

# PHÂN TÍCH TỈNH TẮM BẰNG VẬT LIỆU FGM XỚP TRÊN NỀN ĐÀN HỒI PASTERNAK THEO PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ CÓ KẾ ĐẾN TÍNH PHI TUYẾN HÌNH HỌC VÀ VỊ TRÍ MẶT TRUNG HÒA

Lê Thanh Hải<sup>a</sup>, Nguyễn Văn Long<sup>b,\*</sup>, Trần Minh Tú<sup>b</sup>, Chu Thanh Bình<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Khoa Xây dựng, Trường Đại học Vinh, số 182 đường Lê Duẩn, thành phố Vinh, Nghệ An, Việt Nam

<sup>b</sup>Khoa Xây dựng dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng, số 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 01/09/2020, Sửa xong 21/10/2020, Chấp nhận đăng 22/10/2020

## Tóm tắt

Bài báo xây dựng nghiệm giải tích dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để phân tích phi tuyến ứng xử uốn của tấm FGM xốp đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Vị trí mặt trung hòa cùng ba loại phân bố lỗ rỗng: đều, đối xứng, bất đối xứng được xét đến. Bằng việc sử dụng phương pháp Galerkin, lời giải giải tích theo phương pháp chuyển vị đã được thiết lập với các điều kiện biên khác nhau. Độ tin cậy của mô hình lý thuyết cũng như chương trình tính viết trên nền Matlab được kiểm chứng với kết quả của một số tác giả khác đã công bố. Các ví dụ số đã được thực hiện nhằm đánh giá ảnh hưởng của dạng phân bố và hệ số lỗ rỗng, tỉ số kích thước các cạnh, các hệ số nền đàn hồi Pasternak và điều kiện biên đến độ võng, các thành phần mô men uốn nội lực trong tấm FGM xốp.

*Từ khoá:* phân tích uốn phi tuyến; tấm vật liệu FGM xốp; lời giải giải tích; lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất; tiếp cận chuyển vị.

GEOMETRICALLY NONLINEAR STATIC ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED POROUS PLATES RESTING ON PASTERNAK ELASTIC FOUNDATION BY USING DISPLACEMENT APPROACH AND NEUTRAL SURFACE POSITION

## Abstract

In this paper, the analytical solution is presented for nonlinear bending response of functionally graded porous (FGP) plates based on first-order shear deformation theory. The neutral surface position and three patterns of porosity distributions namely uniform, non-uniform symmetric and non-uniform non-symmetric are considered. Using displacement approach in conjunction with Galerkin method, the analytical solution is obtained for various boundary conditions. The numerical examples are performed and compared with those available in the literature to show the accuracy of the present results. The effects of porosity distribution patterns and porosity coefficient, an aspect ratio of plates, Pasternak elastic foundation parameters, and boundary conditions on deflection, stress resultants of FGP plate are investigated.

*Keywords:* nonlinear bending analysis; functionally graded porous plate; analytical solution; first-order shear deformation theory; displacement approach.

[https://doi.org/10.31814/stce.nuce2020-14\(5V\)-14](https://doi.org/10.31814/stce.nuce2020-14(5V)-14) © 2020 Trường Đại học Xây dựng (NUCE)

## 1. Giới thiệu

Một trong những phát kiến quan trọng nhất về vật liệu tiên tiến trong những năm 80 của thế kỷ 19 là sự ra đời của vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally graded material - FGM) bởi các nhà khoa

\*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: [longnv@nuce.edu.vn](mailto:longnv@nuce.edu.vn) (Long, N. V.)

học Nhật bản. FGM là loại vật liệu composite có cấu trúc vi mô không đồng nhất, thường được tạo thành từ hai vật liệu thành phần là kim loại và gốm, trong đó tính chất cơ học của vật liệu biến đổi trơn và liên tục giữa hai bề mặt. Gần đây, một loại vật liệu FGM thế hệ mới gọi là vật liệu FGM xốp (functionally graded porous materials) có các lỗ rỗng trong cấu trúc vi mô, được biết đến như là một loại vật liệu nhẹ, trong đó hệ số rỗng là biến thiết kế, có thể điều chỉnh để đạt được những tính chất cơ học mong muốn.

Các kết cấu nhẹ sử dụng vật liệu FGM xốp như bọt kim loại (metal foam) chẳng hạn có tiềm năng ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như hàng không, giao thông vận tải, xây dựng dân dụng [1–3]. Với khả năng hấp thụ năng lượng tốt, bọt kim loại cùng với các loại vật liệu xốp khác như bông, gạch, bê tông, nhựa alphanat, nhựa PU trong cấu trúc có lỗ rỗng là lựa chọn thích hợp để chế tạo các tấm cách âm, cách nhiệt, các cấu kiện chịu được tải trọng động hay tải trọng va chạm. Cùng với sự gia tăng ứng dụng, các nghiên cứu về ứng xử cơ học của kết cấu bằng vật liệu FGM xốp ngày càng thu hút sự quan tâm của đông đảo các nhà khoa học trong và ngoài nước. Đa số các nghiên cứu này đều tập trung về phân tích tuyến tính ứng xử uốn, dao động và ổn định của kết cấu dầm, tấm và vỏ [4–10].

Để mô tả gần hơn sự làm việc của kết cấu trong thực tế, các phân tích phi tuyến thường được sử dụng. Praveen và Reddy [11] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (First-Order Shear Deformation Plate Theory - FSDT) có kể đến thành phần biến dạng phi tuyến von-Kármán phân tích tĩnh và động tấm P-FGM có kể đến ảnh hưởng nhiệt bằng phương pháp Phần tử hữu hạn (PTHH). Zhao và Liew [12] phân tích phi tuyến tấm FGM chịu tác dụng đồng thời của tải trọng cơ-nhiệt bằng phương pháp kp-Ritz không lưới (mesh-free kp-Ritz method). Yin và cs. [13] khảo sát ứng xử phi tuyến của tấm FGM bằng phương pháp đẳng hình học. Na và Kim [14] khảo sát ứng xử uốn phi tuyến của tấm FGM chịu tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt bằng phương pháp PTHH-3D.

Ngoài các phương pháp số được sử dụng trong các phân tích kể trên, phương pháp giải tích cũng là một công cụ hữu hiệu thường được nhiều tác giả lựa chọn. Theo tiếp cận ứng suất, Tung và Duc [15] phân tích ổn định phi tuyến tấm FGM bằng phương pháp giải tích. Lý thuyết tấm cổ điển (Classical Plate Theory - CLPT) và phương pháp Galerkin được các tác giả sử dụng để nhận được phương trình ổn định phi tuyến. Cũng sử dụng lý thuyết CLPT, hàm ứng suất Airy và phương pháp Galerkin, Thang và cs. [16] đã thiết lập lời giải hiển cho phân tích phi tuyến tấm S-FGM. Duc và cs. [17] phân tích ứng xử ổn định phi tuyến nhiệt của tấm FGM trên nền đàn hồi sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba (Third-Order Shear Deformation Plate Theory - TSDT) và hàm ứng suất. Woo và cs. [18] phân tích dao động riêng phi tuyến của tấm mỏng FGM.

Theo tiếp cận chuyển vị, Shen [19], Yang và Shen [20] phân tích ứng xử uốn phi tuyến của tấm FGM chịu tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt sử dụng kỹ thuật hàm phạt (perturbation technique) trên cơ sở lý thuyết TSDT. Wu và cs. [21] phân tích sau ổn định tấm FGM với các điều kiện biên khác nhau bằng phương pháp giải tích sử dụng chuỗi đa thức hữu hạn Chebyshev và lý thuyết FSDT. Alinia và Ghannadpour [22] sử dụng nghiệm chuyển vị dạng hàm điều hòa để phân tích phi tuyến tấm mỏng FGM chịu uốn.

Các phân tích ở trên cho thấy, nghiên cứu về ứng xử phi tuyến của tấm FGM thực sự không nhiều, đối với kết cấu tấm bằng vật liệu FGM xốp thì các nghiên cứu về chủ đề này lại càng hạn chế. Sử dụng lý thuyết FSDT, Duc và cs. [23] khảo sát ứng xử động lực học phi tuyến của tấm FGM có vi bọt rỗng. Tu và cs. [24] nghiên cứu ổn định và sau ổn định của tấm FG xốp không hoàn hảo dưới tác dụng của tải trọng cơ học. Cong và cs. [25] nghiên cứu ổn định cơ-nhiệt phi tuyến và sau ổn định của tấm FGM có vi bọt rỗng trên nền đàn hồi sử dụng lý thuyết TSDT. Phung-Van và cs. [26] kết hợp lý thuyết TSDT và phương pháp đẳng hình học phân tích ứng xử uốn phi tuyến của tấm FGM có vi bọt rỗng.

Khi nghiên cứu về vật liệu FGM với cấu trúc vật liệu không đối xứng, mặt trung bình hình học

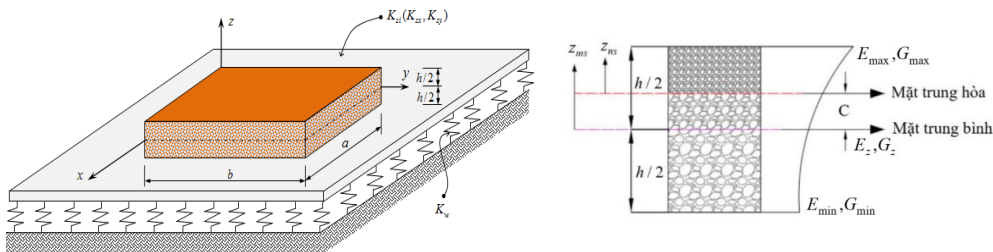
và mặt trung hòa thường không trùng nhau. Để loại bỏ tương tác màng - uốn, nhiều tác giả thường tính toán với hệ tọa độ quy chiếu đặt trên mặt trung hòa thay vì tính toán trên mặt trung bình như vật liệu đẳng hướng [27–30]. Với việc chuyển hệ tọa độ quy chiếu về mặt trung hòa, trong các hệ thức cơ bản sẽ không có tương tác màng - uốn, như vậy thời gian tính toán sẽ được rút ngắn, nhất là với các bài toán phi tuyến.

Tấm trên nền đàn hồi là mô hình cơ học mô phỏng sự làm việc thực tế của mặt đường bê tông xi măng, mặt đường nhựa, đường băng sân bay hay đáy của các bể chứa đặt trên nền đất của công trình. Các tấm tường của lò phản ứng hạt nhân, hầm chứa, bể chứa hóa chất và nhiều cấu kiện công trình khác cũng được mô hình hóa như là kết cấu tấm đặt trên nền, hay bao quanh bởi nền đàn hồi. Các nghiên cứu về tấm trên nền đàn hồi vì thế là bài toán quan trọng và được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu [31–34].

Trong bài báo này, phương pháp chuyển vị sẽ được sử dụng để phân tích ứng xử uốn phi tuyến của tấm chữ nhật FGM xếp đặt trên nền đàn hồi với một số điều kiện biên khác nhau có xét đến vị trí mặt trung hòa. Hàm xấp xỉ chuyển vị được giả thiết dưới dạng hàm điều hòa kép, hệ phương trình phi tuyến để giải nhận được bằng cách sử dụng phương pháp Galerkin trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Ảnh hưởng của ba loại phân bố lỗ rỗng: đều, không đều đối xứng và không đều bất đối xứng cũng như hệ số mật độ lỗ rỗng, điều kiện biên và các tham số kích thước tấm, tham số nền đến độ võng và các thành phần nội lực sẽ được khảo sát.

## 2. Mô hình tấm bằng vật liệu FGM xếp

Xét tấm chữ nhật bằng vật liệu FGM xếp có chiều dài  $a$ , chiều rộng  $b$  và chiều dày  $h$  như Hình 1. Tấm được đặt trên nền đàn hồi Pasternak với các hệ số nền:  $K_w$  là hệ số độ cứng uốn (Winkler stiffness),  $K_{si}$  ( $i = x, y$ ) là hệ số độ cứng cắt (shear stiffness).



Hình 1. Mô hình tấm chữ nhật FGM xếp trên nền đàn hồi

Mô đun đàn hồi kéo-nén và mô đun đàn hồi trượt của vật liệu FGM xếp phụ thuộc vào mật độ phân bố lỗ rỗng, và biến thiên liên tục theo chiều dày tấm theo các quy luật sau [35, 36]:

- Phân bố đều:

$$E = E_{\max} (1 - e_0 \lambda); \quad G = G_{\max} (1 - e_0 \lambda); \quad \lambda = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left( \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 \quad (1)$$

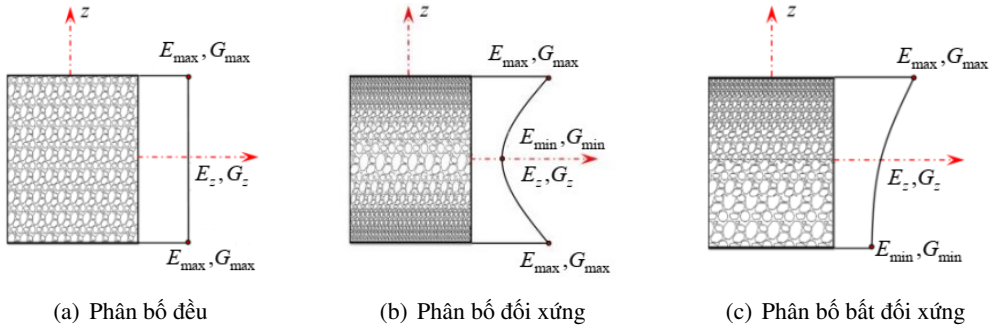
- Phân bố không đều - đối xứng:

$$E(z) = E_{\max} \left[ 1 - e_0 \cos \left( \frac{\pi z}{h} \right) \right]; \quad G(z) = G_{\max} \left[ 1 - e_0 \cos \left( \frac{\pi z}{h} \right) \right] \quad (2)$$

- Phân bố không đều - bất đối xứng:

$$E(z) = E_{\max} \left[ 1 - e_0 \cos \left( \frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right]; \quad G(z) = G_{\max} \left[ 1 - e_0 \cos \left( \frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (3)$$

trong đó  $E_{\max}, G_{\max}$  lần lượt là các giá trị lớn nhất của mô đun đàn hồi kéo - nén, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng;  $E_{\min}, G_{\min}$  là các giá trị nhỏ nhất tương ứng (xem Hình 2). Hệ số Poisson được coi là không thay đổi theo chiều dày tấm.



