

# PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC GIAO TIẾP TOÁN HỌC CHO HỌC SINH LỚP 10 TRONG DẠY HỌC CHỦ ĐỀ PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

Trương Thị Dung, Thái Thị Hồng Lam\*, Nguyễn Thị Mỹ Hằng  
Khoa Toán, Trường Sư phạm, Trường Đại học Vinh, Nghệ An, Việt Nam

## ARTICLE INFORMATION TÓM TẮT

**Journal:** Vinh University  
Journal of Science  
Educational Science and Technology  
**p-ISSN:** 3030-4857  
**e-ISSN:** 3030-4784

**Volume:** 53  
**Issue:** Special 2  
**\*Correspondence:**  
hlamdhv@gmail.com

**Received:** 18 June 2024  
**Accepted:** 29 July 2024  
**Published:** 20 August 2024

**Citation:**  
Truong Thi Dung, Thai Thi Hong Lam,  
Nguyen Thi My Hang (2024).  
Developing Mathematical  
communication skills for 10th grade  
students in teaching the topic of  
coordinate methods in the plane.  
**Vinh Uni. J. Sci.**  
Vol. 53, Special Issue 2, pp. 267-277  
doi:10.56824/vujs.2024.htkhgd209

## OPEN ACCESS

Copyright © 2024. This is an Open Access article distributed under the terms of the [Creative Commons Attribution License \(CC BY NC\)](#), which permits non-commercially to share (copy and redistribute the material in any medium) or adapt (remix, transform, and build upon the material), provided the original work is properly cited.

Giao tiếp toán học là một trong những năng lực cốt lõi cần được hình thành và phát triển cho học sinh trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông. Trong nghiên cứu này, chúng tôi đã xác định được các biểu hiện của năng lực giao tiếp toán học của học sinh lớp 10 trong dạy học chủ đề Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng trên cơ sở khảo sát lấy ý kiến của 68 giáo viên dạy toán cấp trung học phổ thông ở các tỉnh Nghệ An và Hà Tĩnh. Đồng thời, nghiên cứu cũng được thực hiện với 32 học sinh lớp 10 về thực hiện một số nhiệm vụ học tập trong dạy học chủ đề Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng với mục đích tìm hiểu các biểu hiện của năng lực giao tiếp toán học của học sinh và những sai lầm của học sinh liên quan đến các biểu hiện của năng lực giao tiếp toán học. Từ đó đề xuất một số biện pháp dạy học góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học cho học sinh trong dạy học chủ đề này.

**Từ khóa:** Năng lực giao tiếp toán học; học sinh lớp 10; phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.

## 1. Giới thiệu

Chất lượng giảng dạy toán học có thể được xác định thông qua giao tiếp toán học (GTTH), bao gồm nói, viết, nghe và đọc liên quan đến toán học (Arani, 2016). Nhiều nhà giáo dục toán học nhấn mạnh tầm quan trọng của quá trình học toán và đã cho rằng GTTH là một năng lực cần được phát triển (Bui, Duong và Nguyen, 2021; Armiami và cs., 2022; Yamphan, Thinwiangthong & Sythong, 2024). Nghiên cứu tổng quan cho thấy có sự quan tâm nghiên cứu về GTTH dưới hình thức nói và viết ở các cấp độ học tập khác nhau. Gardenia và cs. (2020) đã phân tích kỹ năng giao tiếp của học sinh về khái niệm hệ phương trình tuyến tính hai biến và các khó khăn, sai lầm của học sinh bộc lộ qua việc giải các bài toán liên quan đến khái niệm này. Maulyda và cs. (2020) thông qua việc yêu cầu học sinh giải các bài toán đó để tìm hiểu thể hiện năng lực GTTH của học sinh, đã nhận ra những khó khăn mà học sinh gặp phải liên quan đến việc chuyển đổi từ cách diễn đạt bằng ngôn ngữ thông

thường thành mô hình toán học. Chasanah & Usodo (2020) đã đánh giá hiệu quả của các mô hình học tập đối với các kỹ năng giao tiếp toán học bằng văn bản được nhìn từ phong cách nhận thức của học sinh.

Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng có đặc điểm là nhiều biểu thức hình thức và một số thuật toán có sẵn. Do đó, khi học nội dung này, học sinh gặp không ít khó khăn. Một là, do nội dung hình học được đại số hóa ở mức độ cao, nhưng khi tiếp thu các biểu thức hình thức thì học sinh ít quan tâm đến việc hiểu bản chất nội dung hình học của nó, vì thế học sinh thường ít quan tâm, xem xét mối liên hệ “cú pháp” và “ngữ nghĩa” của các đối tượng toán học. Hai là, các thuật toán về phương pháp tọa độ được vận dụng một cách máy móc, rập khuôn, do đó, học sinh chỉ có khả năng giải được một số bài toán đơn giản. Ba là, khi nhận thức các vấn đề của hình học giải tích, học sinh chưa quan tâm nhiều đến các biểu tượng hình học, dẫn tới khả năng tư duy logic trong hình học và trí tưởng tượng không gian bị hạn chế. Những vướng mắc và hạn chế trên là những nguyên nhân cơ bản làm cho học sinh gặp khó khăn trong việc giao tiếp các vấn đề toán học có liên quan tới chủ đề. Bài báo hướng đến việc trả lời các câu hỏi nghiên cứu sau: Năng lực GTTH của học sinh được biểu hiện như thế nào qua dạy học chủ đề Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng? Một số khó khăn, sai lầm của học sinh trong học tập chủ đề thể hiện như thế nào qua việc trả lời các nhiệm vụ học tập? Từ đó, đề xuất một số cách thức nhằm phát triển năng lực GTTH của học sinh thông qua dạy học chủ đề.

## 2. Phương pháp nghiên cứu

Để xác định được các biểu hiện của năng lực GTTH của học sinh, chúng tôi đã thực hiện khảo sát đối với 68 giáo viên dạy toán cấp trung học phổ thông (THPT) trên địa bàn các tỉnh Nghệ An và Hà Tĩnh. Từ việc nghiên cứu các biểu hiện của năng lực GTTH của học sinh cấp THPT trong Chương trình môn Toán 2018 (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018), đồng thời xuất phát từ các yêu cầu cần đạt, chúng tôi đưa ra các biểu hiện của năng lực GTTH của học sinh trong dạy học chủ đề Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng (Bảng 1) và khảo sát lấy ý kiến của giáo viên về các biểu hiện đó ở các mức độ: Rất đồng ý; Đồng ý; Tương đối đồng ý và Không đồng ý.

**Bảng 1:** Các biểu hiện của năng lực GTTH của học sinh

TT	Biểu hiện
BH1	Diễn đạt được (qua nói/viết/vẽ) mối quan hệ giữa các đối tượng hình học từ ngôn ngữ hình học tổng hợp sang ngôn ngữ tọa độ và ngược lại.
BH2	Biểu thị được một đối tượng hình học theo các hình thức khác nhau trong mặt phẳng tọa độ.
BH3	Giải thích được ý nghĩa hình học của các biểu thức logic hình thức.
BH4	Đọc được thông tin cơ bản, trọng tâm của đường thẳng, đường tròn và các đường conic khi biết phương trình.
BH5	Viết được phương trình của đường thẳng, đường tròn và các đường conic khi biết các yếu tố xác định.
BH6	Kết hợp được nhiều dạng biểu diễn khác nhau như lời nói, hình vẽ, biểu thức tọa độ khi lập luận, giải quyết vấn đề.
BH7	Thể hiện tự tin khi trả lời câu hỏi, trình bày, thảo luận các nội dung toán học liên quan đến phương pháp tọa độ.
BH8	Sử dụng được phần mềm toán học để vẽ hình ảnh của các đường, từ đó rút ra kết luận.

Phương pháp định tính mô tả cũng được sử dụng nhằm mô tả, ghi lại, phân tích và giải thích các điều kiện xảy ra. Vấn đề được mô tả trong nghiên cứu này là các biểu hiện của năng lực GTTH và các sai lầm của học sinh liên quan đến năng lực GTTH khi giải quyết các nhiệm vụ học tập. Để mô tả những biểu hiện này, quan sát trực tiếp được thực hiện bằng cách phân tích kết quả trả lời 3 câu hỏi theo các biểu hiện của GTTH và tìm các sai lầm trong trình bày lời giải bài toán trên 32 học sinh lớp 10 trường THPT Lê Việt Thuật, thành phố Vinh, tỉnh Nghệ An khi học về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.

Câu 1. Lập phương trình tham số, phương trình tổng quát, phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm  $A(2;3)$  và  $B(1;5)$ .

Câu 2. Cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$

a. Xác định tọa độ hai điểm thuộc đường thẳng  $d$  và một vectơ chỉ phương của  $d$ .  
 b. Viết phương trình tham số của đường thẳng  $d_1$  đi qua điểm  $M(-3;4)$  và song song với đường thẳng  $d$ .

c. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng  $d$  và đường thẳng  $d_2: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 - t \end{cases}$

Câu 3. Cho hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  lần lượt có các vectơ chỉ phương là  $\vec{u}_1(a_1; b_1)$  và  $\vec{u}_2(a_2; b_2)$ . Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai đường thẳng đó. Chọn đáp án đúng và giải thích.

A.  $\cos\varphi = \frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$       B.  $\cos\varphi = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

C.  $\cos\varphi = -\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$       D.  $\cos\varphi = \frac{|a_1b_1+a_2b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

*Dụng ý của các câu hỏi:* Thông qua giải quyết các nhiệm vụ học tập, học sinh bộc lộ các biểu hiện của năng lực GTTH, đồng thời giáo viên phát hiện được sai lầm của học sinh và nguyên nhân.

+ Khi hoàn thành nhiệm vụ trong câu hỏi 1, học sinh *viết được* phương trình đường thẳng dưới các hình thức khác nhau (BH2).

+ Dụng ý của câu 2a) là kiểm tra khả năng *đọc hiểu* và *viết được* kết quả (BH4).

- Để giải câu hỏi 2b), trước hết, học sinh cần xác định được nhiệm vụ là viết phương trình tham số của đường thẳng (thể hiện khả năng *đọc hiểu* yêu cầu bài toán). Từ đó nhận thức được cần tìm một điểm thuộc đường thẳng và một vectơ chỉ phương của đường thẳng. Tiếp đến, học sinh *diễn đạt được* yêu cầu về mối quan hệ song song giữa hai đường thẳng (ngôn ngữ hình học tổng hợp) theo một cách khác là hai đường thẳng có các vectơ chỉ phương cùng phương (ngôn ngữ tọa độ), và xác định được vectơ chỉ phương (BH1). Đồng thời, học sinh sử dụng được các ký hiệu toán học để trình bày lập luận  $M(-3;4) \in d_1 \Rightarrow M(-3;4) \notin d$ . Từ đó, *viết được* phương trình tham số của đường thẳng  $d_1$  đi qua điểm  $M(-3;4)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{u}(-2;1)$ .

