ldots, n$. Do đó, theo [4, Proposition 2.5] các môđun e_iR là môđun đều với $1 \leq i \leq n$. Bây giờ áp dụng Định lý 3.9 ta có R là vành tựa nội xạ phải.

Hệ quả 3.11. *Nếu R là vành artin phải, u-liên tục phải thì R là vành liên tục phải.*

Chứng minh. Theo Hệ quả 3.5.

IV. ÁP DỤNG VÀO QF-VÀNH

Mục này sẽ áp dụng môđun u-liên tục vào việc nghiên cứu các H-vành, co-H-vành, cũng như các QF-vành.

Bổ đề 4.1. [6, Theorem 4.3]. *Đối với một vành R, những mệnh đề sau là tương đương:*

(i) R là QF-vành.

(ii) R là H-vành phải với Z(R) = J(R).

(iii) R là co-H-vành phải với Z(R) = J(R).

Chúng ta có đặc trưng mới về QF-vành như sau:

Định lý 4.2. *Những khẳng định sau đây là tương đương đối với một vành R:*

(i) R là QF-vành.

(ii) R là H-vành phải và u-liên tục phải.

(iii) R là co-H-vành phải và u-liên tục phải.

Chứng minh. Dễ thấy (i) ⇒ (ii) và (i) ⇒ (iii) theo Bổ đề 4.1.

(ii) ⇒ (i): Theo [6, Theorem 2.11] R là vành artin phải. Mặt khác theo Hệ quả 3.10, R là vành liên tục phải. Theo [9, Lemma 4.1] ta thu được $Z(R) = J(R)$. áp dụng Bổ đề 4.1 ta có R là QF-vành.

(iii) ⇒ (i): Dễ thấy nếu R là co-H-vành phải thì R là vành hoàn chỉnh phải. Theo giả thiết và Bổ đề 3.5 ta có R là vành liện tục phải. Do đó theo [9, Lemma 4.1] thì $Z(R) = J(R)$. áp dụng Bổ đề 4.1 ta thu được R là QF-vành. □

Định lý 4.3. *Cho P là môđun xạ ảnh trên vành liên tục phải nửa hoàn chỉnh. Khi đó P là môđun u-tựa liên tục nếu và chỉ nếu P là* $(1\text{-}C_1)$*-môđun.*

Chứng minh. Vì R là vành nửa hoàn chỉnh nên tồn tại hệ luỹ đẳng trực giao nguyên thuỷ $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$, sao cho $R_R = e_1R \oplus e_2R \oplus \ldots \oplus e_nR$. Ở đây End($R$) là vành địa phương. Từ R là vành liên tục phải, suy ra e_iR là môđun đều và không thể nhúng thực sự vào e_jR (với $1 \le i, j \le n$).

Theo [1, Theorem 27.11], chúng ta có

$$P = \oplus_{i \in I} P_i \tag{1}$$

với tập chỉ số I nào đó và mỗi P_i là môđun đều và không thể nhúng được thực sự vào P_j (với mọi $i, j \in I$).

Bây giờ giả sử P là môđun u-tựa liên tục. Rõ ràng P là (1-C_1)-môđun.

Ngược lại, nếu P là (1-C_1)-môđun, ta sẽ chứng minh rằng sự phân tích (1) là bù hạng tử trực tiếp đều.

Giả sử U là hạng tử trực tiếp đều của P và $x \in U$, $x \neq 0$. Khi đó tồn tại một tập con hữu hạn F của I sao cho $x \in \oplus_{i\in F} P_i$. Vì U là môđun đều, nên xR là môđun con cốt yếu trong U. Mặt khác, do $xR \cap \oplus_{i\in I\setminus F} P_i = 0$, nên $U \cap \oplus_{i\in I\setminus F} P_i = 0$. Từ đó U nhúng đẳng cấu được vào $\oplus_{i\in F} P_i$. Gọi V là môđun con của $\oplus_{i\in F} P_i$ mà $U \cong V$. Ta giả sử $F = \{1, \ldots, n\}$ với n là số nguyên dương bé nhất mà $V \subseteq P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_n$.

Đối với mỗi j $\in \{1, \ldots, n\}$, giả sử $\pi_j : P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_n \to P_j$ là phép chiếu tự nhiên. Dễ kiểm tra được rằng $\bigcap_{j=1}^{n} Ker(\pi_j|_V) = 0$. Do V là môđun đều, không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $Ker(\pi_1|_V) = 0$. Do đó $V \cap P_2 \oplus \ldots \oplus P_n = 0$. Điều đó chứng tỏ rằng V nhúng đẳng cấu được vào P_1. Nhưng bởi vì $U \cong V$ nên U nhúng đẳng cấu được vào P_1. Theo giả thiết U là môđun đều, nên tồn tại một e_kR nào đó thuộc $\{e_1R, e_2R, \ldots, e_nR\}$ sao cho $U \cong e_kR$. Hơn nữa e_kR không nhúng đẳng cấu thực sự vào P_1. Do đó $\pi_1(U) = P_1$. Từ đó ta có $P = U \oplus (\oplus_{i\in I\setminus\{1\}} P_i)$ là sự phân tích bù hạng tử trực tiếp đều. Theo [10, Theorem 2], ta có P là môđun u-tựa liên tục.

Hệ quả 4.4. *Một vành nửa hoàn chỉnh R là QF nếu và chỉ nếu R là vành liên tục phải và mọi môđun xạ ảnh là* (1-C_1)*-môđun.*

Chứng minh. Được suy ra từ Định lý 4.3 và [6, Theorem 4.2] □.

CONTENTS

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] F. W. Anderson and K.R. Fuller, *Rings and Categories of Modules,* Springer - Verlag, New York, 1974.

[2] Ng.V.Dung- D.V.Huynh - P.F. Smith and R. Wisbauer, *Extending modules*, Pitman, London, 1994.

[3] M. Harada, *On modules with extending property*, Osaka J. Math. (1982), 203 - 215.

[4] H. Mohamed and J. Muller, *Continuous and discrete modules,* Cambridge University press, 1990.

[5] K. Oshiro, *Continuous modules and semiperfect modules*, in H. Tominaga (editor), Proc. 14th Symp, Ring theory Shinshu Univ. (1984).

[6] K. Oshiro, *Continuous modules, extending modules and their applications to QF-rings,* Hokkaido Math. J., **13** (1984), 310 - 338.

[7] K. Oshiro, *Continuous modules and quasi-continuous modules*, Osaka J. Math., **20** (1983), 681 - 694.

[8] Ngo Si Tung, *Some results on quasi-continuous modules,* Acta Mathematica Vietnamica, Vol. 19. N⁰.**2** (1994), 13 – 17.

[9] R. Wisbauer, *Foudations of Modules and Ring Theory,* Gordon and Breach, Reading, 1991.

[10] Y. Utumi. *On continuous rings and self-injective rings,* Trans, Amer. Math., Soc. 118 (1965), 158 - 173.

SUMMARY

SOME RESULTS ON U-CONTINUOUS MODULES
AND U-QUASI CONTINUOUS MODULES

A module M is called a *u-continuous module*, if M is continuous with respect to uniform submodules.

It is show that if M is a module with $M = \oplus_{i\in I}U_i$, where each U_i is a module uniform (for all $i \in I$), then M is a u-continuous module if only if M is a continuous module. As a application of u-continuous modules to QF-rings, we get that: R is QF-ring if and only if R is a right H-ring, and right u-continuous if and only if R is a right co-H-ring and right u-continuous.

(a) KHOA TOÁN, TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH
(b) 42A KHOA TOÁN, TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH