

HỘI CƠ HỌC VIỆT NAM

Tuyển tập công trình khoa học
Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X

Hà Nội, 08-09/12/2017

Tập 3. Cơ học Vật rắn. Quyển 2



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ

HỘI CƠ HỌC VIỆT NAM

Tuyển tập công trình khoa học
Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X

Tập 3

NHÀ XUẤT BẢN
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ

ISBN: 978-604-913-722-3



9 786049 137223

SÁCH KHÔNG BÁN

Trần Minh Tú, Lê Xuân Huỳnh, Đặng Xuân Hùng và Lê Thanh Hải	
Phân tích ứng xử uốn của tấm bằng vật liệu rỗng (Porous Material) theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất	1365
Trần Minh Tú, Trần Hữu Quốc, Vũ Văn Thắm và Hoàng Thu Phương	
Phân tích tĩnh kết cấu tấm composite có gắn lớp áp điện có kể đến ảnh hưởng của nhiệt độ theo tiếp cận giải tích	1373
Trần Thanh Tuấn, Trương Thị Thùy Dung, Nguyễn Thị Loan và Đỗ Xuân Tùng	
Tỷ số H/V (ellipticity) của sóng mặt Rayleigh trong bán không gian micropolar đẳng hướng	1381
Bui Van Tuyen, Nguyen Ngoc Huyen and Nguyen Dinh Kien	
Vibration of FG porous beams in thermal environment under moving load using a new first-order shear deformable beam element	1388
Trần Thị Thúy Vân và Vũ Thị Lan Anh	
Tính tối ưu cột có tiết diện thay đổi	1396
Đào Duy Việt và Hoàng Xuân Lượng	
Phân tích động lực học kết cấu vỏ động cơ phóng tên lửa bằng lý thuyết và thực nghiệm	1404
Trần Thanh Việt, Vũ Quốc Anh và Lê Xuân Huỳnh	
Phân tích tĩnh kết cấu khung thép phẳng phi tuyến hình học với hệ số liên kết, tải trọng và độ lệch ban đầu có dạng số mờ tam giác	1412
Phạm Chí Vĩnh và Phạm Thị Hà Giang	
Công thức vận tốc sóng Rayleigh trong bán không gian đàn hồi micropolar	1420
Phạm Chí Vĩnh, Lê Thị Huệ và Nguyễn Thị Khánh Linh	
Công thức xấp xỉ của tỷ số H/V của sóng Rayleigh trong bán không gian đàn hồi có ứng suất trước không nén được phủ một lớp mỏng có ứng suất trước	1429
Phạm Chí Vĩnh và Trịnh Thị Thanh Huệ	
Sóng Rayleigh trong bán không gian đàn hồi không nén được, có ứng suất trước chịu điều kiện biên trở kháng	1437
Phạm Chí Vĩnh, Nguyễn Thị Khánh Linh và Lê Thị Huệ	
Công thức H/V chính xác của sóng Rayleigh trong bán không gian đàn hồi trục hướng không nén được phủ một lớp đàn hồi	1443
Phạm Chí Vĩnh, Lương Thế Thắng và Nguyễn Thị Khánh Linh	
Sóng Scholte trong môi trường trục hướng không nén được	1451
Phạm Chí Vĩnh, Trần Thanh Tuấn, Lê Thị Huệ và Nguyễn Thị Khánh Linh	
Công thức chính xác của tỷ số H/V của sóng Rayleigh trong bán không gian đàn hồi trục hướng nén được phủ một lớp đàn hồi trục hướng nén được	1456

Phân tích ứng xử uốn của tấm bằng vật liệu rỗng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất

Trần Minh Tú¹, Lê Xuân Huỳnh¹, Đặng Xuân Hùng¹ và Lê Thanh Hải²

¹ Trường Đại học Xây dựng, 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội

² Trường Đại học Vinh, 182 đường Lê Duẩn, thành phố Vinh, Nghệ An

Email liên lạc: tpnt2002@yahoo.com

Tóm tắt. Bài báo xây dựng mô hình tính toán độ võng và các thành phần ứng suất trong tấm chữ nhật tựa khớp trên chu vi làm bằng vật liệu rỗng chịu uốn. Vật liệu với sự phân bố liên tục và không đều của các lỗ rỗng làm cho mô đun đàn hồi và mật độ khối lượng thay đổi trơn và phi tuyến theo chiều dày tấm. Hệ số đặc trưng cho sự phân bố lỗ rỗng được xác định theo tính chất cơ học của bọt kim loại (metal foam). Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất của Reissner-Mindlin được sử dụng để thiết lập nghiệm giải tích của độ võng và ứng suất trong tấm. Kết quả số cho thấy sự tương đồng với tấm đẳng hướng khi đưa về trường hợp riêng. Ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng, các tham số vật liệu và kích thước hình học đến ứng xử uốn của tấm được khảo sát qua các ví dụ số.

Từ khóa: Tấm chữ nhật chịu uốn, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, vật liệu rỗng, độ võng, ứng suất.

1. Mở đầu

Vật liệu có cơ tính biến thiên (functionally graded material – FGM) được cấu thành từ hai vật liệu thành phần, thường là gốm và kim loại. Loại vật liệu này có cơ tính biến đổi trơn từ bề mặt này sang bề mặt khác của kết cấu nên tránh được sự tập trung ứng suất thường gặp ở các kết cấu bằng vật liệu composite truyền thống. Một trong những phát triển mới nhất gần đây của vật liệu dạng FGM là vật liệu rỗng (porous materials), trong đó một thành phần ở dạng rắn, thành phần kia ở dạng lỗ rỗng trong cấu trúc vật liệu. Các lỗ rỗng này phân bố liên tục với một quy luật nhất định nhằm đạt được những tính chất cơ học mong muốn của người thiết kế.

Do có trọng lượng nhẹ, các kết cấu bằng vật liệu rỗng được sử dụng trong nhiều lĩnh vực công nghiệp: hàng không, chế tạo ô tô, tàu biển, xây dựng dân dụng [1], [2], [3], [4]. Tính chất hấp thụ năng lượng của vật liệu rỗng được sử dụng để giảm ồn, cách âm và chế tạo những cấu kiện chịu được tải trọng động, tải trọng va chạm [5], [6], [7], [8]. Các nghiên cứu về ứng xử cơ học của các kết cấu bằng vật liệu rỗng luôn là đề tài thu hút sự quan tâm của các nhà khoa học trong và ngoài nước thể hiện qua một số lượng lớn các công bố trong thời gian gần đây.

Magnucka-Blandzi [9] tính toán độ võng và lực tới hạn cho tấm tròn bằng vật liệu rỗng liên kết khớp trên chu tuyến chịu tải nén đều trong mặt trung bình và tải trọng ngang đối xứng trục. Mojahedin [10] phân tích ổn định của tấm tròn bằng vật liệu rỗng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Lời giải chính xác cho phân tích dao động tự do của tấm dày làm bằng vật liệu rỗng được Rezae và Saidi trình bày trong [11]. Arani và cộng sự [12] nghiên cứu dao động tự do của tấm chữ nhật làm bằng vật liệu rỗng trên nền Winkler theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy, tần số dao động xác định bằng phương pháp DQM (differential quadrature method). Leclair [13] phân tích dao động riêng của tấm mỏng chữ nhật làm bằng vật liệu rỗng có dạng bão hòa bởi chất lỏng.

Mục đích của bài báo là thiết lập lời giải giải tích của độ võng và các thành phần ứng suất dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) cho tấm bằng vật liệu rỗng với hệ số đặc trưng cho sự phân bố lỗ rỗng được xác định theo tính chất cơ học của bọt kim loại (metal foam). Tấm chữ nhật tựa khớp trên chu vi, chịu tải trọng phân bố đều vuông góc với bề mặt tấm. Các ví dụ kiểm chứng sẽ được thực hiện qua so sánh với một số kết quả đã có khi đưa bài toán về trường hợp riêng cho vật liệu đẳng

hướng. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, kích thước hình học của tấm đến độ võng và các thành phần ứng suất sẽ được khảo sát.