Hình 2. Tấm bằng vật liệu FGM xấp với các hàm mật độ phân bố lỗ rỗng khác nhau

Hệ số mật độ lỗ rỗng  $e_0$  được tính theo:

$$e_0 = 1 - \frac{E_{\min}}{E_{\max}} = 1 - \frac{G_{\min}}{G_{\max}} \quad (0 < e_0 < 1) \quad (4)$$

Vị trí mặt trung hòa của tấm FGM xấp trong trường hợp phân bố bất đối xứng không trùng mặt trung bình, được xác định từ điều kiện [37]:

$$\int_{-h/2}^{h/2} (z - C) E(z) dz = 0 \Rightarrow C = \left[ \int_{-h/2}^{h/2} z E(z) dz \right] / \left[ \int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz \right] \quad (5)$$

### 3. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất

Sử dụng hệ tọa độ quy chiếu đi qua mặt trung hòa, các thành phần chuyển vị  $u, v, w$  của điểm bất kỳ có tọa độ  $(x, y, z_{ns})$  trong không gian tấm [38]:

$$u(x, y, z_{ns}) = u_0(x, y) + z_{ns}\theta_x(x, y); \quad v(x, y, z_{ns}) = v_0(x, y) + z_{ns}\theta_y(x, y); \quad w(x, y, z_{ns}) = w_0(x, y) \quad (6)$$

trong đó:  $u_0, v_0, w_0$  là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung hòa theo các phương  $x, y, z_{ns}$ ;  $\theta_x, \theta_y$  là các góc xoay của pháp tuyến mặt trung hòa quanh hai trục  $y, x$ .

Các thành phần biến dạng có kể đến thành phần phi tuyến hình học theo nghĩa von Kármán [38] có dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_{ns} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

trong đó:  $\varepsilon_x^0 = u_{0,x} + \frac{w_{0,x}^2}{2}$ ;  $\varepsilon_y^0 = v_{0,y} + \frac{w_{0,y}^2}{2}$ ;  $\gamma_{xy}^0 = u_{0,y} + v_{0,x} + w_{0,x}w_{0,y}$ ;  $\kappa_x = \theta_{x,x}$ ;  $\kappa_y = \theta_{y,y}$ ;  $\kappa_{xy} = \theta_{x,y} + \theta_{y,x}$ ;  $\gamma_{xz}^0 = w_{0,x} + \theta_x$ ;  $\gamma_{yz}^0 = w_{0,y} + \theta_y$ . Dấu (,) đi kèm các thành phần chuyển vị chỉ đạo hàm riêng theo biến tương ứng.

Vật liệu FGM xấp được coi là đàn hồi tuyến tính, các thành phần ứng suất được xác định từ định luật Hooke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

trong đó:  $Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1 - \nu^2}$ ,  $Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E(z_{ns})}{1 - \nu^2}$ ,  $Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns})}{2(1 + \nu)}$ .

Các thành phần nội lực được suy ra từ biểu thức định nghĩa:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}; \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix}$$

trong đó:  $(A_{ij}, C_{ij}) = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} Q_{ij}(1, z_{ns}^2) dz_{ns}; ij = 11, 12, 66; A_{44}^s = k_s \int_{-h/2-C}^{h/2-C} Q_{44} dz_{ns}; k_s$  là hệ số hiệu chỉnh cắt, với tấm chữ nhật vật liệu FGM xấp:  $k_s = 5/6$ . Biểu thức (9) cho thấy việc sử dụng mặt trung hòa đã giúp loại bỏ được các tương tác màng-uốn trong tấm.

Nguyên lý thế năng toàn phần cực tiểu được sử dụng để thiết lập các phương trình cân bằng của tấm [39], với dạng toán học như sau:

$$0 = \delta U_P + \delta U_F + \delta V \quad (10)$$

trong đó  $\delta U_P, \delta U_F, \delta V$  lần lượt là biến phân của thế năng biến dạng đàn hồi của tấm, thế năng biến dạng của nền và thế năng của tải trọng.

Hệ phương trình cân bằng thu được có dạng [39]:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} &= 0; \quad N_{xy,x} + N_{y,y} = 0; \\ Q_{xz,x} + Q_{yz,y} + N_x w_{0,xx} + 2N_{xy} w_{0,xy} + N_y w_{0,yy} - K_w w_0 + K_{sx} w_{0,xx} + K_{sy} w_{0,yy} + q &= 0; \quad (11) \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_{xz} &= 0; \quad M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_{yz} = 0 \end{aligned}$$

Các tham số điều kiện biên bao gồm:  $(u_n, N_n), (u_s, N_{ns}), (w_0, Q_n), (\theta_n, M_n), (\theta_s, M_{ns})$ . Các chỉ số dưới  $n, s$  thể hiện phương pháp tuyến và tiếp tuyến của biên tấm.

Thay liên hệ giữa các thành phần nội lực qua biến dạng, biến dạng qua chuyển vị từ các quan hệ (7)–(9) vào (11), ta được hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất:

$$\begin{aligned} A_{11}(u_{0,xx} + w_{0,x} w_{0,xx}) + A_{12}(v_{0,xy} + w_{0,y} w_{0,xy}) + A_{66}(u_{0,yy} + v_{0,xy} + w_{0,x} w_{0,yy} + w_{0,y} w_{0,xy}) &= 0; \\ A_{12}(u_{0,xy} + w_{0,x} w_{0,xy}) + A_{11}(v_{0,yy} + w_{0,y} w_{0,yy}) + A_{66}(u_{0,xy} + v_{0,xx} + w_{0,xx} w_{0,y} + w_{0,x} w_{0,xy}) &= 0; \\ A_{44}^s w_{0,yy} + A_{44}^s w_{0,xx} - K_w w_0 + K_{sx} w_{0,xx} + K_{sy} w_{0,yy} + A_{44}^s \theta_{x,x} + A_{44}^s \theta_{y,y} + A_{11} u_{0,x} w_{0,xx} \\ + A_{12} u_{0,x} w_{0,yy} + 2A_{66} u_{0,y} w_{0,xy} + A_{12} v_{0,y} w_{0,xx} + A_{11} v_{0,y} w_{0,yy} + 2A_{66} v_{0,x} w_{0,xy} + \frac{1}{2} A_{11} w_{0,x}^2 w_{0,xx} \\ + \frac{1}{2} A_{12} w_{0,y}^2 w_{0,xx} + \frac{1}{2} A_{12} w_{0,x}^2 w_{0,yy} + \frac{1}{2} A_{11} w_{0,y}^2 w_{0,yy} + 2A_{66} w_{0,x} w_{0,y} w_{0,xy} + q &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{11}\theta_{x,xx} + C_{66}\theta_{x,yy} + (C_{12} + C_{66})\theta_{y,xy} - A_{44}^S\theta_x - A_{55}^S w_{0,x} &= 0; \\ (C_{12} + C_{66})\theta_{x,xy} + C_{66}\theta_{y,xx} + C_{11}\theta_{y,yy} - A_{44}^S\theta_y - A_{44}^S w_{0,y} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

#### 4. Lời giải giải tích

Với tấm chữ nhật, các nghiệm chuyển vị thỏa mãn điều kiện biên theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất sau đây sẽ được thiết lập:

- Liên kết khớp 4 cạnh (SSSS): Tất cả bốn cạnh của tấm tựa bản lề, với các ràng buộc tương ứng là:

$$u_n = u_s = w_0 = \theta_s = 0, M_n = 0 \quad (13)$$

- Liên kết ngàm 4 cạnh (CCCC): Tất cả bốn cạnh của tấm liên kết ngàm, các ràng buộc tương ứng là:

$$u_n = v_s = w_0 = \theta_n = \theta_s = 0 \quad (14)$$

- Liên kết đối xứng ngàm 2 cạnh, khớp 2 cạnh (SCSC): Hai cạnh đối diện của tấm tựa bản lề, hai cạnh còn lại liên kết ngàm, các ràng buộc tương ứng là:

$$\begin{aligned} \text{Tại } x = 0, a: u_0 = v_0 = w_0 = \theta_y = 0, M_x = 0 \\ \text{Tại } y = 0, b: u_0 = v_0 = w_0 = \theta_x = \theta_y = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Lưu ý rằng, các điều kiện biên được xem xét trên đây đều có chung một đặc điểm là không thể tự do dịch chuyển trong mặt phẳng tấm (immovable).