- Để giải bài toán 2c), trước hết cần xác định được  $\vec{u}(-2;1)$  và  $\vec{u}_2(2;-1)$  là vectơ chỉ phương của  $d$  và  $d_2$  (biểu hiện khả năng *đọc hiểu* thông tin). Tiếp đến, lập luận hai vectơ chỉ phương cùng phương (viết được biểu thức hình thức  $\frac{-2}{2} = \frac{1}{-1}$ ). Đồng thời, học sinh phải lập luận được  $A(1;-2) \in d \Rightarrow A(1;-2) \notin d_2$ . Từ đó, kết luận  $d$  và  $d_2$  trùng nhau.

+ Để giải được câu hỏi 3), trước hết học sinh phải *giải thích được* mối quan hệ của góc giữa hai đường thẳng với góc giữa hai vectơ chỉ phương của các đường thẳng đó: góc giữa hai đường thẳng là góc có số đo bé hơn hoặc bằng  $90^0$ , do đó, góc giữa hai đường thẳng bằng hoặc bù với góc giữa hai vectơ chỉ phương tùy thuộc vào góc giữa hai vectơ chỉ phương là góc nhọn hay góc tù (chuyên đổi được ngôn ngữ hình học tổng hợp sang ngôn ngữ vectơ). Từ đó, học sinh *viết được* biểu thức hình thức xác định góc giữa 2 đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  và chọn được đáp án đúng là A.

### 3. Kết quả và thảo luận

#### 3.1. Năng lực giao tiếp toán học

Nghiên cứu tổng quát quan niệm về năng lực GTTH của Nguyễn & Nguyễn (2022) như sau: năng lực GTTH là khả năng của một cá nhân: nghe hiểu, đọc hiểu, ghi chép được các thông tin toán học cần thiết được trình bày dưới dạng nói hoặc viết; trình bày, diễn đạt (nói hoặc viết) được các nội dung, ý tưởng, giải pháp toán học trong sự tương tác với người khác; sử dụng được hiệu quả ngôn ngữ toán học (chữ số, chữ cái, ký hiệu, biểu đồ...) kết hợp với ngôn ngữ thông thường khi trình bày, giải thích và đánh giá các ý tưởng toán học trong sự tương tác với người khác; thể hiện được sự tự tin khi trình bày, diễn đạt, nêu câu hỏi, thảo luận, tranh luận các nội dung, ý tưởng liên quan đến toán học.

#### 3.2. Biểu hiện của năng lực GTTH của học sinh trong dạy học chủ đề Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

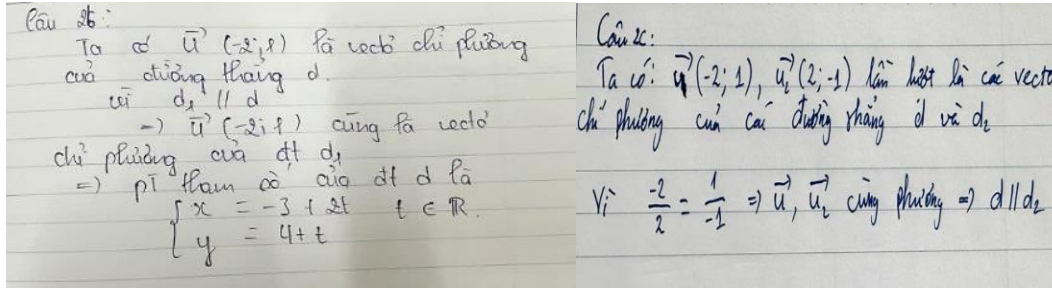
Kết quả khảo sát cho thấy đa số giáo viên đồng ý với các biểu hiện được trong câu hỏi, cụ thể: 100% đồng ý với các biểu hiện BH1, BH2, BH4, BH5, BH6; 78% đồng ý với BH3; 56% đồng ý với BH7; chỉ có 25% ý kiến đồng ý với BH8. Kết quả này cho phép khẳng định các biểu hiện cơ bản của năng lực GTTH của học sinh trong dạy học chủ đề Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng bao gồm: BH1, BH2, BH3, BH4, BH5, BH6 và BH7.

#### 3.3. Khó khăn, sai lầm của học sinh trong dạy học chủ đề Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng liên quan đến biểu hiện của năng lực GTTH

- Kết quả câu 1 cho thấy 32/32 học sinh xác định được  $\overrightarrow{AB}(-1; 2)$  là vectơ chỉ phương của đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm  $A$  và  $B$ . Từ đó, viết được phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng  $d$ . Có 30/32 học sinh viết được phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  bằng cách chỉ ra được vectơ pháp tuyến của đường thẳng  $d$  là  $\vec{n}(2; 1)$ . Có 2 học sinh không có lời giải cho ý này. Kết quả này cho thấy đa số học sinh đã biểu diễn được phương trình đường thẳng dưới các dạng cơ bản khác nhau.

