

TUYỂN TẬP CÔNG TRÌNH KHOA HỌC **HỘI NGHỊ CƠ HỌC KỸ THUẬT TOÀN QUỐC**

Kỷ niệm 40 năm thành lập Viện Cơ học

Hà Nội, 09/04/2019

Tập 1. Cơ học Vật rắn

Cơ học Đất, Đá và Môi trường rời

Cơ học Tính toán



VIỆN CƠ HỌC

HỘI CƠ HỌC VIỆT NAM

**Tuyển tập công trình khoa học
Hội nghị Cơ học Kỹ thuật toàn quốc
Kỷ niệm 40 năm thành lập Viện Cơ học**

Hà Nội, 09/4/2019

**Tập 1. Cơ học Vật rắn
Cơ học Đất, Đá và Môi trường rời
Cơ học Tính toán**

HÀ NỘI, 2019

**Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học Kỹ thuật toàn quốc
Kỷ niệm 40 năm thành lập Viện Cơ học
Hà Nội, 09/4/2019**

**Tập 1. Cơ học Vật rắn
Cơ học Đất, Đá và Môi trường rời
Cơ học Tính toán**

© 2019 Nhà xuất bản Khoa học tự nhiên và Công nghệ

Không phần nào trong xuất bản phẩm này được phép sao chép hay phát hành dưới bất kỳ hình thức hoặc phương tiện nào mà không có sự cho phép trước bằng văn bản của cơ quan chủ quản.

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ

Trụ sở: Nhà A16, số 18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội.

Điện thoại: 024 22149040 Fax: 024 37910147

Website: <http://vap.ac.vn/>

BAN CHỈ ĐẠO HỘI NGHỊ

Nguyễn Tiến Khiêm

Đình Văn Mạnh

BAN KHOA HỌC

Trưởng ban: Nguyễn Đông Anh

Đông Phó Trưởng ban: Phạm Đức Chính, Nguyễn Việt Khoa

Các Ủy viên: Đặng Thế Ba, Đào Huy Bích, Lương Xuân Bính, Lê Văn Cảnh, Nguyễn Trường Giang, Trần Thu Hà, Dương Ngọc Hải, Vũ Công Hàm, Hà Ngọc Hiến, Hoàng Văn Huân, Nguyễn Xuân Hùng, Nguyễn Văn Khang, Phan Bùi Khôi, Nguyễn Đình Kiên, Đặng Bảo Lâm, Trần Văn Liên, Đào Như Mai, Nguyễn Thế Mịch, Lê Kỳ Nam, Đình Văn Phong, Phạm Hồng Phúc, Lê Quang, Vũ Duy Quang, Lê Minh Quý, Đỗ Sanh, Đỗ Trần Thắng, Nguyễn Tất Thắng, Đặng Ngọc Thanh, Trần Ích Thịnh, Nguyễn Xuân Toàn, Đỗ Như Tráng, Bùi Đình Trí, Lê Thiết Trung, Phạm Anh Tuấn, Hoàng Văn Tùng, Nguyễn Trung Việt, Phạm Chí Vĩnh.

BAN TỔ CHỨC

Đông Trưởng ban: Lã Đức Việt, Trần Văn Liên

Các Ủy viên: Lê Văn Cảnh, Nguyễn Tiến Cường, Nguyễn Phong Điền, Phạm Thị Minh Hạnh, Đặng Bảo Lâm, Nguyễn Thị Việt Liên, Đào Như Mai, Phạm Quốc Tuấn.

BAN THƯ KÝ

Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Phạm Thị Minh Hạnh, Ngô Thị Hồng Huệ, Dương Thanh Hương, Nguyễn Thị Việt Liên, Đào Như Mai, Phạm Thị Bích Ngọc, Trần Thị Thơm.

BAN BIÊN TẬP

Tổng biên tập: Nguyễn Tiến Khiêm, Đình Văn Mạnh

Các Trưởng ban: Nguyễn Xuân Hùng, Trần Ích Thịnh, Đỗ Như Tráng (Tập 1); Hoàng Văn Huân, Nguyễn Văn Khang, Phan Bùi Khôi (Tập 2).

Ban Biên tập (Tập 1): Nguyễn Xuân Hùng, Trần Ích Thịnh, Đỗ Như Tráng (Đông Trưởng ban), Lê Văn Cảnh, Đào Như Mai, Phạm Quốc Tuấn (Thư ký), Phạm Đức Chính, Phạm Tiến Đạt, Nguyễn Châu Lân, Trần Văn Liên, Nguyễn Sỹ Ngọc, Lê Minh Quý, Nguyễn Hoài Sơn, Trương Tích Thiện, Lê Thiết Trung, Trần Minh Tú.