2. Mô hình tấm bằng vật liệu rỗng

Xét tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng là vật liệu đàn hồi tuyến tính, có kích thước các cạnh $a \times b$, chiều dày h . Mặt phẳng trung bình là mặt phẳng Oxy và z là phương chiều dày của tấm (Hình 1). Các hằng số vật liệu biến thiên liên tục theo chiều dày tấm: $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Mật độ phân bố lỗ rỗng theo quy luật đối xứng (dạng 1) hoặc bất đối xứng (dạng 2) được biểu diễn dưới dạng [14]:

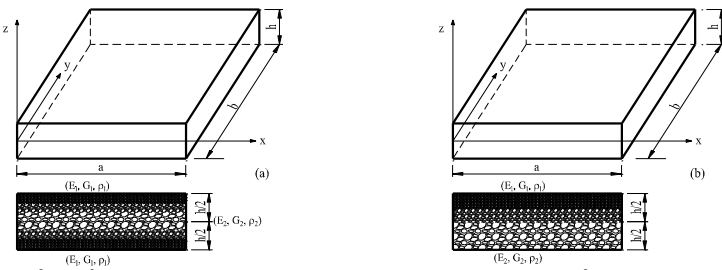
$$\begin{cases} E(z) = E_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \\ G(z) = G_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \\ \rho(z) = \rho_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} E(z) = E_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ G(z) = G_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ \rho(z) = \rho_1 \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{cases} \quad (2)$$

trong đó E_1, G_1, ρ_1 lần lượt là các giá trị lớn nhất của mô đun đàn hồi kéo - nén, mô đun đàn hồi trượt và khối lượng riêng; E_2, G_2, ρ_2 là các giá trị nhỏ nhất tương ứng. Các hệ số rỗng e_0 cho mô đun đàn hồi và hệ số rỗng e_m cho khối lượng riêng được tính theo [14]:

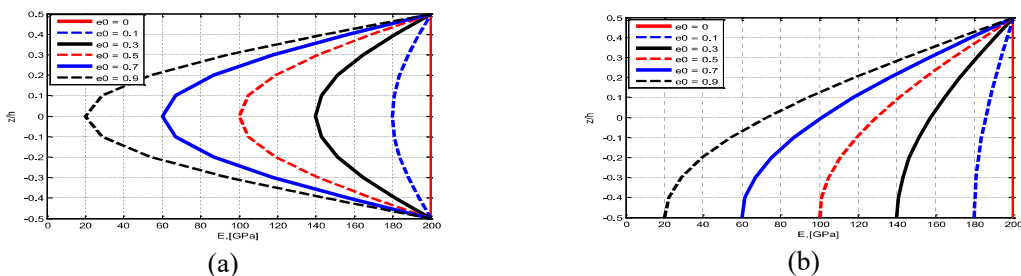
$$e_0 = 1 - \frac{E_1}{E_2} = 1 - \frac{G_1}{G_2} \quad (3)$$

$$e_m = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \sqrt{1 - e_0} \quad (4)$$



Hình 1. Tấm bằng vật liệu rỗng với các hàm mật độ phân bố lỗ rỗng khác nhau: (a) - Dạng 1 và (b) - Dạng 2.

Biểu thức (1) và hình 2a cho thấy sự phân bố lỗ rỗng theo dạng 1 là đối xứng, giá trị lớn nhất của các hằng số vật liệu đạt được ở mặt trên và mặt dưới của tấm, giá trị nhỏ nhất đạt được tại mặt trung bình nơi có mật độ lỗ rỗng lớn nhất. Trong khi đó phân bố lỗ rỗng theo dạng 2 (biểu thức (2) và Hìnhb) là bất đối xứng, giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt đạt được tại mặt trên và dưới tương ứng với vị trí có mật độ lỗ rỗng mật độ lỗ rỗng nhỏ nhất và lớn nhất.



Hình 2. Biến thiên của mô đun đàn hồi kéo (nén) trong tấm vật liệu rỗng, phân bố dạng 1 (trái), phân bố dạng 2 (phải)

3. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất Reissner – Mindlin

3.1. Các thành phần chuyển vị

Trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất giả thiết dưới dạng [15]:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_x(x, y); \quad v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\theta_y(x, y); \quad w(x, y, z) = w_0(x, y) = w(x, y) \quad (5)$$

trong đó u_0, v_0, w_0 là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình theo các phương x, y, z . θ_x, θ_y : là các góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh trục y, x .