- Kết quả câu 2a) cho thấy 32/32 học sinh xác định được điểm thuộc đường thẳng bằng cách chọn giá trị cụ thể của tham số  $t$ . Cả 32 kết quả đều chọn điểm  $I(1; -2)$ . Kết quả điểm thứ hai có sự khác nhau. Đa số học sinh chọn  $t=1$ , từ đó, tìm được điểm  $A(-1; -1) \in d$ . Có một số chọn  $t=2$ . Kết quả này đã phản ánh được khả năng đọc hiểu thông tin của học sinh. Tuy nhiên, yêu cầu của bài toán chưa tạo được cơ hội để giáo viên đánh giá khả năng học sinh giải thích bản chất mối quan hệ giữa *điểm thuộc đường thẳng* và giá trị *tham số  $t$*  tương ứng.

- Kết quả câu 2b) cho thấy có 6/32 học sinh có lời giải đúng (viết đúng phương trình đường thẳng  $d_1$  và lập luận chính xác). Có 19 học sinh viết được phương trình đường thẳng  $d_1$  và trình bày lời giải như ở Hình 1.



Hình 1: Minh họa cho câu 2b

Hình 2: Minh họa cho câu 2c

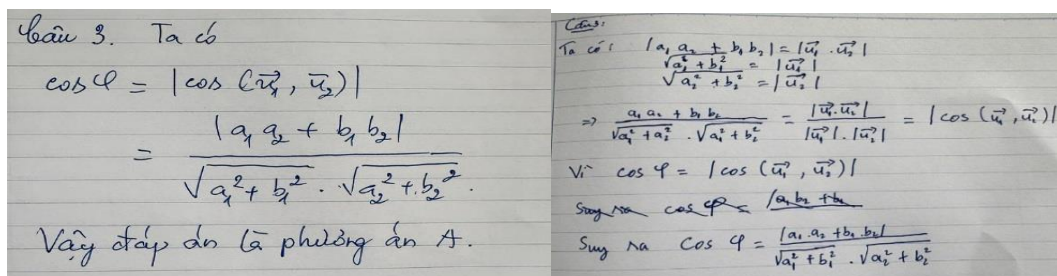
Qua lời giải cho thấy một số sai lầm. Thứ nhất, do học sinh ngộ nhận luôn tồn tại đường thẳng  $d_1$  song song với  $d$  nên suy ra vector chỉ phương  $\vec{u}(-2; 1)$  của  $d$  cũng là vector chỉ phương của  $d_1$ . Thứ hai, học sinh không kiểm tra điều kiện điểm  $M(-3; 4)$  có thuộc đường thẳng  $d$  hay không (trong câu hỏi này, học sinh có thể vô tình có kết quả viết đúng phương trình đường thẳng  $d_1$  mà không lập luận điểm  $M(-3; 4) \notin d$ ). Nguyên nhân của các sai lầm trên là do sự ngộ nhận các vector chỉ phương của hai đường thẳng cùng phương là điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng song song.

- Kết quả câu 2c) cho thấy có 15/32 có lời giải đúng (viết được  $\frac{-2}{2} = \frac{1}{-1}$  để kết luận các vector chỉ phương  $\vec{u}(-2; 1)$  và  $\vec{u}_2(2; -1)$  cùng phương và lập luận được  $A(1; -2) \in d \Rightarrow A(1; -2) \notin d_2$ ). Có 3 học sinh không đưa ra được lời giải bài toán. Có 14/32 học sinh đưa ra kết quả sai. Sau đây là một lời giải sai (Hình 2).

Nguyên nhân sai lầm trong lời giải này chính là học sinh đã sử dụng điều kiện hai vector  $\vec{u}(-2; 1)$  và  $\vec{u}_2(2; -1)$  cùng phương là điều kiện đủ để hai đường thẳng song song.

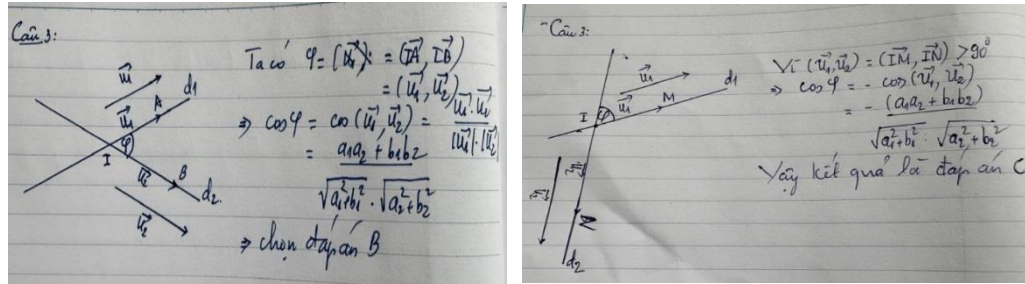
Về phương diện dạy học, để giúp học sinh tránh sai lầm dẫn đến lời giải sai của câu 2c), giáo viên có thể sử dụng hình vẽ của  $d$  và  $d_2$  (biểu diễn trực quan) để học sinh nhận thấy hai đường thẳng này trùng nhau. Điều này giúp học sinh thấy được sai lầm và khuyến khích học sinh tìm thêm điều kiện vì sao hai đường thẳng trùng nhau. Như vậy, trong trường hợp này, nếu học sinh biết sử dụng hình vẽ của các đường thẳng (ngôn ngữ hình ảnh) có thể giúp tránh được sai lầm khi giải toán.