Do Van Thom, Doan Hong Duc, Nguyen Dinh Duc and Nguyen Xuan Nguyen	
Free vibration analysis of cracked porous FGM plate based on phase - field theory and finite element method	402
Tran Thi Thom, Pham Vu Nam, and Nguyen Dinh Kien	
Vibration of an inclined FGSW beam traveled by a moving mass based on a first - order shear deformable moving mass element	409
Nguyễn Thị Thanh Thúy	
Tính toán lực động đất tác dụng lên kết cấu khung bê tông cốt thép áp dụng phương pháp N2	417
Đinh Đức Tiến, Phạm Ngọc Thành, Nguyễn Văn Đạt và Trần Ích Thịnh	
Xác định độ cứng uốn biểu kiến của tấm composite sandwich bằng phương pháp số và ứng dụng trong bài toán truyền âm	424
Nguyen Ngoc Tinh	
Simulation of forces on building during tornadoes	432
Nguyễn Vương Trí và Trương Tích Thiện	
Sử dụng lý thuyết tấm Shimpi và phương pháp không lưới để phân tích ứng xử cơ học của tấm composite	440
VanTrung Ngo, Haidang Phan and DucTho Le	
Solutions of Rayleigh waves and Lamb waves generated by a time - harmonic load in orthotropic media	448
Trần Minh Tú, Nguyễn Văn Long, Lê Xuân Huỳnh và Lê Thanh Hải	
Phân tích tĩnh tấm vật liệu xốp đặt trên nền đàn hồi Pasternak với các điều kiện biên khác nhau	455
Trần Anh Tuấn và Nguyễn Đình Hải	
Điều kiện trượt có hiệu của dòng Stokes trên bề mặt rãnh có mặt cắt dạng hình thang	463
Lo Siu Vay, Nguyen Thanh Nha, Nguyen Ngoc Minh and Truong Tich Thien	
Static and dynamic analysis using the Material Point Method	469
Le Quang Vinh, Nguyen Manh Cuong and Nguyen Dong Anh	
Continuous Element formulations for functionally graded cylindrical shells resting on elastic foundation	477
Le Quang Vinh, Nguyen Manh Cuong and Nguyen Dong Anh	
Dynamic analysis of functionally graded conical shells via Continuous Element Method	485
Pham Van Vinh and Do Van Thom	
A new bending beam element based on deformation modes	493

Phân tích tĩnh tấm vật liệu xốp đặt trên nền đàn hồi Pasternak với các điều kiện biên khác nhau

Trần Minh Tú¹, Nguyễn Văn Long², Lê Xuân Huỳnh¹ và Lê Thanh Hải³

¹ Trường Đại học Xây dựng, 55 Đường Giải phóng, Hà Nội

² Trường Cao đẳng Xây dựng số 1, Trung Văn, Nam Từ Liêm, Hà Nội

³ Trường Đại học Vinh, 182 Đường Lê Duẩn, Thành phố Vinh, Nghệ An

*Email: tpnt2002@yahoo.com

Tóm tắt: Bài báo sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để phân tích trạng thái ứng suất, biến dạng trong tấm sử dụng vật liệu xốp đặt trên nền đàn hồi Pasternak, chịu uốn dưới tác dụng của tải trọng phân bố vuông góc với bề mặt tấm. Mô hình vật liệu xốp với ba loại phân bố lỗ rỗng: đều, đối xứng, bất đối xứng được sử dụng. Bằng việc sử dụng phương pháp Bubnov- Galerkin, lời giải giải tích đã được thiết lập với các điều kiện biên khác nhau. Ví dụ kiểm chứng đã được thực hiện qua so sánh với các công bố của các tác giả khác với vật liệu đẳng hướng và điều kiện biên Navier, Levy. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước hình học, các tham số nền đàn hồi và điều kiện biên đến độ võng và các thành phần ứng suất trong tấm được khảo sát cụ thể qua các ví dụ số.

Từ khóa: Tấm vật liệu xốp, lời giải giải tích, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, điều kiện biên

1. Mở đầu

Việc tìm kiếm, nghiên cứu ứng dụng các loại vật liệu mới dần thay thế các loại vật liệu truyền thống trong các lĩnh vực của nền kinh tế quốc dân là xu thế của thời đại ngày nay. Các kết cấu nhẹ sử dụng vật liệu xốp (porous material) như bọt kim loại (metal foam) được sử dụng rộng rãi trong nhiều ngành công nghiệp như: hàng không, ô tô, đóng tàu, xây dựng dân dụng, ... Ở vật liệu xốp, các lỗ rỗng (porosity) phân bố theo một phương nhất định trong kết cấu tạo nên sự thay đổi tron và liên tục các đặc trưng cơ học của vật liệu. Loại vật liệu này vì thế có trọng lượng nhẹ, có khả năng hấp thụ năng lượng tốt, thường được sử dụng để chế tạo kết cấu sandwich, tấm tường, sàn cách âm, cách nhiệt.

Do sở hữu nhiều đặc tính nổi trội như vậy nên các kết cấu sử dụng vật liệu xốp nói chung và tấm bằng vật liệu xốp nói riêng ngày càng thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học trong và ngoài nước. Ứng xử tĩnh và động của kết cấu tấm sử dụng vật liệu xốp đã được khảo sát bởi nhiều tác giả. Thang P. T. và cộng sự [16] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất nghiên cứu ổn định đàn hồi và dao động riêng của tấm vật liệu xốp với phân bố các bọt rỗng là đều và không đều. Lời giải chính xác trong phân tích dao động tự do của tấm dày làm bằng vật liệu xốp được Rezaei và Saidi trình bày trong [11]. Arani và cộng sự [2] nghiên cứu dao động tự do của tấm chữ nhật làm bằng vật liệu rỗng trên nền Winkler theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy, tần số dao động xác định bằng phương pháp DQM (differential quadrature method). Rezaei và cộng sự [12] phân tích dao động tự do của tấm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên-FGM (Functionally Graded Material) có bọt rỗng phân bố đều và không đều trên cơ sở lý thuyết tấm với bốn ẩn số chuyển vị. Ảnh hưởng của vi bọt rỗng đến ứng xử uốn và dao động riêng của tấm FGM được Akbas khảo sát trong [1].