Với các điều kiện biên đã nêu ở trên ta chọn nghiệm chuyển vị dưới dạng các khai triển sau đây [22, 40]:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N u_{0mn} U_{1m}(x) U_{2n}(y); & v_0 &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N v_{0mn} V_{1m}(x) V_{2n}(y); \\ \theta_x &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \theta_{xmn} X'_m(x) Y_n(y); & \theta_y &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \theta_{ymn} X_m(x) Y'_n(y); \\ w_0 &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{0mn} X_m(x) Y_n(y) \end{aligned} \quad (16)$$

trong đó:  $u_{0mn}, v_{0mn}, w_{0mn}, \theta_{xmn}, \theta_{ymn}$  là các hệ số cần xác định;  $U_{1m}(x) = \sin \frac{2m\pi x}{a}$ ;  $U_{2n}(y) = \sin \frac{(2n-1)\pi y}{b}$ ;  $V_{1m}(x) = \sin \frac{(2m-1)\pi x}{a}$ ;  $V_{2n}(y) = \sin \frac{2n\pi y}{b}$ , với  $m, n = 1, 2, 3 \dots$

Các hàm  $X_m(x), Y_n(y)$  phải đảm bảo liên tục, thỏa mãn điều kiện biên và độc lập tuyến tính. Bảng 1 là các hàm dạng  $X_m(x)$  và  $Y_n(y)$  áp dụng cho 3 điều kiện biên SSSS, SCSC và CCCC.

Bảng 1. Các hàm dạng  $X_m(x)$  và  $Y_n(y)$  sử dụng trong khai triển (16) [41, 42]

Điều kiện biên	Tại $x = 0, a$	Tại $y = 0, b$	$X_m(x)$	$Y_n(y)$	$(m, n)$
SSSS	$X_m = X_m'' = 0$	$Y_m = Y_m'' = 0$	$\sin \frac{m\pi x}{a}$	$\sin \frac{n\pi y}{b}$	$m, n = 1, 3, 5 \dots$
SCSC	$X_m = X_m'' = 0$	$Y_m = Y_m' = 0$	$\sin \frac{m\pi x}{a}$	$\sin^2 \frac{n\pi y}{b}$	$m = 1, 3, 5 \dots$ $n = 1, 2, 3 \dots$
CCCC	$X_m = X_m' = 0$	$Y_m = Y_m' = 0$	$\sin^2 \frac{m\pi x}{a}$	$\sin^2 \frac{n\pi y}{b}$	$m, n = 1, 2, 3 \dots$

Thay (16) vào (12), ta được:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (u_{0mn} t_{mn}^{(11)} + v_{0mn} t_{mn}^{(12)}) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N w_{0mn} w_{0pq} h_{mnpq}^{(13)} = 0; \\ & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (u_{0mn} t_{mn}^{(21)} + v_{0mn} t_{mn}^{(22)}) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N w_{0mn} w_{0pq} h_{mnpq}^{(23)} = 0; \\ & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (w_{0mn} t_{mn}^{(33)} + \theta_{xmn} t_{mn}^{(34)} + \theta_{ymn} t_{mn}^{(35)}) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N (u_{0mn} w_{0pq} h_{mnpq}^{(31)} + v_{0mn} w_{0pq} h_{mnpq}^{(32)}) \\ & \quad + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N w_{0mn} w_{0pq} w_{0rs} P_{mnpqrs}^{(33)} + q = 0; \\ & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (w_{0mn} t_{mn}^{(43)} + \theta_{xmn} t_{mn}^{(44)} + \theta_{ymn} t_{mn}^{(45)}) = 0; \quad \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (w_{0mn} t_{mn}^{(53)} + \theta_{xmn} t_{mn}^{(54)} + \theta_{ymn} t_{mn}^{(55)}) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

trong đó: các hàm số  $t_{mn}^{(i)}(x, y)$ ,  $h_{mnpq}^{(i)}(x, y)$ ,  $p_{mnpqrs}^{(i)}(x, y)$  được trình bày ở Phụ lục A.

Áp dụng phương pháp Galerkin, nhân các biểu thức trong phương trình (17) với các hàm riêng tương ứng rồi thực hiện tích phân trên toàn bộ miền A của tấm, ta được:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (u_{0mn} L_{mni j}^{(11)} + v_{0mn} L_{mni j}^{(12)}) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N w_{0mn} w_{0pq} H_{mnpqij}^{(13)} = 0; \\ & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (u_{0mn} L_{mni j}^{(21)} + v_{0mn} L_{mni j}^{(22)}) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N w_{0mn} w_{0pq} H_{mnpqij}^{(23)} = 0; \\ & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (w_{0mn} L_{mni j}^{(33)} + \theta_{xmn} L_{mni j}^{(34)} + \theta_{ymn} L_{mni j}^{(35)}) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N (u_{0mn} w_{0pq} H_{mnpqij}^{(31)} + v_{0mn} w_{0pq} H_{mnpqij}^{(32)}) \\ & \quad + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N w_{0mn} w_{0pq} w_{0rs} P_{mnpqrsij}^{(33)} + F_{ij} = 0; \\ & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (w_{0mn} L_{mni j}^{(43)} + \theta_{xmn} L_{mni j}^{(44)} + \theta_{ymn} L_{mni j}^{(45)}) = 0; \quad \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (w_{0mn} L_{mni j}^{(53)} + \theta_{xmn} L_{mni j}^{(54)} + \theta_{ymn} L_{mni j}^{(55)}) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$



trong đó các hệ số  $L_{mnij}^{( )}$ ,  $H_{mnpqij}^{( )}$ ,  $P_{mnpqrsij}^{( )}$ ,  $F_{ij}$  được trình bày ở **Phụ lục B**. Nghiệm của hệ phương trình đại số phi tuyến (18) là véc tơ chuyển vị  $\{u_{0mn}; v_{0mn}; w_{0mn}; \theta_{xmn}; \theta_{ymn}\}$ ; từ đó xác định được các phần chuyển vị, biến dạng, nội lực của bài toán phân tích phi tuyến tĩnh.

Trong các phân tích tuyến tính, bỏ qua các thành phần biến dạng phi tuyến trong công thức (7); hệ phương trình đại số tuyến tính thu được từ (18) sau khi bỏ qua các thành phần phi tuyến  $H_{mnpqij}^{( )}$ ,  $P_{mnpqrsij}^{( )}$ .