- Kết quả câu 3) cho thấy 3/32 học sinh chọn được đáp án đúng là A, nhưng không giải thích. Có 12/32 học sinh chọn đáp án đúng A và giải thích được lý do. Sau đây là các cách trình bày đúng của học sinh (Hình 3).



Hình 3: Minh họa cho câu 3

Có 14/32 học sinh chọn đáp án sai là B. Hình 4 thể hiện một lời giải sai. Sai lầm ở đây là học sinh đã ngộ nhận  $\cos\varphi = \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ . Nguyên nhân sai lầm ở đây là do dựa vào hình vẽ (biểu diễn trực quan) trong trường hợp góc giữa hai vectơ  $\vec{u}_1(a_1; b_1)$  và  $\vec{u}_2(a_2; b_2)$  là góc nhọn. Học sinh đã không xét trường hợp góc giữa hai vectơ đó có thể là góc tù.



**Hình 4:** Lời giải sai của học sinh ở câu 3

Việc dựa vào hình vẽ cũng chính là nguyên nhân sai lầm của 2/32 học sinh chọn kết quả C khi vẽ hình góc giữa hai vectơ  $\vec{u}_1(a_1; b_1)$  và  $\vec{u}_2(a_2; b_2)$  là góc tù (Hình 4).

### 3.4. Một số biện pháp phát triển năng lực giao tiếp toán học của học sinh trong dạy học chủ đề Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

Các biện pháp phát triển năng lực GTTH cho học sinh được xây dựng dựa trên:

- Mục tiêu của chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018;
- Đặc điểm của hoạt động giao tiếp của học sinh THPT;
- Các biểu hiện của năng lực GTTH của học sinh trong dạy học chủ đề Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng; một số khó khăn, sai lầm của học sinh liên quan đến năng lực GTTH khi giải quyết nhiệm vụ học tập trong dạy học chủ đề.

#### 3.4.1. Tạo cơ hội giải thích ý nghĩa hình học của các biểu thức hình thức

**Mục đích:** Khi bắt đầu học các nội dung của phương pháp tọa độ, học sinh đang có sự ngắt quãng giữa một bên là ngôn ngữ hình thức (mặt cú pháp của thuật toán), các khái niệm toán học và các tính chất của hình học giải tích, một bên là nội dung hình học, các biểu tượng không gian và các ứng dụng khác nhau của nó. Giải thích ý nghĩa hình học của các biểu thức hình thức tạo cơ hội cho học sinh trình bày, diễn đạt, lý giải kiến thức chính xác. Hoạt động này góp phần phát triển năng lực GTTH cho học sinh, đồng thời tạo sự liên hệ, kết nối giữa nội dung và hình thức của các yếu tố hình học giải tích, từ đó vận dụng chính xác, linh hoạt và sáng tạo các biểu thức hình thức trong những trường hợp cụ thể.

**Cách thức thực hiện:**

- Tập luyện cho học sinh giải thích ý nghĩa các ký hiệu trong công thức toán: Ví

dụ 1: Trong quá trình học về phương trình tham số của đường thẳng, học sinh được lĩnh hội kiến thức: Giả sử  $d$  là đường thẳng đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0)$  và nhận vectơ  $\vec{u}(u_1; u_2) \neq \vec{0}$  làm vectơ chỉ phương, khi đó  $M(x; y) \in d \Leftrightarrow \overline{M_0M} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = tu_1 \\ y - y_0 = tu_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} (*)$ . Tiếp đó, giáo viên nên yêu cầu học sinh tìm hiểu mối liên hệ giữa  $t$  và  $M$  trên đường thẳng  $d$ . Có thể làm rõ vấn đề này như sau: Khi thu

được các hệ thức (\*), trở lại biểu thức  $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u}$ , nhận thấy mỗi điểm  $M$  thuộc  $d$  chỉ ứng với một giá trị xác định duy nhất của tham số  $t$  và ngược lại mỗi giá trị của  $t$  chỉ có duy nhất điểm  $M$  thuộc  $d$  ứng với nó. Đây chính là ý nghĩa hình học của tham số trong phương trình đường thẳng.

- *Tập luyện cho học sinh lý giải sự tương đồng của các cách biểu diễn khác nhau của cùng một đối tượng toán học:* Ví dụ 2: Khi dạy về phương trình tham số của đường thẳng, yêu cầu học sinh lý giải “tại sao mỗi đường thẳng có thể biểu thị dưới dạng tham số bằng nhiều phương trình khác nhau?”. Cần hướng dẫn để học sinh lý giải được rằng: thứ nhất, để viết được phương trình tham số của đường thẳng chỉ cần biết một điểm và một vectơ chỉ phương của đường thẳng đó; thứ hai, mỗi đường thẳng có vô số điểm và vô số vectơ chỉ phương. Vì thế, có thể viết phương trình đường thẳng dưới dạng tham số bằng những phương trình khác nhau. Hoạt động này góp phần phát triển năng lực giao tiếp toán học cho học sinh, đồng thời giúp học sinh tránh được sai lầm và linh hoạt hơn khi giải bài toán có liên quan đến việc thiết lập và sử dụng phương trình tham số của đường thẳng.

3.4.2. *Tập luyện cho học sinh phát biểu chính xác định nghĩa của khái niệm và định lý bằng ngôn ngữ toán học và ngôn ngữ thông thường*

*Mục đích:* Giúp học sinh có vốn ngôn ngữ toán học phong phú, tăng khả năng GTTH.