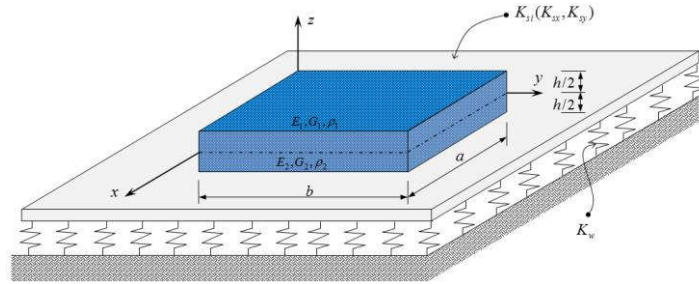
Các nghiên cứu trên đây đều với đối tượng là tấm chữ nhật vật liệu xốp liên kết khớp trên chu vi. Với tấm bằng vật liệu xốp chịu điều kiện biên bất kỳ đã được một số tác giả nghiên cứu, chẳng hạn Chen, Yang và Kitipornchai phân tích ổn định và dao động riêng của tấm vật liệu xốp bằng phương pháp Chebyshev-Ritz. Zhao và cộng sự [18] trình bày lời giải ba chiều chính xác cho tấm dày FGM có vi bọt rỗng với các điều kiện biên đàn hồi bất kỳ. Zhao và cộng sự [19] sau đó đã sử dụng phương pháp chuỗi Fourier cải tiến để phân tích dao động riêng của tấm vật liệu xốp chịu liên kết đàn hồi trên các cạnh. Pradhan và Chakraverty [8] dùng phương pháp Rayleigh-Ritz và lý thuyết tấm mỏng phân

tích tĩnh tâm FGM với các điều kiện biên khác nhau. Demirhan và Taskin [5] phân tích uốn và dao động riêng tâm FGM có vi bọt rỗng với điều kiện biên Levy.

Có thể thấy rằng các nghiên cứu về tấm vật liệu xốp với các điều kiện biên khác nhau mới dừng lại ở các bài toán phân tích dao động và ổn định. Do vậy, mục đích của bài báo là sử dụng phương pháp Galerkin phân tích ứng xử tĩnh của tấm bằng vật liệu xốp với các điều kiện biên khác nhau. Ảnh hưởng của ba loại phân bố lỗ rỗng: đều, đối xứng và bất đối xứng, hệ số mật độ lỗ rỗng, điều kiện biên và các tham số kích thước tấm đến độ võng và các thành phần ứng suất sẽ được khảo sát.

2. Mô hình tấm bằng vật liệu xốp

Xét tấm chữ nhật bằng vật liệu xốp có chiều dày h , kích thước theo phương các trục x, y là a (chiều dài), b (chiều rộng). Tấm được đặt trên nền đàn hồi Pasternak (Hình 1) với các hệ số nền: K_w - hệ số độ cứng uốn (Winkler stiffness), K_{si} ($i = x, y$) - hệ số độ cứng cắt (shear stiffness).



Hình 1. Mô hình tấm chữ nhật xốp trên nền đàn hồi

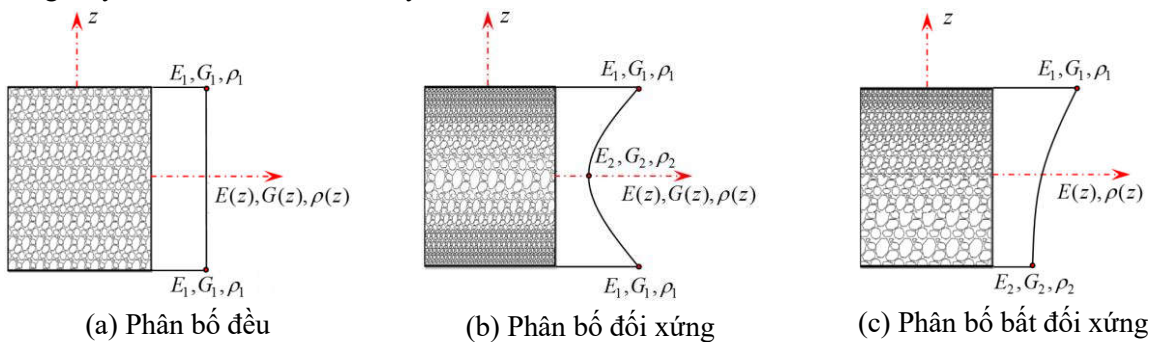
Các hằng số vật liệu biến thiên liên tục theo chiều dày tấm, phụ thuộc vào mật độ phân bố lỗ rỗng [3, 4]:

$$\text{Phân bố đều: } \{E(z), G(z)\} = \{E_1, G_1\}(1 - e_0\chi); \quad \rho = \rho_1\sqrt{1 - e_0\chi}; \quad \chi = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2; \quad (1)$$

$$\text{Phân bố đối xứng: } \{E(z), G(z)\} = \{E_1, G_1\} \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right]; \quad \rho(z) = \rho_1 \left[1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right]; \quad (2)$$

$$\text{Phân bố bất đối xứng: } \{E(z), G(z)\} = \{E_1, G_1\} \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right]; \quad \rho(z) = \rho_1 \left[1 - e_m \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right]; \quad (3)$$

trong đó E_1, G_1, ρ_1 lần lượt là các giá trị lớn nhất của mô đun đàn hồi kéo - nén, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng; E_2, G_2, ρ_2 là các giá trị nhỏ nhất tương ứng. Hệ số Poisson được coi là không thay đổi theo tọa độ chiều dày.



Hình 2. Tấm bằng vật liệu rỗng với các hàm mật độ phân bố lỗ rỗng khác nhau

Các hệ số mật độ lỗ rỗng e_0, e_m được tính theo:

$$e_0 = 1 - \frac{E_1}{E_2} = 1 - \frac{G_1}{G_2}; \quad e_m = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \sqrt{1 - e_0}. \quad (4)$$

3. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất Reissner - Mindlin

Theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất-FSDT (First-order Shear Deformation Theory), các thành phần chuyển vị u, v, w của điểm bất kỳ có tọa độ (x, y, z) trong không gian tấm [9]:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_x(x, y); \quad v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\theta_y(x, y); \quad w(x, y, z) = w_0(x, y); \quad (5)$$

trong đó: u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình.