## 5. Kết quả số và thảo luận

Với nghiệm giải tích đã thiết lập ở phần trên, chương trình tính trên nền Matlab được viết để thực hiện các ví dụ số. Các kết quả phân tích là phi tuyến trừ những trường hợp riêng sẽ được nói trước. Các công thức không thứ nguyên được sử dụng [43, 44]:

$$\bar{w} = \frac{1}{h} w_0 \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right); K_0 = \frac{K_w a^4}{E_0 h^3}; J_0 = \frac{K_{sx} a^2}{E_0 h^3 \nu} = \frac{K_{sy} b^2}{E_0 h^3 \nu}; E_0 = 1,0 \text{ GPa}; P = \frac{q_0 a^4}{E_1 h^4} \quad (19)$$

### 5.1. Ví dụ kiểm chứng

#### a. Ví dụ kiểm chứng 1

Tấm vuông đẳng hướng điều kiện biên hai cạnh đối diện tựa khớp, hai cạnh còn lại liên kết ngàm (SCSC) dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều  $q_0$  với  $h/a = 0,05$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $E = 0,3 \times 10^7$  psi. Bảng 2 thể hiện kết quả độ võng không thứ nguyên  $\bar{w}$  tại tâm tấm với các tham số tải trọng uốn  $P$  khác nhau. Các kết quả tính toán trong bài báo được so sánh với Lei [45] sử dụng phương pháp phần tử biên (the boundary element method) dựa trên lý thuyết tấm bậc nhất, Azizian và Dawe [46] sử dụng phương pháp dải hữu hạn (the finite strip method) sử dụng lý thuyết tấm Mindlin, Long và cs. [47] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất theo tiếp cận ứng suất.

Bảng 2. Độ võng không thứ nguyên  $\bar{w}$  của tấm vuông đẳng hướng điều kiện biên SCSC dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều  $q_0 = PE_1 h^4 / a^4$

$P$	Azizian và Dawe [46] (Lý thuyết tấm Mindlin)	Lei [45]	Long và cs. [47] (Tiếp cận theo ứng suất)	Bài báo	Sai số $\delta$ (%)
0,9158	0,0199	0,0199	0,0198	0,0198	0,23
4,5788	0,0988	0,0984	0,0982	0,0981	0,11
6,8681	0,1469	0,1455	0,1461	0,1459	0,17
9,1575	0,1936	0,1904	0,1929	0,1922	0,35

\*Sai số so với kết quả của Long và cs. [47].

#### b. Ví dụ kiểm chứng 2

Xét tấm vuông đẳng hướng:  $a/h = 10$ ,  $E = E_c = 322,27$  GPa ( $\text{Si}_3\text{N}_4$ ),  $\nu = 0,28$ , chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều  $q_0 = P \frac{E_m h^4}{a^4}$ ,  $E_m = 207,78$  GPa (SUS304). Độ võng không thứ nguyên tại tâm tấm  $\bar{w}$  được tính toán và so sánh với Talha và Singh [48] sử dụng phương pháp PTHH (phần tử  $C^0$ , 13 bậc tự do tại mỗi nút) dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao với 7 ẩn số chuyển vị độc lập. Các kết quả kiểm chứng thể hiện trên Bảng 3 được áp dụng với cả 3 dạng điều kiện biên SSSS, SCSC và



Bảng 3. Độ võng không thứ nguyên không thứ nguyên  $\bar{w}$  của tấm vuông đẳng hướng dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều

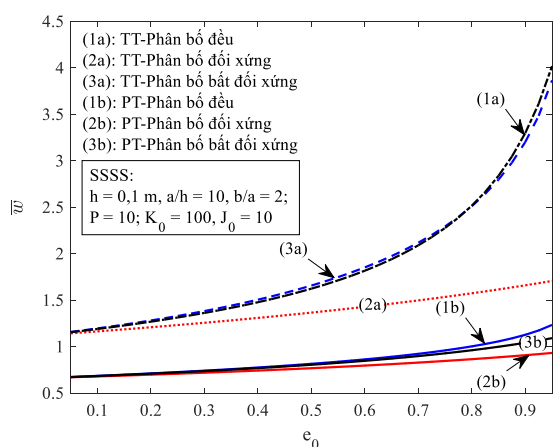
Phương pháp	$P = 4$	$P = 8$	$P = 12$	$P = 16$	$P = 20$	$P = 40$
SSSS						
Talha và Singh [48]	0,1200	0,2251	0,3185	0,3911	0,4597	0,6984
Bài báo	0,1189	0,2254	0,3160	0,3927	0,4583	0,6908
Sai số $\delta$ (%)	0,96	0,14	0,77	0,40	0,30	1,09
SCSC						
Talha và Singh [48]	0,0602	0,1193	0,1764	0,2306	0,2811	0,4942
Bài báo	0,0594	0,1179	0,1745	0,2286	0,2800	0,4953
Sai số $\delta$ (%)	1,26	1,19	1,09	0,85	0,38	0,21
CCCC						
Talha và Singh [48]	0,0405	0,0808	0,1207	0,1598	0,1981	0,3698
Bài báo	0,0395	0,0788	0,1177	0,1560	0,1936	0,3681
Sai số $\delta$ (%)	2,51	2,52	2,51	2,37	2,25	0,47

CCCC với các trị số tải trọng uốn khác nhau. Có thể thấy rằng, sai lệch giữa các kết quả trong bài báo và kết quả của Talha và Singh [48] là rất bé (dưới 2,6%).

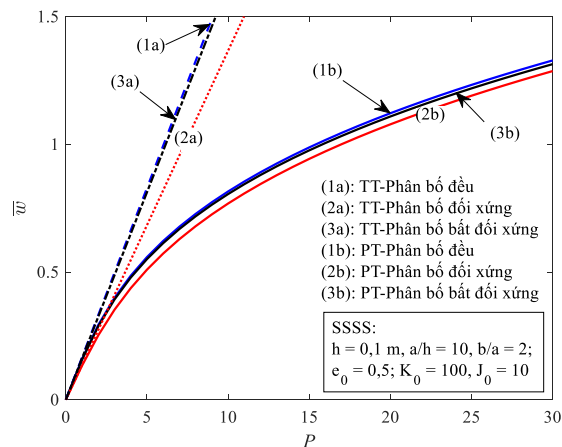
Qua các ví dụ kiểm chứng 1 và 2, có thể thấy rằng lời giải theo tiếp cận bằng phương pháp chuyển vị và chương trình máy tính mà bài báo xây dựng có độ tin cậy.

### 5.2. Các ví dụ khảo sát

Xét tấm chữ nhật vật liệu xốp ( $E_1 = 200$  GPa,  $\nu = 1/3$ ) đặt trên nền đàn hồi, dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều  $q_0$ . Dưới đây, ảnh hưởng của dạng phân bố lỗ rỗng, hệ số rỗng, tham số nền và tỷ



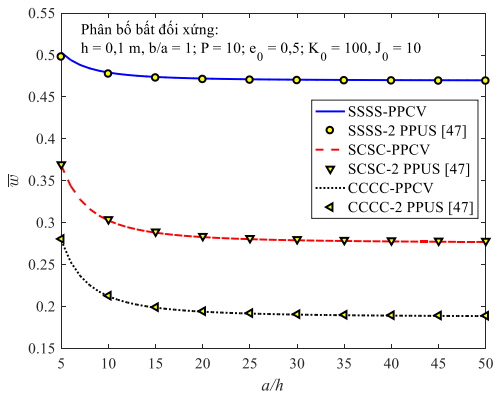
Hình 3. Biến thiên độ võng  $\bar{w}$  của tấm xốp theo hệ số rỗng  $e_0$  với các quy luật phân bố lỗ rỗng khác nhau



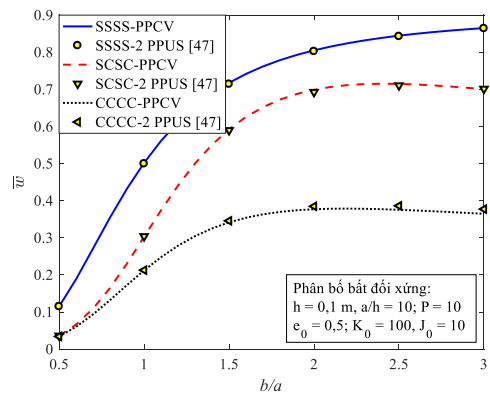
Hình 4. Biến thiên độ võng  $\bar{w}$  của tấm theo tải trọng phân bố đều  $P$  với các quy luật phân bố lỗ rỗng khác nhau

số kích thước tấm sẽ được khảo sát. Chú ý rằng các phân tích phi tuyến được ký hiệu bằng PT, phân tích tuyến tính ký hiệu là TT.