*Cách thức thực hiện:*

- *Tập cho học sinh phân tích cấu trúc logic của các định lý toán học; xác định giả thiết, kết luận và nhấn mạnh giả thiết, kết luận có cấu trúc hội hay tuyển:* Phân tích cấu trúc định lý giúp học sinh xác định đúng giả thiết và kết luận, làm cơ sở cho việc đọc, ghi chép tóm tắt và trích xuất được các thông tin toán học cần thiết. Ví dụ 3: Xét định lý: “Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  lần lượt có vectơ chỉ phương là  $\vec{u}_1$  và  $\vec{u}_2$ . Khi đó,  $\Delta_1$  trùng với  $\Delta_2$  khi và chỉ khi  $\vec{u}_1$  và  $\vec{u}_2$  cùng phương và có một điểm thuộc cả hai đường thẳng đó”.

Trước hết, định lý có cụm từ khi và chỉ khi, do đó có cấu trúc  $A \Leftrightarrow B$ . Học sinh cần làm rõ định lý trên được tạo thành bởi hai định lý:

Định lý 1. Cho hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  lần lượt có vectơ chỉ phương là  $\vec{u}_1$  và  $\vec{u}_2$ . Nếu  $\vec{u}_1$  và  $\vec{u}_2$  cùng phương và có một điểm thuộc cả hai đường thẳng đó thì  $\Delta_1$  trùng  $\Delta_2$ .

Định lý 2: Cho hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  lần lượt có vectơ chỉ phương là  $\vec{u}_1$  và  $\vec{u}_2$ . Nếu  $\Delta_1$  trùng với  $\Delta_2$  thì  $\vec{u}_1$  và  $\vec{u}_2$  cùng phương và có một điểm thuộc hai đường thẳng đó.

Tiếp đó, trong định lý 1 & 2, yêu cầu học sinh xác định đúng giả thiết, kết luận và nhấn mạnh giả thiết, kết luận có cấu trúc hội hay tuyển. Cụ thể: Định lý 1: Cấu trúc  $A \Rightarrow B$ . Giả thiết  $A$  có cấu trúc hội:  $A = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$ , trong đó  $A_1$ : hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  lần lượt có vectơ chỉ phương là  $\vec{u}_1$  và  $\vec{u}_2$ ,  $A_2$ : hai vectơ chỉ phương là  $\vec{u}_1$  và  $\vec{u}_2$  cùng phương,  $A_3$ : hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có một điểm chung. Kết luận  $B$ :  $\Delta_1$  trùng với  $\Delta_2$ . Định lý 2: Cấu trúc  $C \Rightarrow D$ , giả thiết  $C$  có cấu trúc hội:  $C = C_1 \wedge C_2$ , trong đó  $C_1$ : hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  lần lượt có vectơ chỉ phương là  $\vec{u}_1$  và  $\vec{u}_2$ ,  $C_2$ : hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  trùng nhau. Kết luận  $D$  có cấu trúc hội:  $D = D_1 \wedge D_2$ , trong đó  $D_1$ : hai vectơ chỉ phương là  $\vec{u}_1$  và  $\vec{u}_2$  cùng phương,  $D_2$ : hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có một điểm chung.



Thực tế cho thấy, khi dạy định lý, việc yêu cầu xác định giả thiết, kết luận và nhấn mạnh giả thiết, kết luận có cấu trúc hội hay tuyển giúp học sinh ghi nhớ định lý dễ dàng hơn. Từ đó trích xuất được các thông tin toán học trong nội dung định lý đầy đủ hơn, phát biểu chính xác và vận dụng đúng trong tư duy, lập luận, giải quyết các vấn đề toán học.

- Tập cho học sinh phát biểu định lý bằng ngôn ngữ thông thường và theo nhiều cách của ngôn ngữ toán học: Ví dụ 4: Khi học nội dung Vị trí tương đối của hai đường thẳng, học sinh có thể tiếp cận theo 2 cách. Cách thứ nhất, từ mối liên hệ của hai vectơ chỉ phương của các đường thẳng, suy ra vị trí tương đối giữa chúng. Theo cách này, học sinh được phát triển năng lực GTTH khi quan sát hình vẽ vị trí của các vectơ chỉ phương với vị trí của hai đường thẳng và biểu đạt thành lời. Cách thứ hai, để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có phương trình tổng quát lần lượt là  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  và  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ , có thể chuyển về xét số giao điểm của chúng, hay xét số nghiệm của

hệ 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (1).$$
 Việc yêu cầu học sinh tìm các cách diễn đạt khác nhau về mối

liên hệ giữa số nghiệm và vị trí tương đối giữa hai đường thẳng là cơ hội tốt để rèn luyện năng lực GTTH, qua đó có tư duy linh hoạt trong giải toán.

Qua hoạt động này, học sinh nhận thấy rằng việc xét vị trí tương đối của hai đường thẳng có thể định hướng theo các cách: dựa vào cặp vectơ chỉ phương của hai đường thẳng; dựa vào cặp vectơ pháp tuyến của hai đường thẳng; dựa vào số giao điểm của hai đường thẳng. Cách khai thác và tổ chức dạy học như trên giúp học sinh có khả năng kết nối, liên tưởng, huy động kiến thức, đồng thời tăng thêm khả năng chuyển đổi ngôn ngữ thông qua lĩnh hội và vận dụng kiến thức.