Các thành phần biến dạng tuyến tính nhận được từ quan hệ biến dạng - chuyển vị:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} + z\theta_{x,x} \\ v_{0,y} + z\theta_{y,y} \\ (u_{0,y} + v_{0,x}) + z(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,x} + u_{,z} \\ w_{,y} + v_{,z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{0,x} + \theta_x \\ w_{0,y} + \theta_y \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Dấu (,) đi kèm các thành phần chuyển vị chỉ đạo hàm riêng theo biến tương ứng.

Vật liệu xốp được coi là đàn hồi tuyến tính, các thành phần ứng suất được xác định từ định luật Hooke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}; \quad (7)$$

$$\text{trong đó: } Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}.$$

Tích phân các thành phần ứng suất theo chiều dày của tấm ta nhận được các thành phần nội lực:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz; \quad \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = k_s \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz; \quad (8)$$

với k_s là hệ số hiệu chỉnh cắt (trong phân tích này lấy $k_s = 5/6$).

Hệ phương trình cân bằng của tấm theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất có dạng [10]:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : N_{x,x} + N_{xy,y} = 0; \quad \delta v_0 : N_{xy,x} + N_{y,y} = 0; \quad \delta w_0 : Q_{xz,x} + Q_{yz,y} + f_e + q = 0; \\ \delta \theta_x : M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_{xz} = 0; \quad \delta \theta_y : M_{xy,x} + M_{y,y} - Q_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

trong đó, f_e là phân lực nền, được xác định bởi [6, 17]: $f_e = -K_w w_0 + K_{sx} w_{0,xx} + K_{sy} w_{0,yy}$.

Thay liên hệ giữa các thành phần nội lực và chuyển vị vào (9), ta được hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất:

$$\begin{aligned} A_{11}u_{0,xx} + A_{66}u_{0,yy} + (A_{12} + A_{66})v_{0,xy} + B_{11}\theta_{x,xx} + B_{66}\theta_{x,yy} + (B_{12} + B_{66})\theta_{y,xy} = 0; \\ (A_{21} + A_{66})u_{0,xy} + A_{22}v_{0,yy} + A_{66}v_{0,xx} + (B_{21} + B_{66})\theta_{x,xy} + B_{22}\theta_{y,yy} + B_{66}\theta_{y,xx} = 0; \\ A_{44}^s w_{0,yy} + A_{55}^s w_{0,xx} + A_{55}^s \theta_{x,x} + A_{44}^s \theta_{y,y} - K_w w_0 + K_{sx} w_{0,xx} + K_{sy} w_{0,yy} + q = 0; \\ B_{11}u_{0,xx} + B_{66}u_{0,yy} + (B_{12} + B_{66})v_{0,xy} + C_{11}\theta_{x,xx} + C_{66}\theta_{x,yy} + (C_{12} + C_{66})\theta_{y,xy} - A_{55}^s \theta_x - A_{55}^s w_{0,x} = 0; \\ (B_{66} + B_{21})u_{0,xy} + B_{66}v_{0,xx} + B_{22}v_{0,yy} + (C_{66} + C_{21})\theta_{x,xy} + C_{66}\theta_{y,xx} + C_{22}\theta_{y,yy} - A_{44}^s \theta_y - A_{44}^s w_{0,y} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

trong đó: $(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz$, $ij = 11, 12, 21, 22, 66$; $A_{ij}^s = k_s \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz$, $ij = 44, 55$.

4. Lờ giải giải tích

Lờ giải giải tích được thiết lập bằng việc sử dụng phương pháp Galerkin cho tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng với các điều kiện biên gồm các trường hợp sau:

- Liên kết ngàm 4 cạnh (CCCC):

$$\text{Tại } x = 0, a \text{ và } y = b: u_0 = v_0 = w_0 = \theta_x = \theta_y = 0. \quad (11a)$$

- Liên kết khớp 4 cạnh (SSSS):

$$\text{Tại } x = 0, a: v_0 = 0, w_0 = 0, \theta_y = 0, N_x = 0, M_x = 0; \quad (11b)$$

$$\text{Tại } y = 0, b: u_0 = 0, w_0 = 0, \theta_x = 0, N_y = 0, M_y = 0.$$

- Liên kết đối xứng ngàm 2 cạnh, khớp 2 cạnh (SCSC):

$$\text{Tại } x = 0, a: u_0 = v_0 = w_0 = \theta_x = \theta_y = 0; \quad (11c)$$

$$\text{Tại } y = 0, b: u_0 = 0, w_0 = 0, \theta_x = 0, N_y = 0, M_y = 0.$$

Với các điều kiện biên đã nêu ta chọn nghiệm chuyển vị dưới dạng các khai triển:

$$u_0 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N u_{0mn} X'_m Y'_n; \quad v_0 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N v_{0mn} X_m Y'_n; \quad w_0 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{0mn} X_m Y_n; \quad (12)$$

$$\theta_x = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \theta_{xmn} X'_m Y'_n; \quad \theta_y = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \theta_{ymn} X_m Y'_n.$$

trong đó: $u_{0mn}, v_{0mn}, w_{0mn}, \theta_{xmn}, \theta_{ymn}$ là các hệ số cần xác định.

Các hàm $X_m(x)$, $Y_n(y)$ phải đảm bảo liên tục, thỏa mãn điều kiện biên và độc lập tuyến tính. Bảng 1 là các hàm dạng $X_m(x)$ và $Y_n(y)$ áp dụng cho 3 điều kiện biên SSSS, SCSC và CCCC.