3.2. Các thành phần biến dạng

Trường biến dạng được suy ra từ trường chuyển vị thông qua các biểu thức quan hệ chuyển vị - biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + z\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + z\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix} \quad (6)$$

3.3. Các thành phần ứng suất

Quan hệ tuyến tính giữa ứng suất – biến dạng trong tấm bằng vật liệu rỗng được viết với dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{trong đó: } Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} = Q_{22}; \quad Q_{12} = \frac{\mu(z)E(z)}{1-\nu^2(z)} = Q_{21}; \quad Q_{66} = \frac{E(z)}{2[1+\nu(z)]} \quad (8)$$

3.4. Các thành phần nội lực

Các thành phần nội lực trong tấm được xác định theo các biểu thức định nghĩa có dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz; \quad \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (9)$$

với k là hệ số hiệu chỉnh cắt.

Quan hệ ứng lực – chuyển vị có thể biểu diễn tổng quát dưới dạng:

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & B_{12} & B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 & D_{12} & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \end{pmatrix} \quad (10)$$

trong đó: $A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz$; $B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} z dz$; $D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} z^2 dz$ $A_{44} = A_{55} = k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} dz$ (11)

4. Hệ phương trình cân bằng theo các thành phần chuyển vị

Theo [15], hệ phương trình cân bằng tĩnh được biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0; & \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Thay các thành phần ứng lực biểu diễn qua chuyển vị theo (10) vào hệ phương trình (12), ta nhận được hệ phương trình cân bằng đối với các thành phần chuyển vị, có dạng:

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} &= 0 \\ A_{11} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} &= 0 \\ A_{44} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + A_{55} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + q(x, y) &= 0 \\ B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} - A_{44} \theta_x + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - A_{44} \frac{\partial w_0}{\partial x} &= 0 \\ B_{11} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} - A_{55} \theta_y + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} - A_{55} \frac{\partial w_0}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

5. Lời giải Navier cho tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng.

Xét tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng có kích thước như Hình 1, liên kết khớp trên chu vi với các điều kiện biên:

$$\begin{aligned} x=0: u_0 = v_0 = w_0 = 0, M_x = 0; & \quad x=a: v_0 = w_0 = 0, M_x = 0 \\ y=0: u_0 = v_0 = w_0 = 0, M_y = 0; & \quad y=b: v_0 = w_0 = 0, M_y = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Hàm chuyển vị cần tìm trong (13) được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép thỏa mãn điều kiện biên (14), có dạng:

$$\begin{aligned}
 u_0(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn} \cos \alpha x \sin \beta y; \quad v_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} \sin \alpha x \cos \beta y \\
 w_0(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{0mn} \sin \alpha x \sin \beta y; \quad \theta_x(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0xmn} \cos \alpha x \sin \beta y \\
 \theta_y(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{0ymn} \sin \alpha x \cos \beta y; \quad \text{với } \alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Hàm tải trọng tương ứng, được khai triển dưới dạng chuỗi lượng giác kép như sau:

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y, \text{ trong đó } q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin \alpha x \sin \beta y dx dy \tag{16}$$

Khi tải trọng phân bố đều, ta có: $q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2}$

Thay biểu thức (15) và (16) vào (13), ta nhận được hệ phương trình viết dưới dạng rút gọn:

$$[K]_{5 \times 5} \{q\}_{5 \times 1} = \{F\}_{5 \times 1} \tag{17}$$

với $\{q\} = \{u_{0mn} \quad v_{0mn} \quad w_{0mn} \quad \theta_{xmn} \quad \theta_{ymn}\}^T$; $\{F\} = \{0 \quad 0 \quad q_{mn} \quad 0 \quad 0\}^T$

Giải hệ phương trình (17) tìm được vec tơ hệ số $\{q\}$ và thay vào (15) ta xác định được các thành phần chuyển vị. Các thành phần ứng suất sau đó cũng được xác định qua các hệ thức quan hệ đã trình bày.