3.4.3. Tập luyện cho học sinh đọc các thông tin cơ bản, trọng tâm từ phương trình biểu thị các đối tượng toán học, từ đó tìm kiếm các giải pháp khác nhau khi giải một bài toán

*Mục đích:* Khi học các nội dung thuộc chủ đề Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, một yêu cầu quan trọng là từ phương trình của các đường (đường thẳng, đường tròn, đường Conic), học sinh phát hiện được các yếu tố xác định đối tượng đó. Biện pháp nhằm giúp học sinh phát hiện được đặc điểm của đối tượng, làm cơ sở cho việc suy nghĩ và lập luận.

*Cách thức thực hiện:*

- Khai thác các bài toán cơ bản của tài liệu giáo khoa để hướng dẫn học sinh phát hiện yếu tố xác định đối tượng hình học từ phương trình tương ứng: Ví dụ 5: Khi

cho 
$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$$
 là phương trình tham số của đường thẳng  $d$  nào đó, giáo viên cần yêu

cầu học sinh đọc được các yếu tố liên quan, cụ thể là từ phương trình, nhận biết được điểm  $M(x_0; y_0)$  thuộc  $d$  và  $d$  nhận vectơ  $\vec{u}(u_1; u_2)$  làm một vectơ chỉ phương. Hay ví dụ

6: Ngay sau khi học phương trình tham số của đường thẳng, yêu cầu học sinh giải bài

toán: Cho đường thẳng  $d$  có phương trình tham số 
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$$
 . a) Hãy chỉ ra tọa độ hai

điểm thuộc  $d$ . b) Điểm nào trong các điểm  $C(-1; -1)$ ,  $D(1; 3)$  thuộc  $d$ ?



Khi giải câu a), học sinh dễ dàng chỉ ra điểm  $M(1;-2)$  thuộc đường thẳng, đối với điểm còn lại, mặc dù học sinh có kết quả đúng nhưng không giống nhau. Tận dụng cơ hội này, giáo viên nên cho học sinh lý giải nguyên nhân của sự không giống nhau nêu trên. Nhiệm vụ này đòi hỏi học sinh phải có khả năng đọc được thông tin từ phương trình đường thẳng, đó là với mỗi giá trị của  $t$  xác định được một điểm trên đường thẳng  $d$ .

Đối với câu b), nhiều học sinh chưa biết chuyển đổi nhiệm vụ sang thao tác kiểm tra sự tồn tại giá trị của  $t$  thỏa mãn các hệ tương ứng hay không. Nhiệm vụ này đòi hỏi học sinh phải có khả năng đọc được thông tin từ phương trình đường thẳng, đó là với mỗi điểm trên đường thẳng xác định được một giá trị cụ thể của  $t$ .

- *Hướng dẫn học sinh tìm nhiều cách giải khác nhau của cùng một bài toán:*  
 Mỗi đối tượng toán học có chứa nhiều yếu tố, mỗi cách phân tích, phát hiện các yếu tố theo một góc độ nào đó có thể cho phép tìm được một cách giải cho bài toán. Tương tự như vậy, mối liên hệ giữa các đối tượng toán học có thể được phát hiện theo nhiều cách. Biện pháp này kích thích học sinh phải sử dụng được một cách hợp lý ngôn ngữ toán học kết hợp với ngôn ngữ thông thường để biểu đạt cách suy nghĩ, lập luận, chứng minh các khẳng định toán học. Xét ví dụ 7: Trong quá trình học Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng, giáo viên yêu cầu học sinh giải bài toán xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases} \text{ bằng nhiều cách. Tại thời điểm này, để xét vị trí}$$

tương đối giữa hai đường thẳng, học sinh có thể định hướng theo các cách:

Cách giải 1: Dựa vào số giao điểm của hai đường thẳng.

$$\text{Xét thấy } \begin{cases} 2 - t = 1 + t' \\ 3 + 2t = 5 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + t' = 1 \\ 2t + 2t' = 2 \end{cases}. \text{ Hệ có vô số nghiệm, nên } d_1 \text{ trùng } d_2.$$

Cách giải 2: Dựa vào số giao điểm của hai đường thẳng.

Phương trình của đường thẳng  $d_1$  có dạng tổng quát  $2x + y - 7 = 0$ .

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} x = 1 + t' & (1) \\ y = 5 - 2t' & (2) \\ 2x + y - 7 = 0 & (3) \end{cases}. \text{ Thay } x \text{ và } y \text{ từ (1), (2) vào (3) ta được:}$$

$$2(1+t') + (5-2t') - 7 = 0 \Leftrightarrow 0.t' + 0 = 0, \text{ phương trình có vô số nghiệm, nên } d_1 \text{ trùng } d_2.$$

Cách giải 3: Dựa vào số giao điểm của hai đường thẳng.

$$\text{Thay tọa độ điểm } A(2;3) \in d_1 \text{ vào } d_2 : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases} \text{ thấy } \begin{cases} 1 + t' = 2 \\ 5 - 2t' = 3 \end{cases} \Leftrightarrow t' = 1. \text{ Suy}$$

$$\text{ra } A \in d_2. \text{ Thay tọa độ điểm } B(1;5) \in d_2 \text{ vào } d_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \text{ thấy } \begin{cases} 2 - t = 1 \\ 3 + 2t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1. \text{ Suy}$$

$$\text{ra } B \in d_1. \text{ Vậy hai đường thẳng có hai điểm chung phân biệt nên } d_1 \text{ trùng } d_2.$$

Cách giải 4: Dựa vào cặp vector chỉ phương của hai đường thẳng.

Đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  lần lượt nhận các vector  $\vec{u}_1(1;-2)$  và  $\vec{u}_2(-1;2)$  làm vector chỉ phương. Nhận thấy  $\vec{u}_1$  và  $\vec{u}_2$  cùng phương nên chúng song song hoặc trùng nhau.

$$\text{Hơn nữa, thay tọa độ điểm } A(2;3) \in d_1 \text{ vào } d_2 : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases} \text{ thấy } \begin{cases} 1 + t' = 2 \\ 5 - 2t' = 3 \end{cases} \Leftrightarrow t' = 1.$$

Suy ra  $A \in d_2$ . Như vậy, hai đường thẳng có các vector chỉ phương cùng phương và có một điểm chung  $A$  nên chúng trùng nhau.

Cách giải 5: Chuyển phương trình hai đường thẳng về dạng tổng quát.

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0; \quad d_2 : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0.$$

Hai đường thẳng có cùng phương trình tổng quát nên chúng trùng nhau.

## 5. Kết luận

Nghiên cứu đã xác định được 7 biểu hiện của năng lực GTTH của học sinh trong dạy học chủ đề Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng. Qua việc yêu cầu học sinh thực hiện một số nhiệm vụ học tập liên quan, nghiên cứu đã phát hiện các biểu hiện của năng lực GTTH của học sinh và các sai lầm liên quan đến các biểu hiện của năng lực GTTH. Học sinh đã bộc lộ được một số biểu hiện của năng lực GTTH qua cách trình bày lời giải bài toán, đồng thời cũng thấy được một số sai lầm của học sinh do còn thiếu một số biểu hiện của năng lực GTTH. Từ đó, nghiên cứu đề xuất 3 biện pháp dạy học với các ví dụ minh họa cụ thể, chi tiết trong dạy học chủ đề Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Armianti, Fauzan, A., Harisman, Y. and Sya'bani, F. (2022). Local instructional theory of probability topics based on realistic mathematics education for eight-grade students. *Journal on Mathematics Education*, 13(4), 703-722. DOI: 10.22342/jme.v13i4.pp703-722
- Arani, M. R. S. (2016). An examination of oral and literal teaching traditions through a comparative analysis of mathematics lessons in Iran and Japan. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 5(3), 196-211. DOI: 10.1108/IJLLS-07-2015-0025
- Bui, P. U., Duong, H. T., and Nguyen, T. B. T. (2021). Developing mathematical communication skills for students in Grade 8 in teaching congruent triangle topics. *European Journal of Educational Research*, 10(3), 1287-1302. DOI: 10.12973/eu-jer.10.3.1287
- Chasanah, C., and Usodo, B. (2020). The Effectiveness of learning models on written mathematical communication skills viewed from students' cognitive styles. *European Journal of Educational Research*, 9(3). DOI: 10.12973/eu-jer.9.3.979
- Gardenia, N., Herman, T., Juandi, D., Dahlan, T., and Kandaga, T. (2021). Analysis of mathematical communication skills of class 8 students on two-variable linear equation systems (SPLDV) concept. *Journal of Physics: Conference Series 2021*, IOP Publishing. DOI: 10.1088/1742-6596/1806/1/012073
- Mauliyda, M. A., Annizar, A. M., Hidayati, V. R., and Mukhlis, M. (2020). Analysis of students' verbal and written mathematical communication error in solving word problem. *Journal of Physics: Conference Series*, 1538. DOI: 10.1088/1742-6596/1538/1/012083

Nguyễn, T. T. A., và Nguyễn, T. C. (2022). Đánh giá năng lực giao tiếp Toán học của học sinh thông qua nhiệm vụ mở về chủ đề vectơ. *Tạp chí Giáo dục*, số 12, 18-24.

Ya-amphan, D., Thinwiangthong, S., and Sythong, P. (2024). Comparative study of means of mathematical communication in Japan, Laos and Thailand. *Journal on Mathematics Education*, 15(1), 99-114. DOI: 10.22342/jme.v15i1.

## **ABSTRACT**

### **DEVELOPING MATHEMATICAL COMMUNICATION SKILLS FOR 10TH GRADE STUDENTS IN TEACHING THE TOPIC OF COORDINATE METHODS IN THE PLANE**

**Truong Thi Dung, Thai Thi Hong Lam, Nguyen Thi My Hang**

*Department of Mathematics, School of Education, Vinh University, Nghe An, Vietnam*

Received on 18/6/2024, accepted for publication on 29/7/2024

Mathematical communication is one of the core competencies that needs to be formed and developed for students in the teaching of Mathematics in high schools. In this research, we have identified the manifestations of mathematical communication competence in 10th-grade students in teaching the topic “Coordinate Methods in the Plane”, based on a survey of opinions from 68 high school mathematics teachers in the provinces of Nghe An and Ha Tinh. Additionally, the research was also conducted with 32 10th-grade students who were assigned several learning tasks related to the topic “Coordinate Methods in the Plane”, with the aim of understanding the manifestations of students’ mathematical communication competence and the mistakes they made related to these manifestations. From there, propose several teaching methods to contribute to the development of mathematical communication competence in students in teaching this topic.

**Keywords:** Mathematical communication competencies; 10th-grade students; coordinate methods in the plane.