Bảng 1. Các hàm dạng $X_m(x)$ và $Y_n(y)$ sử dụng trong khai triển [7, 13]

Điều kiện biên	Tại $x = 0, a$	Tại $y = 0, b$	$X_m(x)$	$Y_n(y)$
SSSS	$X_m = X''_m = 0$	$Y_n = Y''_n = 0$	$\sin(m\pi x/a)$	$\sin(n\pi y/b)$
SCSC	$X_m = X'_m = 0$	$Y_n = Y''_n = 0$	$\sin^2(m\pi x/a)$	$\sin(n\pi y/b)$
CCCC	$X_m = X'_m = 0$	$Y_n = Y'_n = 0$	$\sin^2(m\pi x/a)$	$\sin^2(n\pi y/b)$

Thay (12) vào (10) rồi nhân các biểu thức trong phương trình thu được với các hàm riêng tương ứng và thực hiện tích phân trên toàn bộ miền của tấm, hệ phương trình thu được có dạng:

$$\begin{bmatrix} [K_{u_0 u_0}]_{M \times N} & [K_{u_0 v_0}]_{M \times N} & [0]_{M \times N} & [K_{u_0 \theta_x}]_{M \times N} & [K_{u_0 \theta_y}]_{M \times N} \\ [K_{v_0 u_0}]_{M \times N} & [K_{v_0 v_0}]_{M \times N} & [0]_{M \times N} & [K_{v_0 \theta_x}]_{M \times N} & [K_{v_0 \theta_y}]_{M \times N} \\ [0]_{M \times N} & [0]_{M \times N} & [K_{w_0 w_0}]_{M \times N} & [K_{w_0 \theta_x}]_{M \times N} & [K_{w_0 \theta_y}]_{M \times N} \\ [K_{\theta_x u_0}]_{M \times N} & [K_{\theta_x v_0}]_{M \times N} & [K_{\theta_x w_0}]_{M \times N} & [K_{\theta_x \theta_x}]_{M \times N} & [K_{\theta_x \theta_y}]_{M \times N} \\ [K_{\theta_y u_0}]_{M \times N} & [K_{\theta_y v_0}]_{M \times N} & [K_{\theta_y w_0}]_{M \times N} & [K_{\theta_y \theta_x}]_{M \times N} & [K_{\theta_y \theta_y}]_{M \times N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_0\}_{(M \times N) \times 1} \\ \{v_0\}_{(M \times N) \times 1} \\ \{w_0\}_{(M \times N) \times 1} \\ \{\theta_x\}_{(M \times N) \times 1} \\ \{\theta_y\}_{(M \times N) \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\}_{(M \times N) \times 1} \\ \{0\}_{(M \times N) \times 1} \\ \{F_{w_0}\}_{(M \times N) \times 1} \\ \{0\}_{(M \times N) \times 1} \\ \{0\}_{(M \times N) \times 1} \end{Bmatrix} \quad (13a)$$

Hay dưới dạng ma trận thu gọn:

$$[K]_{(MxNx5)x(MxNx5)} \{Q\}_{(MxNx5)x1} = \{F\}_{(MxNx5)x1}; \quad (13b)$$

trong đó: $K_{u_0u_0}^{ijmn} = A_{11}e_{3010}^{ijmn} + A_{66}e_{1210}^{ijmn}$; $K_{u_0v_0}^{ijmn} = (A_{12} + A_{66})e_{1210}^{ijmn}$; $K_{u_0\theta_x}^{ijmn} = B_{11}e_{3010}^{ijmn} + B_{66}e_{1210}^{ijmn}$;
 $K_{u_0\theta_y}^{ijmn} = (B_{12} + B_{66})e_{1210}^{ijmn}$; $K_{v_0u_0}^{ijmn} = (A_{21} + A_{66})e_{2101}^{ijmn}$; $K_{v_0v_0}^{ijmn} = A_{22}e_{0301}^{ijmn} + A_{66}e_{2101}^{ijmn}$; $K_{v_0\theta_x}^{ijmn} = (B_{21} + B_{66})e_{2101}^{ijmn}$;
 $K_{v_0\theta_y}^{ijmn} = B_{22}e_{0301}^{ijmn} + B_{66}e_{2101}^{ijmn}$; $K_{w_0w_0}^{ijmn} = A_{44}e_{0200}^{ijmn} + A_{55}e_{2000}^{ijmn} - K_w e_{0000}^{ijmn} + K_{sx}e_{2000}^{ijmn} + K_{sy}e_{0200}^{ijmn}$; $K_{w_0\theta_x}^{ijmn} = A_{55}e_{2000}^{ijmn}$;
 $K_{w_0\theta_y}^{ijmn} = A_{44}e_{0200}^{ijmn}$; $K_{\theta_x u_0}^{ijmn} = B_{11}e_{3010}^{ijmn} + B_{66}e_{1210}^{ijmn}$; $K_{\theta_x v_0}^{ijmn} = (B_{12} + B_{66})e_{1210}^{ijmn}$; $K_{\theta_x w_0}^{ijmn} = -A_{55}e_{1010}^{ijmn}$;
 $K_{\theta_y u_0}^{ijmn} = C_{11}e_{3010}^{ijmn} + C_{66}e_{1210}^{ijmn} - A_{55}e_{1010}^{ijmn}$; $K_{\theta_y v_0}^{ijmn} = (C_{12} + C_{66})e_{1210}^{ijmn}$; $K_{\theta_y u_0}^{ijmn} = (B_{66} + B_{21})e_{2101}^{ijmn}$;
 $K_{\theta_y v_0}^{ijmn} = B_{66}e_{2101}^{ijmn} + B_{22}e_{0301}^{ijmn}$; $K_{\theta_y w_0}^{ijmn} = -A_{44}e_{0101}^{ijmn}$; $K_{\theta_y \theta_x}^{ijmn} = (C_{66} + C_{21})e_{2101}^{ijmn}$;
 $K_{\theta_y \theta_y}^{ijmn} = C_{66}e_{2101}^{ijmn} + C_{22}e_{0301}^{ijmn} - A_{44}e_{0101}^{ijmn}$; $F_{w_0}^{ij} = qe_{00}^{ij}$;