6. Kết quả số và thảo luận

6.1. Bài toán kiểm chứng

Với nghiệm giải tích đã thiết lập ở phần trên, chương trình tính bằng trên nền Matlab được viết để thực hiện các ví dụ số. Bảng 2 trình bày giá trị của độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của tấm bằng vật liệu đẳng hướng chịu uốn bởi tải phân bố đều có cường độ q_0 với các tỉ số kích thước a/h khác nhau. Thông số kích thước và các hằng số vật liệu của tấm cho trong Bảng 1.

Bảng 1 Thông số kích thước và vật liệu tấm cho ví dụ kiểm chứng

$h(m)$	a/h	b/a	$E_1(Pa)$	ν	e_0
0.01	10,20,50	1	2×10^{11}	0.25	0

Độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên tính theo Reddy [15]:

$$\begin{aligned}
 \hat{w} &= w_0 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \frac{100D_{22}}{b^4 q_0}; \quad \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \frac{h^2}{b^2 q_0}; \quad \bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \frac{h^2}{b^2 q_0}; \\
 \bar{\sigma}_{xy} &= \sigma_{xy} \left(a, b, -\frac{h}{2} \right) \frac{h^2}{b^2 q_0}; \quad \bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right) \frac{h}{b q_0}; \quad \bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{2} \right) \frac{h}{b q_0}
 \end{aligned} \tag{18}$$

Khi cho $e_0 = 0$ ta nhận được độ võng lớn nhất và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của tấm bằng vật liệu đẳng hướng chịu uốn, các kết quả này được so sánh với các kết quả của Reddy trong [15] cũng sử dụng cùng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Sự trùng khớp của các kết quả trong Bảng 2 cho thấy độ tin cậy của nghiệm giải tích và chương trình tính mà bài báo đã xây dựng.

Bảng 2. Độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của tấm vuông bằng vật liệu đẳng hướng

Mô hình	Tỉ số a/h	\hat{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$
Reddy [15]	10	0.4259	0.2762	0.2762	0.2085	0.3927	0.3927
Bài báo		0.4259	0.2762	0.2762	0.2085	0.3927	0.3927
Reddy [15]	20	0.4111	0.2762	0.2762	0.2085	0.3927	0.3927
Bài báo		0.4111	0.2762	0.2762	0.2085	0.3927	0.3927
Reddy [15]	50	0.4070	0.2762	0.2762	0.2085	0.3927	0.3927
Bài báo		0.4070	0.2762	0.2762	0.2085	0.3927	0.3927

6.2. Ảnh hưởng của mật độ phân bố lỗ rỗng và tỉ số kích thước các cạnh

Xét tấm chữ nhật có chiều dày $h = 0,01m$; $a/h = 10$, mô đun đàn hồi lớn nhất của vật liệu rỗng $E_1 = 2 \times 10^{11} (Pa)$. Tấm chịu uốn bởi tải trọng phân bố đều có cường độ $q_0 = 10^6 Pa$.

Độ võng lớn nhất của tấm chữ nhật ($a/b = 2$) với các hệ số mật độ phân bố lỗ rỗng khác nhau theo hai dạng phân bố đối xứng và bất đối xứng thể hiện trong Bảng 3 và 4. Hình 3a biểu diễn sự biến thiên của độ võng lớn nhất theo mật độ phân bố lỗ rỗng. Độ võng của tấm tại mặt cắt $x = a/2$ theo hai dạng phân bố lỗ rỗng với các hệ số mật độ phân bố lỗ rỗng khác nhau biểu diễn bằng đồ thị trên Hình 3b và c.