Hình 3 thể hiện sự biến thiên của độ võng lớn nhất không thứ nguyên theo hệ số rỗng với ba dạng phân bố lỗ rỗng khác nhau: đều, đối xứng và bất đối xứng. Hình 4 biểu diễn đường cong tải - độ võng với cả ba dạng phân bố lỗ rỗng khác nhau ( $e_0 = 0,5$ ). Các đường thẳng thể hiện phân tích tuyến tính, đường cong là phân tích phi tuyến. Từ các đồ thị nhận được ta nhận thấy, hệ số rỗng tăng làm cho độ cứng của tấm giảm, dẫn tới độ võng không thứ nguyên tăng theo với tất cả các dạng phân bố lỗ rỗng, khi phân tích tuyến tính cũng như phi tuyến. Hệ số rỗng càng lớn thì ảnh hưởng của dạng phân bố lỗ rỗng càng rõ rệt. Phân bố đối xứng có độ võng bé nhất trong khi hai dạng phân bố lỗ rỗng còn lại cho kết quả độ võng không mấy khác biệt khi phân tích tuyến tính. Như chờ đợi, tính theo phi tuyến luôn cho kết quả của độ võng bé hơn tính theo tuyến tính, ngoài ra còn nhận thấy, khi hệ số lỗ rỗng tăng lên thì có sự khác biệt đáng kể về độ võng giữa phân tích theo tuyến tính và phi tuyến.



Hình 5. Biến thiên độ võng  $\bar{w}$  của tấm theo tỷ số kích thước tấm  $a/h$  với các điều kiện biên khác nhau



Hình 6. Biến thiên độ võng  $\bar{w}$  của tấm theo tỷ số kích thước cạnh  $b/a$  với các điều kiện biên khác nhau

Quy luật biến thiên của độ võng không thứ nguyên  $\bar{w}$  theo tỷ số kích thước tấm  $a/h$  (với  $b/a = 1$ ) và  $b/a$  (với  $a/h = 10$ ) của tấm FGM xếp với các điều kiện biên khác nhau được biểu diễn lần lượt trên Hình 5 và Hình 6. Các kết quả phân tích phi tuyến của bài báo theo tiếp cận chuyển vị được tính toán và so sánh với cách tiếp cận theo ứng suất trong bài báo [47]. Đồ thị trên các hình này cho thấy sự tương đồng giữa hai cách tiếp cận, và cụ thể là:

- Về ảnh hưởng của điều kiện biên: rõ ràng là các biên SSSS có độ võng lớn nhất, sau đó đến biên SCSC, biên CCCC có độ võng nhỏ nhất; các biên hạn chế chuyển vị trong mặt phẳng có độ võng bé hơn so với biên không hạn chế chuyển vị trong mặt phẳng tương ứng.

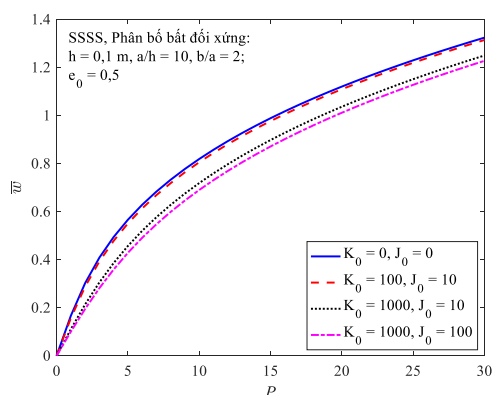
- Về ảnh hưởng của tỷ số  $a/h$ : khi tăng tỷ số  $a/h$ , độ võng không thứ nguyên  $\bar{w}$  giảm nhanh khi  $a/h$  còn nhỏ (tấm dày,  $a/h \leq 10$ ); sau đó độ võng giảm chậm lại và gần như không đổi khi  $a/h$  lớn ( $a/h \geq 30$ ).

- Về ảnh hưởng của tỷ số  $b/a$ : khi tăng tỷ số  $b/a$ , độ võng không thứ nguyên  $\bar{w}$  tăng khi  $b/a$  còn nhỏ ( $0,5 \leq b/a \leq 2$ ); sau đó thay đổi rất ít.

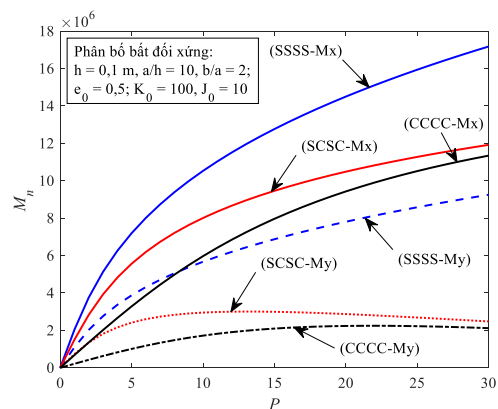
Hình 7 là đường cong tải - độ võng của tấm FGM xếp với bốn cặp tham số nền khác nhau. Từ hình vẽ, ta có thể quan sát thấy rằng, khi tăng các tham số nền  $K_0, J_0$ , độ võng của tấm giảm đáng kể; và ảnh hưởng của hệ số nền  $J_0$  lớn hơn so với hệ số nền  $K_0$ .

Biến thiên của các thành phần mô men uốn  $M_x, M_y$  tại tâm tấm theo tải trọng phân bố  $P$  của tấm chữ nhật ( $b/a = 2$ ) FGM xếp với các điều kiện biên khác nhau được thể hiện trên Hình 8. Các đồ thị cho thấy, với mọi mức tải  $P$ , mô men  $M_x$  lớn hơn khá nhiều so với mô men uốn  $M_y$ . Một điều thú vị

là với biên SCSC, khi tăng tải  $P$ , mô men uốn  $M_x$  tăng trong khi mô men  $M_y$  chỉ tăng khi  $P$  còn nhỏ ( $P \leq 12$ ), sau đó lại giảm.



Hình 7. Biến thiên độ võng  $\bar{w}$  của tấm theo tải trọng phân bố đều  $P$  với các hệ số nền khác nhau



Hình 8. Biến thiên mô men uốn  $M_x, M_y$  (Nm/m) của tấm theo tải trọng phân bố đều  $P$  với các điều kiện biên khác nhau

## 6. Kết luận

Bài báo xây dựng cơ sở lý thuyết và thuật toán phân tích phi tuyến ứng xử uốn của tấm chữ nhật FGM xếp đặt trên nền đàn hồi với một số điều kiện biên khác nhau theo phương pháp chuyển vị và lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Nghiệm giải tích thu được bằng phương pháp Bubnov-Galerkin cùng với chương trình tính tự viết trên nền Matlab được kiểm chứng với các kết quả đã công bố cho thấy đủ tin cậy. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước hình học, hệ số nền đàn hồi, tải trọng uốn và điều kiện biên đến độ võng, đường cong tải - độ võng và mô men uốn nội lực trong tấm đã được chỉ ra chi tiết qua các ví dụ số. Các nhận xét rút ra là nguồn tham khảo hữu ích cho công tác tính toán, thiết kế và bảo trì các cấu kiện công trình sử dụng vật liệu FGM xếp.