với: $\{e_{1010}^{ijmn}, e_{1210}^{ijmn}, e_{3010}^{ijmn}\} = \int_0^a \int_0^b \{X'_m Y_n, X'_m Y'_n, X''_m Y_n\} X'_i Y_j dx dy$; $\{e_{0101}^{ijmn}, e_{2101}^{ijmn}, e_{0301}^{ijmn}\} = \int_0^a \int_0^b \{X_m Y_n, X''_m Y'_n, X'_m Y''_n\} X_i Y'_j dx dy$;
 $\{e_{00}^{ij}, e_{0000}^{ijmn}, e_{0200}^{ijmn}, e_{2000}^{ijmn}\} = \int_0^a \int_0^b \{1, X_m Y_n, X_m Y''_n, X''_m Y_n\} X_i Y_j dx dy$.

Nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính (13) là véc tơ chuyển vị $\{Q_{mn}\}$; từ đó xác định được các phân chuyển vị, biến dạng, ứng suất, nội lực của bài toán phân tích tĩnh.

5. Kết quả số và thảo luận

Với nghiệm giải tích đã thiết lập ở phần trên, chương trình tính bằng trên nền Matlab được viết để thực hiện các ví dụ số. Trong các tính toán các công thức không thứ nguyên được sử dụng có dạng sau đây [14, 17]:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{10^2 D_0}{q_0 a^4} u\left(0, \frac{b}{2}, \frac{-h}{2}\right); \bar{v} = \frac{10^2 D_0}{q_0 a^4} v\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{-h}{2}\right); \bar{w} = \frac{10^2 D_0}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right); \hat{w} = \frac{10 E_1 h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right); \\ \bar{\sigma}_x &= -\frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{-h}{2}\right); \bar{\sigma}_y = -\frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{-h}{2}\right); \bar{\sigma}_{xy} = \frac{h^2}{q_0 a^2} \sigma_{xy}\left(0, 0, \frac{-h}{2}\right); \\ \bar{\sigma}_{xz} &= -\frac{1}{q_0} \sigma_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right); D_0 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu^2)}; E_0 = 1.0 \text{GPa}; K_0 = \frac{K_w a^4}{E_0 h^3}; J_0 = \frac{K_{sx} a^2}{E_0 h^3 \nu} = \frac{K_{sy} b^2}{E_0 h^3 \nu}. \end{aligned} \quad (14)$$

Ví dụ 1. Kiểm chứng chuyển vị và ứng suất của tấm chữ nhật đẳng hướng liên kết khớp 4 cạnh (SSSS).

Xét tấm chữ nhật đẳng hướng ($e_0 = 0$; $\nu = 0,3$; $a/h = 10$; $b/a = 3$) đặt trên nền đàn hồi, dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều $q = q_0 = -10^4$ Pa.

Bảng 2. Kiểm chứng chuyển vị và ứng suất của tấm chữ nhật đẳng hướng liên kết khớp 4 cạnh

K_0	J_0	Nguồn	\bar{u}	\bar{v}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\sigma}_{xy}$
0	0	Thai và Choi [14]	0,1971	0,1022	1,2583	0,7160	0,2447	0,2890
		Bài báo	0,1960	0,1005	1,2590	0,7146	0,2471	0,2783
100	0	Thai và Choi [14]	0,1922	0,1003	1,226	0,6969	0,2375	0,2840
		Bài báo	0,1911	0,0986	1,2266	0,6955	0,2399	0,2733
100	100	Thai và Choi [14]	0,1787	0,0951	1,1382	0,6452	0,2183	0,2700
		Bài báo	0,1777	0,0934	1,1388	0,6441	0,2208	0,2594

Bảng 2 trình bày các kết quả số của các thành phần chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên của với các giá trị khác nhau của tham số nền (K_0, J_0). Các kết quả tính toán của bài báo được so sánh với kết quả của Thai và Choi [14] sử dụng lời giải giải tích (dạng nghiệm Navier và Levy) dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao cải tiến 4 ẩn số chuyển vị. Có thể thấy rằng nghiệm giải tích đã xây dựng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất cho kết quả phù hợp với kết quả của Thai và Choi với tất cả các cặp tham số nền.

Ví dụ 2. Kiểm chứng độ võng của tấm chữ nhật đẳng hướng với các điều kiện biên khác nhau.