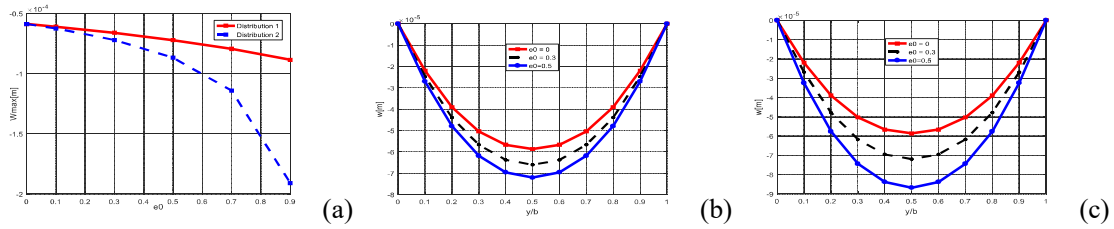
Bảng 3. Ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng dạng 1 đến độ võng và các thành phần ứng suất

e_0	$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) [10^{-4} m]$	$\sigma_x [MPa]$	$\sigma_y [MPa]$	$\sigma_{xy} [MPa]$	$\sigma_{xz} [MPa]$	$\sigma_{yz} [MPa]$
0	0,5868	60.478	24.896	29.663	5.450	4.192
0.1	0,6094	62.748	25.830	30.777	5.239	4.029
0.3	0,6602	67.841	27.927	33.275	4.716	3.627
0.5	0,7206	73.834	30.394	36.214	3.997	3.075
0.7	0,7938	80.988	33.339	39.723	2.949	2.268
0.9	0,8848	89.677	36.916	43.985	1.276	0.982

Bảng 4. Ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng dạng 2 đến độ võng và các thành phần ứng suất

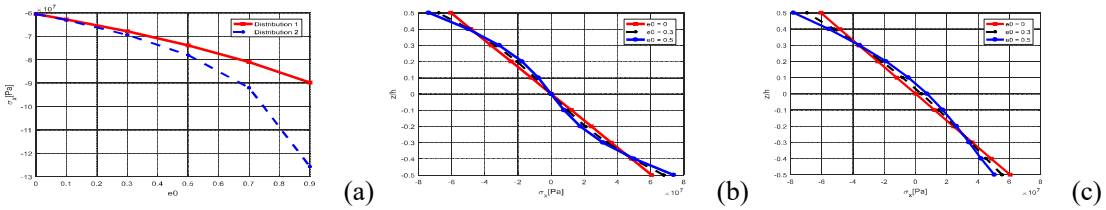
e_0	$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) [10^{-4} m]$	$\sigma_x [MPa]$	$\sigma_y [MPa]$	$\sigma_{xy} [MPa]$	$\sigma_{xz} [MPa]$	$\sigma_{yz} [MPa]$
0	0,5868	60.478	24.896	29.663	5.450	4.192
0.1	0,6237	63.080	25.967	28.900	5.409	4.160
0.3	0,7196	69.367	28.555	27.101	5.308	4.082
0.5	0,8676	78.024	32.119	24.731	5.169	3.975
0.7	1,1412	91.982	37.865	21.154	4.965	3.819
0.9	1,9084	125.621	51.712	13.294	4.641	3.569

Từ Bảng 3, 4 và đồ thị trên Hình 3 có thể thấy rằng mật độ lỗ rỗng tăng sẽ làm giảm độ cứng của tấm dẫn đến độ võng tăng. Tuy nhiên nếu quy luật phân bố lỗ rỗng theo dạng 1 (đối xứng) thì độ võng sẽ giảm nhanh hơn so với quy luật phân bố theo dạng 2 (bất đối xứng). Và với cùng hệ số mật độ phân bố lỗ rỗng, độ võng với quy luật phân bố lỗ rỗng theo dạng 1 luôn bé hơn độ võng với quy luật phân bố lỗ rỗng theo dạng 2. Kết quả này phản ánh đúng quy luật do khi hệ số mật độ lỗ rỗng tăng sẽ làm suy giảm mô đun đàn hồi của vật liệu tấm, và quy luật phân bố theo dạng 2, sẽ làm mô đun đàn hồi của vật liệu tấm giảm nhiều hơn.