## Lời cảm ơn

Tác giả chân thành cảm ơn sự hỗ trợ tài chính của đề tài khoa học và công nghệ cấp Bộ “Nghiên cứu giải pháp ứng dụng vật liệu thông minh, thân thiện môi trường trong kết cấu công trình thích ứng bối cảnh cuộc cách mạng công nghiệp 4.0”, mã số CT.2019.03.04.

## Tài liệu tham khảo

- [1] Smith, B. H., Szyniszewski, S., Hajjar, J. F., Schafer, B. W., Arwade, S. R. (2012). [Steel foam for structures: A review of applications, manufacturing and material properties](#). *Journal of Constructional Steel Research*, 71:1–10.
- [2] Ashby, M. F., Evans, T., Fleck, N. A., Hutchinson, J. W., Wadley, H. N. G., Gibson, L. J. (2000). *Metal foams: a design guide*. Elsevier.
- [3] Banhart, J. (2001). [Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams](#). *Progress in Materials Science*, 46(6):559–632.
- [4] Magnucki, K., Malinowski, M., Kasprzak, J. (2006). [Bending and buckling of a rectangular porous plate](#). *Steel and Composite Structures*, 6(4):319–333.

- [5] Jabbari, M., Mojahedin, A., Khorshidvand, A. R., Eslami, M. R. (2014). [Buckling analysis of a functionally graded thin circular plate made of saturated porous materials](#). *Journal of Engineering Mechanics*, 140(2):287–295.
- [6] Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S. (2015). [Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam](#). *Composite Structures*, 133:54–61.
- [7] Wang, Y., Wu, D. (2017). [Free vibration of functionally graded porous cylindrical shell using a sinusoidal shear deformation theory](#). *Aerospace Science and Technology*, 66:83–91.
- [8] Hải, L. V., Tú, T. M., Huỳnh, L. X. (2018). [Phân tích dao động riêng của tấm bằng vật liệu rỗng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD)-ĐHXD*, 12(7):9–19.
- [9] Long, N. V., Hường, N. T. (2020). [Phân tích ổn định kết cấu dầm vật liệu xốp chịu nén dọc trục với các điều kiện biên khác nhau](#). *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD)-ĐHXD*, 14(2V):97–106.
- [10] Ebrahimi, F., Dabbagh, A., Rastgoo, A. (2019). [Vibration analysis of porous metal foam shells rested on an elastic substrate](#). *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 54(3):199–208.
- [11] Praveen, G. N., Reddy, J. N. (1998). [Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates](#). *International Journal of Solids and Structures*, 35(33):4457–4476.
- [12] Zhao, X., Liew, K. M. (2009). [Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method](#). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(33-36): 2796–2811.
- [13] Yin, S., Yu, T., Bui, T. Q., Nguyen, M. N. (2015). [Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using isogeometric analysis](#). *Engineering Computations*.
- [14] Na, K.-S., Kim, J.-H. (2006). [Nonlinear bending response of functionally graded plates under thermal loads](#). *Journal of Thermal Stresses*, 29(3):245–261.
- [15] Tung, H. V., Duc, N. D. (2010). [Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads](#). *Composite Structures*, 92(5):1184–1191.
- [16] Thang, P.-T., Nguyen-Thoi, T., Lee, J. (2016). [Closed-form expression for nonlinear analysis of imperfect sigmoid-FGM plates with variable thickness resting on elastic medium](#). *Composite Structures*, 143:143–150.
- [17] Duc, N. D., Bich, D. H., Cong, P. H. (2016). [Nonlinear thermal dynamic response of shear deformable FGM plates on elastic foundations](#). *Journal of Thermal Stresses*, 39(3):278–297.
- [18] Woo, J., Meguid, S. A., Ong, L. S. (2006). [Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates](#). *Journal of Sound and Vibration*, 289(3):595–611.
- [19] Shen, H.-S. (2002). [Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 44(3):561–584.
- [20] Yang, J., Shen, H.-S. (2003). [Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions](#). *Composites Part B: Engineering*, 34(2):103–115.
- [21] Wu, T.-L., Shukla, K. K., Huang, J. H. (2007). [Post-buckling analysis of functionally graded rectangular plates](#). *Composite Structures*, 81(1):1–10.
- [22] Alinia, M. M., Ghannadpour, S. A. M. (2009). [Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates](#). *Composite Structures*, 88(3):354–359.
- [23] Duc, N. D., Quang, V. D., Nguyen, P. D., Chien, T. M. (2018). [Nonlinear dynamic response of functionally graded porous plates on elastic foundation subjected to thermal and mechanical loads](#). *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 4(4):245–259.
- [24] Tú, T. M., Hoa, L. K., Hung, D. X., Hải, L. T. (2020). [Nonlinear buckling and post-buckling analysis of imperfect porous plates under mechanical loads](#). *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 22(6): 1910–1930.
- [25] Cong, P. H., Chien, T. M., Khoa, N. D., Duc, N. D. (2018). [Nonlinear thermomechanical buckling and post-buckling response of porous FGM plates using Reddy's HSDT](#). *Aerospace Science and Technology*, 77:419–428.
- [26] Phung-Van, P., Thai, C. H., Ferreira, A. J. M., Rabczuk, T. (2020). [Isogeometric nonlinear transient analysis of porous FGM plates subjected to hygro-thermo-mechanical loads](#). *Thin-Walled Structures*,

148:106497.