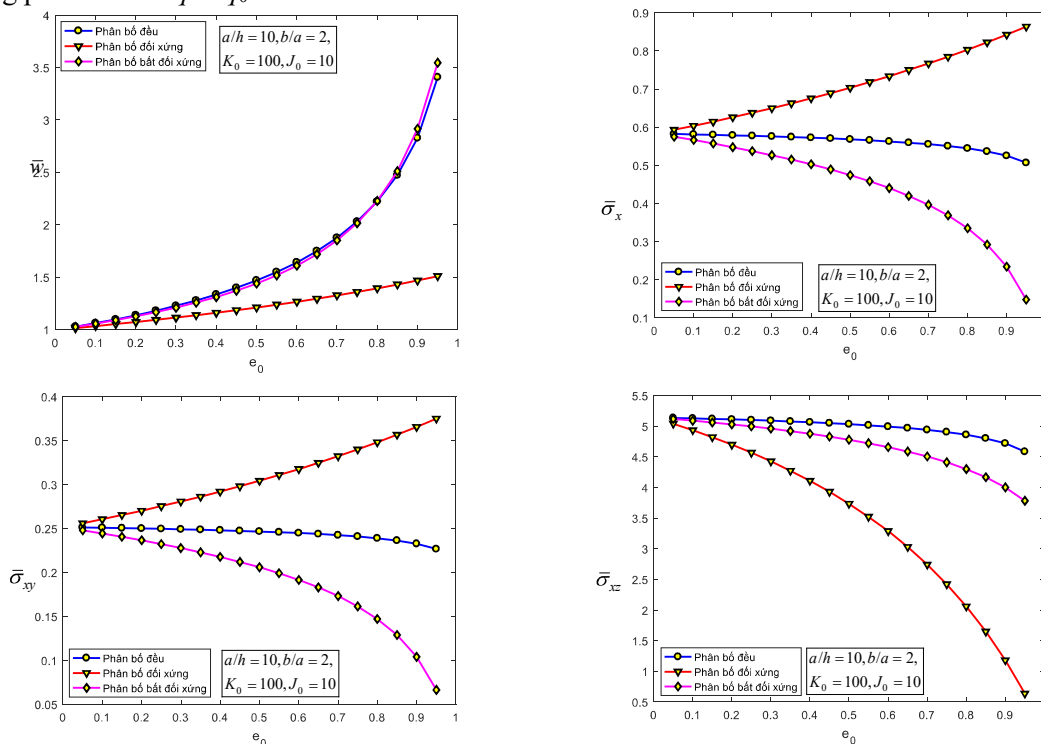
Bảng 3 là độ võng không thứ nguyên \hat{w} của tấm vuông bằng vật liệu đẳng hướng ($e_0 = 0$) chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều $q = q_0 = -10^4$ Pa với các dạng điều kiện biên CCCC, SCSC, SSSS, tính toán với tỷ số kích thước tấm $a/h = 5; 10; 20$. Các kết quả của bài báo được so sánh với các kết quả của Thai và Choi [15] sử dụng phương pháp phân tử hữu hạn sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao cải tiến 4 ẩn số chuyển vị và dạng hàm đa thức. Có thể thấy rằng, với cả 3 trường hợp điều kiện biên và 3 trường hợp tỷ số kích thước tấm, các kết quả của bài báo phù hợp với kết quả tính bằng phương pháp phân tử hữu hạn của Thai và Choi.

Bảng 3. Kiểm chứng độ võng \hat{w} của tấm chữ nhật đẳng hướng với các điều kiện biên khác nhau

Mô hình	$a/h = 5$			$a/h = 10$			$a/h = 20$		
	CCCC	SCSC	SSSS	CCCC	SCSC	SSSS	CCCC	SCSC	SSSS
Thai và Choi [15]	0,2356	0,3090	0,5381	0,1709	0,2424	0,4693	0,1546	0,2256	0,4521
Bài báo	0,2319	0,3242	0,5357	0,1626	0,2394	0,4666	0,1444	0,2170	0,4494

Ví dụ 3. Khảo sát ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng, tham số nền và tỷ số kích thước tấm

Xét tấm chữ nhật vật liệu xốp ($E_1 = 200\text{GPa}$, $\nu = 1/3$) đặt trên nền đàn hồi, dưới tác dụng của tải trọng phân bố đều $q = q_0 = -10^4\text{Pa}$.



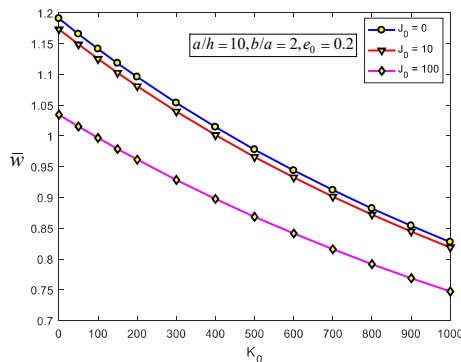
Hình 3. Biến thiên độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của tấm theo e_0

Bảng 4 trình bày kết quả số của độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của tấm chữ nhật vật liệu xốp ($a/h = 10, b/a = 2, K_0 = 100, J_0 = 10$) liên kết khớp 4 cạnh với các hệ số mật độ lỗ rỗng e_0 khác nhau theo 3 quy luật phân bố lỗ rỗng.

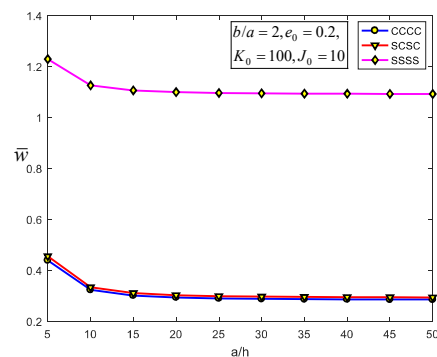
Bảng 4. Độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của tấm với các e_0 khác nhau

e_0	Phân bố đều			Phân bố không đều - Dạng 1			Phân bố không đều - Dạng 2		
	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
\bar{w}	1,0609	1,4683	2,8271	1,0325	1,2104	1,4680	1,0555	1,4389	2,9147
$\bar{\sigma}_x$	0,5810	0,5681	0,5250	0,6037	0,7035	0,8423	0,5662	0,4744	0,2341
$\bar{\sigma}_{xy}$	0,2508	0,2466	0,2326	0,2605	0,3043	0,3656	0,2444	0,2059	0,1039
$\bar{\sigma}_{xz}$	5,1274	5,0336	4,7194	4,9347	3,7354	1,1785	5,0900	4,7798	4,0018