Hình 3. Ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng đến độ võng lớn nhất (a), độ võng tại mặt cắt $x = a/2$ trong trường hợp quy luật phân bố lỗ rỗng dạng 1 (b) và dạng 2 (c)

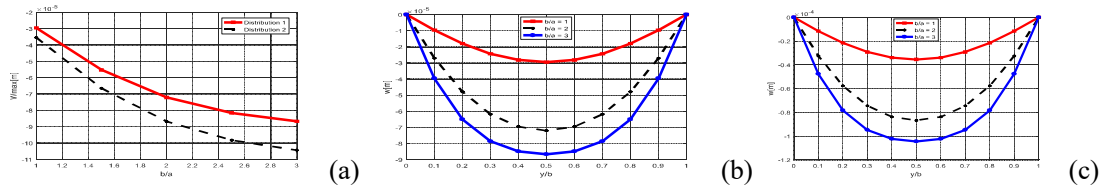
Hình 4a biểu diễn sự biến thiên của thành phần ứng suất pháp $\sigma_x(a/2, b/2, h/2)$ theo hệ số mật độ lỗ rỗng. Hình 4b và c là đồ thị biến thiên của $\sigma_x(a/2, b/2, z)$ dọc theo chiều dày tấm với hai dạng phân bố lỗ rỗng 1 và 2.



Hình 4. Ảnh hưởng của mật độ lỗ rỗng đến ứng suất pháp lớn nhất (a); biến thiên của thành phần ứng suất pháp theo chiều dày tấm trong trường hợp quy luật phân bố lỗ rỗng dạng 1 (b) và dạng 2 (c)

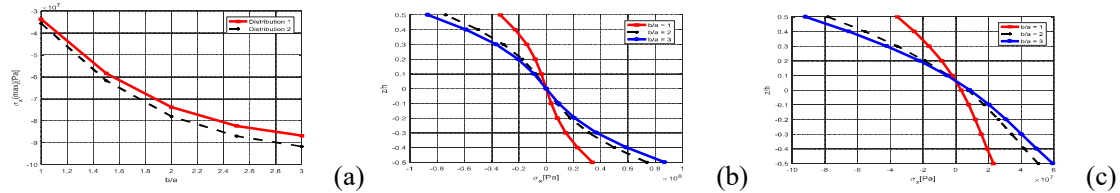
Từ bảng 4, bảng 5 và hình 4 có thể thấy rằng, với cả hai dạng phân bố lỗ rỗng, khi mật độ lỗ rỗng tăng thì giá trị tuyệt đối các thành phần ứng suất pháp tăng, ngược lại các thành phần ứng suất tiếp giảm. Biến thiên của thành phần ứng suất pháp theo chiều dày tấm là phi tuyến khi $e_0 \neq 0$.

Biến thiên độ võng lớn nhất của tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng ($a/h = 10$), hệ số mật độ lỗ rỗng $e_0 = 0,5$ theo tỉ số b/a biểu diễn bằng đồ thị trên hình 5a. Đồ thị độ võng của tấm tại mặt cắt $x = a/2$ theo hai dạng phân bố lỗ rỗng với các tỉ số b/a khác nhau biểu diễn bằng đồ thị trên Hình 5b và Hình 5c. Có thể thấy rằng khi tỉ số b/a tăng sẽ làm độ võng tăng. Với cùng một tỉ số b/a , độ võng với quy luật phân bố lỗ rỗng theo dạng 1 luôn bé hơn độ võng với quy luật phân bố lỗ rỗng theo dạng 2.



Hình 5. Ảnh hưởng của tỉ số kích thước các cạnh tấm (b/a) đến độ võng lớn nhất trong hai trường hợp quy luật phân bố lỗ rỗng khác nhau: Dạng 1 (Hình 5b) và Dạng 2 (Hình 5c)

Hình 6a biểu diễn biến thiên thành phần ứng suất pháp lớn nhất theo tỉ số b/a . Đồ thị ứng suất pháp $\sigma_x(a/2, b/2, z)$ theo chiều dày tấm với hai dạng phân bố lỗ rỗng biểu diễn bằng đồ thị trên Hình 6b và Hình 6c. Như vậy khi chuyển từ tấm vuông sang tấm chữ nhật, giá trị tuyệt đối thành phần σ_x tăng rõ rệt trong cả hai dạng phân bố lỗ rỗng, tuy nhiên ứng suất pháp trong tấm với quy luật phân bố lỗ rỗng dạng 1 nhỏ hơn so với dạng 2.