- [27] Zhang, D.-G., Zhou, Y.-H. (2008). [A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface](#). *Computational Materials Science*, 44(2):716–720.
- [28] Bellifa, H., Benrahou, K. H., Hadji, L., Houari, M. S. A., Tounsi, A. (2016). Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 38(1):265–275.
- [29] Liu, Y., Su, S., Huang, H., Liang, Y. (2019). [Thermal-mechanical coupling buckling analysis of porous functionally graded sandwich beams based on physical neutral plane](#). *Composites Part B: Engineering*, 168:236–242.
- [30] Phuong, N. T. B., Tu, T. M., Phuong, H. T., Van Long, N. (2019). [Bending analysis of functionally graded beam with porosities resting on elastic foundation based on neutral surface position](#). *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE)-NUCE*, 13(1):33–45.
- [31] Xu, T. F., Xing, Y. F. (2016). [Closed-form solutions for free vibration of rectangular FGM thin plates resting on elastic foundation](#). *Acta Mechanica Sinica*, 32(6):1088–1103.
- [32] Zenkour, A. M., Radwan, A. F. (2019). [Bending response of FG plates resting on elastic foundations in hygrothermal environment with porosities](#). *Composite Structures*, 213:133–143.
- [33] Zaoui, F. Z., Ouinas, D., Tounsi, A. (2019). [New 2D and quasi-3D shear deformation theories for free vibration of functionally graded plates on elastic foundations](#). *Composites Part B: Engineering*, 159: 231–247.
- [34] Benferhat, R., Daoudji, T. H., Mansour, M. S., Hadji, L. (2016). [Effect of porosity on the bending and free vibration response of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak foundations](#). *Earthquakes and Structures*, 10(6):1429–1449.
- [35] Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S. (2016). [Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 108:14–22.
- [36] Barati, M. R., Zenkour, A. M. (2017). [Investigating post-buckling of geometrically imperfect metal foam nanobeams with symmetric and asymmetric porosity distributions](#). *Composite Structures*, 182:91–98.
- [37] Larbi, L. O., Kaci, A., Houari, M. S. A., Tounsi, A. (2013). [An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams](#). *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41(4):421–433.
- [38] Reddy, J. N. (2006). *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC Press.
- [39] Reddy, J. N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
- [40] Benatta, M. A., Kaci, A., Tounsi, A., Houari, M. S. A., Bakhti, K., Bedia, E. A. A. (2014). [Nonlinear bending analysis of functionally graded plates under pressure loads using a four variable refined plate theory](#). *International Journal of Computational Methods*, 11(04):1350062.
- [41] Sobhy, M. (2013). [Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions](#). *Composite Structures*, 99:76–87.
- [42] Meziane, M. A. A., Abdelaziz, H. H., Tounsi, A. (2014). [An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions](#). *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 16(3):293–318.
- [43] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2011). [A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation](#). *Composites Science and Technology*, 71(16):1850–1858.
- [44] Zenkour, A. M. (2009). [The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations](#). *International Journal of Mechanical Sciences*, 51(11-12):869–880.
- [45] Lei, X.-y., Huang, M.-K., Wang, X. (1990). [Geometrically nonlinear analysis of a Reissner type plate by the boundary element method](#). *Computers & Structures*, 37(6):911–916.
- [46] Azizian, Z. G., Dawe, D. J. (1985). [Geometrically nonlinear analysis of rectangular mindlin plates using the finite strip method](#). *Computers & Structures*, 21(3):423–436.
- [47] Long, N. V., Tú, T. M., Trang, V. T. T. (2020). [Phân tích phi tuyến ứng xử uốn của tấm bằng vật liệu FGM xếp đặt trên nền đàn hồi Pasternak với các điều kiện biên khác nhau có xét đến vị trí thực của mặt trung](#)

hòa. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCCND)-ĐHXD*, 14(4V):1–15.

- [48] Talha, M., Singh, B. N. (2011). **Nonlinear mechanical bending of functionally graded material plates under transverse loads with various boundary conditions.** *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*, 2(02):237–258.

**Phụ lục A. Các hàm số trong hệ phương trình (17)**

$$\begin{aligned}
 l_{mn}^{(11)}(x, y) &= A_{11}U'_{1m}U_{2n} + A_{66}U_{1m}U'_{2n}; l_{mn}^{(12)}(x, y) = (A_{12} + A_{66})V'_{1m}V'_{2n} \\
 h_{mnpq}^{(13)}(x, y) &= A_{11}X'_mY_nX'_pY'_q + A_{12}X_mY'_nX'_pY'_q + A_{66}(X'_mY_nX_pY''_q + X_mY'_pX'_pY'_q) \\
 l_{mn}^{(21)}(x, y) &= (A_{12} + A_{66})U'_{1m}U'_{2n}; l_{mn}^{(22)}(x, y) = A_{11}V_{1m}V'_{2n} + A_{66}V'_{1m}V_{2n} \\
 h_{mnpq}^{(23)}(x, y) &= A_{22}X_mY'_nX_pY''_q + A_{12}X'_mY_nX'_pY'_q + A_{66}(X'_mY_nX'_pY'_q + X_mY'_nX'_pY'_q) \\
 l_{mn}^{(33)}(x, y) &= A_{44}^sX_mY''_n + A_{55}^sX''_mY_n - K_wX_mY_n + K_{sx}X''_mY_n + K_{sy}X_mY''_n \\
 l_{mn}^{(34)}(x, y) &= A_{55}^sX''_mY_n; l_{mn}^{(35)}(x, y) = A_{44}^sX_mY''_n \\
 h_{mnpq}^{(31)}(x, y) &= A_{11}U'_{1m}U_{2n}X'_pY'_q + A_{12}U'_{1m}U_{2n}X_pY''_q + 2A_{66}U_{1m}U'_{2n}X'_pY'_q \\
 h_{mnpq}^{(32)}(x, y) &= A_{12}V_{1m}V'_{2n}X'_pY'_q + A_{11}V_{1m}V'_{2n}X_pY''_q + 2A_{66}V'_{1m}V_{2n}X'_pY'_q \\
 p_{mnpqrs}^{(33)}(x, y) &= \frac{1}{2}A_{11}X'_mY_nX'_pY'_qX''_rY'_s + \frac{1}{2}A_{12}X_mY'_nX_pY'_qX''_rY'_s + \frac{1}{2}A_{12}X'_mY_nX'_pY'_qX_rY''_s \\
 &\quad + \frac{1}{2}A_{11}X_mY'_nX_pY'_qX_rY''_s + 2A_{66}X'_mY_nX_pY'_qX''_rY'_s \\
 l_{mn}^{(43)}(x, y) &= -A_{55}^sX'_mY_n; l_{mn}^{(44)}(x, y) = C_{11}X'''_mY_n - A_{55}X'_mY_n + C_{66}X'_mY''_n \\
 l_{mn}^{(45)}(x, y) &= (C_{12} + C_{66})X'_mY''_n; l_{mn}^{(53)}(x, y) = -A_{44}^sX_mY'_n; l_{mn}^{(54)}(x, y) = (C_{12} + C_{66})X''_mY'_n \\
 l_{mn}^{(55)}(x, y) &= C_{66}X''_mY'_n + C_{22}X_mY'''_n - A_{44}^sX_mY'_n
 \end{aligned}$$

**Phụ lục B. Các hệ số trong công thức (18)**

$$\begin{aligned}
 \{L_{mni}^{(11)}, L_{mni}^{(12)}, H_{mnpqij}^{(13)}\} &= \int_0^a \int_0^b \{l_{mn}^{(11)}, l_{mn}^{(12)}, h_{mnpq}^{(13)}\} U_{1i}U_{2j}dxdy \\
 \{L_{mni}^{(21)}, L_{mni}^{(22)}, H_{mnpqij}^{(23)}\} &= \int_0^a \int_0^b \{l_{mn}^{(21)}, l_{mn}^{(22)}, h_{mnpq}^{(23)}\} V_{1i}V_{2j}dxdy \\
 \{L_{mni}^{(33)}, L_{mni}^{(34)}, L_{mni}^{(35)}, H_{mnpqij}^{(31)}, H_{mnpqij}^{(32)}, P_{mnpqrsij}^{(33)}\} &= \int_0^a \int_0^b \{l_{mn}^{(33)}, l_{mn}^{(34)}, l_{mn}^{(35)}, h_{mnpq}^{(31)}, h_{mnpq}^{(32)}, p_{mnpqrs}^{(33)}\} X_iY_jdxdy \\
 F_{ij} &= \int_0^a \int_0^b qX_iY_jdxdy \\
 \{L_{mni}^{(43)}, L_{mni}^{(44)}, L_{mni}^{(45)}\} &= \int_0^a \int_0^b \{l_{mn}^{(43)}, l_{mn}^{(44)}, h_{mnpq}^{(43)}, l_{mn}^{(44)}, l_{mn}^{(45)}\} X'_iY_jdxdy \\
 \{L_{mni}^{(53)}, L_{mni}^{(54)}, L_{mni}^{(55)}\} &= \int_0^a \int_0^b \{l_{mn}^{(53)}, l_{mn}^{(54)}, h_{mnpq}^{(53)}, l_{mn}^{(53)}, l_{mn}^{(54)}, l_{mn}^{(55)}\} X_iY_jdxdy
 \end{aligned}$$