Đồ thị biểu diễn sự biến thiên của các đại lượng khảo sát theo hệ số mật độ lỗ rỗng được thể hiện bằng đồ thị như trên Hình 3. Có thể thấy rằng, quy luật phân bố của lỗ rỗng đã ảnh hưởng đáng kể đến trị số của độ võng, các thành phần ứng suất, thêm vào đó sự ảnh hưởng này là khác nhau đến từng đại lượng khảo sát. Độ võng tăng khi mật độ lỗ rỗng tăng, điều này xảy ra với cả 3 quy luật phân bố lỗ rỗng. Với cùng một hệ số mật độ lỗ rỗng, 2 quy luật: đều và không đều - bất đối xứng (dạng 2) cho kết quả độ võng gần như nhau, và lớn hơn so với quy luật không đều - đối xứng (dạng 1). Ứng suất pháp và ứng suất màng có sự biến thiên khá giống nhau, khi e_0 tăng: quy luật không đều - bất đối xứng có ứng suất giảm nhanh, quy luật đều có ứng suất giảm chậm hơn trong khi quy luật không đều - đối xứng có ứng suất tăng. Ứng suất cắt ngang lại khác, khi e_0 tăng: cả 3 quy luật phân bố lỗ rỗng đều làm ứng suất giảm, chúng giảm nhanh dần theo trình tự: quy luật phân bố đều, không đều-bất đối xứng và cuối cùng là phân bố không đều đối xứng.



Hình 4. Biến thiên độ võng \bar{w} của tấm theo hệ số nền



Hình 5. Biến thiên độ võng \bar{w} của tấm theo tỷ số a/h

6. Kết luận

Bài báo xây dựng mô hình tính toán độ võng và các thành phần ứng suất trong tấm chữ nhật xốp đặt trên nền đàn hồi chịu uốn với một số điều kiện biên khác nhau. Nghiệm giải tích thu được bằng phương pháp Bubnov-Galerkin cùng với chương trình tính tự viết trên nền Matlab được kiểm chứng cho một số trường hợp riêng cho thấy đủ tin cậy. Các khảo sát số đã được thực hiện cho phép đánh giá ảnh hưởng của các tham số hình học, vật liệu, nền đàn hồi và điều kiện biên đến độ võng và ứng suất trong tấm. Các kết quả nhận được cho thấy có thể lựa chọn dạng phân bố lỗ rỗng và điều chỉnh mật độ phân bố lỗ rỗng để nhận được các kết quả mong muốn trong công tác tính toán, thiết kế kết cấu tấm làm sử dụng vật liệu rỗng.

Tài liệu tham khảo

- [1] Akbaş Ş.D. (2017). *Vibration and static analysis of functionally graded porous plates*. Journal of Applied and Computational Mechanics, **3**(3): pp. 199-207.
- [2] Arani A.G., Khoddami Maraghi Z., Khani M., and Alinaghian I. (2017). *Free vibration of embedded porous plate using third-order shear deformation and poroelasticity theories*. Journal of Engineering, **2017**.
- [3] Barati M.R. and Zenkour A.M. (2017). *Investigating post-buckling of geometrically imperfect metal foam nanobeams with symmetric and asymmetric porosity distributions*. Composite Structures, **182**: pp. 91-98.
- [4] Chen D., Yang J., and Kitipornchai S. (2016). *Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams*. International Journal of Mechanical Sciences, **108**: pp. 14-22.
- [5] Demirhan P.A. and Taskin V. (2019). *Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach*. Composites Part B: Engineering, **160**: pp. 661-676.
- [6] Huang Z., Lü C., and Chen W. (2008). *Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations*. Composite Structures, **85**(2): pp. 95-104.
- [7] Meziane M.A.A., Abdelaziz H.H., and Tounsi A. (2014). *An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions*. Journal of Sandwich Structures & Materials, **16**(3): pp. 293-318.
- [8] Pradhan K. and Chakraverty S. (2015). *Static analysis of functionally graded thin rectangular plates with various boundary supports*. Archives of Civil and Mechanical Engineering, **15**(3): pp. 721-734.
- [9] Reddy J.N. (2006). *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press.
- [10] Reddy J.N. (2017). *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. John Wiley & Sons.
- [11] Rezaei A. and Saidi A. (2015). *Exact solution for free vibration of thick rectangular plates made of porous materials*. Composite Structures, **134**: pp. 1051-1060.
- [12] Rezaei A., Saidi A., Abrishamdari M., and Mohammadi M.P. (2017). *Natural frequencies of functionally graded plates with porosities via a simple four variable plate theory: an analytical approach*. Thin-Walled Structures, **120**: pp. 366-377.
- [13] Sobhy M. (2013). *Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions*. Composite Structures, **99**: pp. 76-87.
- [14] Thai H.-T. and Choi D.-H. (2011). *A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation*. Composites Science and Technology, **71**(16): pp. 1850-1858.
- [15] Thai H.-T. and Choi D.-H. (2013). *Finite element formulation of various four unknown shear deformation theories for functionally graded plates*. Finite Elements in Analysis and Design, **75**: pp. 50-61.
- [16] Thang P.T., Nguyen-Thoi T., Lee D., Kang J., and Lee J. (2018). *Elastic buckling and free vibration analyses of porous-cellular plates with uniform and non-uniform porosity distributions*. Aerospace Science and Technology, **79**: pp. 278-287.
- [17] Zenkour A.M. (2009). *The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations*. International journal of mechanical sciences, **51**(11-12): pp. 869-880.
- [18] Zhao J., Choe K., Xie F., Wang A., Shuai C., and Wang Q. (2018). *Three-dimensional exact solution for vibration analysis of thick functionally graded porous (FGP) rectangular plates with arbitrary boundary conditions*. Composites Part B: Engineering, **155**: pp. 369-381.
- [19] Zhao J., Wang Q., Deng X., Choe K., Zhong R., and Shuai C. (2019). *Free vibrations of functionally graded porous rectangular plate with uniform elastic boundary conditions*. Composites Part B: Engineering, **168**: pp. 106-120.