Hình 6. Ảnh hưởng của kích thước tấm b/a đến thành phần ứng suất pháp σ_x trong hai trường hợp luật phân bố khác nhau: Dạng 1 (Hình 6b) và Dạng 2 (Hình 6c)

7. Kết luận

Bài báo xây dựng mô hình tính toán độ võng và các thành phần ứng suất trong tấm chữ nhật tựa khớp trên chu vi làm bằng vật liệu rỗng chịu uốn. Nghiệm giải tích đã thiết lập cùng với chương trình tính viết trên nền Matlab được kiểm chứng, cho thấy đủ tin cậy. Các khảo sát số cho phép đánh giá ảnh hưởng của các tham số hình học, vật liệu đến độ võng và ứng suất trong tấm. Qui luật phân bố lồi rỗng dạng đối xứng có ứng xử uốn tốt hơn so với quy luật phân bố bất đối xứng. Các kết quả nhận được là hữu ích cho công tác nghiên cứu, thiết kế các kết cấu tấm làm bằng vật liệu rỗng.

Tài liệu tham khảo

- [1]. B. Smith, S. Szyniszewski, J. Hajjar, B. Schafer & S. Arwade (2012). Steel foam for structures: A review of applications, manufacturing and material properties. *Journal of Constructional Steel Research*, 71, 1-10.
- [2]. X. Badiche, S. Forest, T. Guibert, Y. Bienvenu, J. D. Bartout, P. Ienny, . . . H. Bernet (2000). Mechanical properties and non-homogeneous deformation of open-cell nickel foams: application of the mechanics of cellular solids and of porous materials. *Materials Science and Engineering: A*, 289(1), 276-288.
- [3]. A. Rabiei & L. Vendra (2009). A comparison of composite metal foam's properties and other comparable metal foams. *Materials Letters*, 63(5), 533-536.
- [4]. B. Levine (2008). Porous Metals and Metallic Foams: Current Status and Recent Developments. *Advanced Engineering Materials*, 10(9).
- [5]. K. Daneshjou, R. Talebitooti & M. Kornokar (2017). Vibroacoustic study on a multilayered functionally graded cylindrical shell with poroelastic core & bonded-unbonded configuration. *Journal of Sound and Vibration*.
- [6]. P. K. Pinnoji, P. Mahajan, N. Bourdet, C. Deck & R. Willinger (2010). Impact dynamics of metal foam shells for motorcycle helmets: Experiments & numerical modeling. *International Journal of Impact Engineering*, 37(3), 274-284.
- [7]. M. Belingardi, R. Montanini (2001). Characterization of polymeric structural foams under compressive impact loading by means of energy-absorption diagram. *International Journal of Impact Engineering*, 25(5), 455-472.
- [8]. R. Rajendran, K. P. Sai, B. Chandrasekar, A. Gokhale & S. Basu (2008). Preliminary investigation of aluminium foam as an energy absorber for nuclear transportation cask. *Materials & Design*, 29(9), 1732-1739.
- [9]. E. Magnucka-Blandzi (2008). Axi-symmetrical deflection and buckling of circular porous-cellular plate. *Thin-Walled Structures*, 46(3), 333-337.
- [10]. A. Mojahedin, M. Jabbari, A. R. Khorshidvand, M. R. Eslami (2016). Buckling analysis of functionally graded circular plates made of saturated porous materials based on higher order shear deformation theory. *Thin-Walled Structures* 99 (2016) 83 – 90.
- [11]. A. S. Rezae, A. R. Saidi (2015) Exact Solution for Free Vibration of Thick Rectangular Plates Made of Porous Materials, *Composite Structures*.
- [12]. A. G. Arani, Z. K. Maraghi, M. Khani & I. Alinaghian, (2017). Free Vibration of Embedded Porous Plate Using Third-Order Shear Deformation and Poroelasticity Theories. *Journal of Engineering* Volume 2017.
- [13]. Philippe Leclaire, Kirill Horoshenkov, Alan Cummings, (2001). Transverse vibrations of a thin rectangular porous plate saturated by a fluid. *Journal of Sound and Vibration, Elsevier*, 247(1), 1-18.
- [14]. D. Chen, J. Yang & S. Kitipornchai (2016). Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *International journal of mechanical sciences*, 108, 14-22.
- [15]. J. N. Reddy (2007) *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells* - Second Edition - CRC press.