

HỘI CƠ HỌC VIỆT NAM

# TUYỂN TẬP CÔNG TRÌNH KHOA HỌC



## HỘI NGHỊ CƠ HỌC TOÀN QUỐC

LẦN THỨ  
**XI**

HÀ NỘI, 02-03/12/2022

### TẬP 1. Cơ học Vật rắn biến dạng



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ

**HỘI CƠ HỌC VIỆT NAM**

**Tuyển tập công trình khoa học  
Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ XI**

**Hà Nội, 02-03/12/2022**

**Tập 1. Cơ học Vật rắn biến dạng**

**HÀ NỘI, 2022**

**Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ XI**

**Hà Nội, 02-03/12/2022**

**Tập 1. Cơ học Vật rắn biến dạng**

**ISBN: 978-604-357-084-7**

© 2022 Nhà xuất bản Khoa học tự nhiên và Công nghệ

Không phần nào trong xuất bản phẩm này được phép sao chép hay phát hành dưới bất kỳ hình thức hoặc phương tiện nào mà không có sự cho phép trước bằng văn bản của cơ quan chủ quản.

**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ**

Trụ sở: Nhà A16, số 18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội.

Điện thoại: 024 22149040      Fax: 024 37910147

Website: <http://www.vap.vast.vn>

## **BAN KHOA HỌC**

*Trưởng ban:* Nguyễn Tiến Khiêm.

*Phó Trưởng ban:* Nguyễn Đình Đức, Hoàng Văn Huân, Nguyễn Xuân Hùng, Nguyễn Văn Khang, Phan Bùi Khôi, Trần Ích Thịnh, Nguyễn Đăng Tộ, Đỗ Như Tráng.

*Ủy viên:* Nguyễn Đông Anh, Đào Huy Bích, Nguyễn Đăng Bích, Lê Văn Cảnh, Ngô Huy Cẩn, Phạm Đức Chính, Nguyễn Thái Chung, Nguyễn Đức Cường, Nguyễn Phong Điền, Nguyễn Văn Điệp, Bùi Văn Ga, Dương Ngọc Hải, Vũ Công Hàm, Nguyễn Thế Hùng, Nguyễn Quốc Hưng, Ngô Như Khoa, Nguyễn Việt Khoa, Nguyễn Trung Kiên, Trần Văn Liên, Nguyễn Hữu Lộc, Hoàng Xuân Lương, Nguyễn Xuân Lựu, Đào Như Mai, Nguyễn Xuân Mãn, Đinh Văn Mạnh, Trần Văn Nam, Ngô Kiều Nhi, Nguyễn Ân Niên, Nguyễn Văn Phóng, Đinh Văn Phong, Khúc Văn Phú, Nguyễn Thiện Phúc, Phạm Hồng Phúc, Nguyễn Trọng Phước, Lê Quang, Vũ Duy Quang, Trần Quốc Quân, Lê Minh Quý, Ngô Văn Quyết, Nguyễn Chí Sáng, Đỗ Sanh, Nguyễn Hoài Sơn, Lê Lương Tài, Phạm Mạnh Thắng, Trương Tích Thiện, Bùi Quốc Tính, Vũ Quốc Trụ, Nguyễn Thời Trung, Trần Đức Trung, Trần Minh Tú, Hoàng Văn Tùng, Lã Đức Việt, Nguyễn Trung Việt, Phạm Chí Vĩnh.

## **BAN TỔ CHỨC**

*Đồng Trưởng ban:* Nguyễn Đình Đức, Trần Văn Liên.

*Phó Trưởng ban:* Lê Văn Cảnh, Nguyễn Thị Việt Liên, Trần Văn Nam.

*Ủy viên:* Chu Thanh Bình, Trần Anh Bình, Lương Xuân Bình, Thái Hoàng Chiến, Phạm Hồng Công, Nguyễn Tiến Dũng, Phan Hải Đăng, Phạm Tiến Đạt, Nguyễn Phong Điền, Phạm Minh Hải, Trần Thanh Hải, Vũ Công Hàm, Hà Ngọc Hiền, Nguyễn Quang Hoàng, Hoàng Văn Huân, Phan Bùi Khôi, Đặng Bảo Lâm, Đào Như Mai, Dương Tuấn Mạnh, Phan Đăng Phong, Cao Văn Phường, Vũ Ngọc Pi, Trần Quốc Quân, Nguyễn Hoài Sơn, Nguyễn Hồng Thái, Đặng Ngọc Thanh, Châu Đình Thành, Phạm Mạnh Thắng, Nguyễn Đăng Tộ, Nguyễn Xuân Toán, Phạm Quốc Tuấn, Trần Thanh Hải Tùng.

## **BAN THƯ KÝ**

*Trưởng ban:* Nguyễn Thị Việt Liên.

*Ủy viên:* Vũ Thị Thùy Anh, Nguyễn Tiến Cường, Phan Hải Đăng, Trần Bình Định, Trần Thị Thu Hà, Nguyễn Quang Hoàng, Đặng Bảo Lâm, Phan Thị Cẩm Ly, Đào Như Mai, Dương Tuấn Mạnh, Phùng Văn Phúc, Nguyễn Tất Thắng, Nguyễn Kim Thoa, Phạm Quốc Tuấn, Trần Ngọc Trung, Nguyễn Ngọc Vinh.

## **BAN BIÊN TẬP**

*Trưởng ban:* Nguyễn Tiến Khiêm.

*Với sự tham gia của:* Nguyễn Tiến Cường, Phan Hải Đăng, Trần Bình Định, Nguyễn Đình Đức, Nguyễn Quang Hoàng, Hoàng Văn Huân, Nguyễn Xuân Hùng, Nguyễn Văn Khang, Phan Bùi Khôi, Đặng Bảo Lâm, Trần Văn Liên, Nguyễn Thị Việt Liên, Đào Như Mai, Phùng Văn Phúc, Nguyễn Tất Thắng, Trần Ích Thịnh, Nguyễn Đăng Tộ, Đỗ Như Tráng, Trần Ngọc Trung, Phạm Quốc Tuấn.



|                                                                                                                                                     |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 14. <i>Phân tích kết cấu lõi nhà nhiều tầng có xét đến sự làm việc sau đàn hồi của các dầm nối</i>                                                  |     |
| Đoàn Xuân Quý, Nguyễn Tiến Chương, và Nguyễn Hùng Phong .....                                                                                       | 140 |
| 15. <i>Nghiên cứu ảnh hưởng của thông số công nghệ đến độ bền kéo mối hàn ma sát khuấy ống trụ hợp kim nhôm AA6061</i>                              |     |
| Nguyễn Hoàng Linh và Nguyễn Văn Vũ .....                                                                                                            | 150 |
| 16. <i>Phân tích đáp ứng động lực của vỏ hình loa kèn bằng cách số hóa đường cong kinh tuyến</i>                                                    |     |
| Nguyễn Đăng Bích, Nguyễn Hoàng Tùng và Lê Xuân Tùng .....                                                                                           | 160 |
| 17. <i>Phân tích phi tuyến tĩnh dầm sandwich gia cường GPL với các điều kiện biên khác nhau bằng phương pháp Ritz</i>                               |     |
| Đặng Xuân Hùng, Trần Minh Tú và Hương Quý Trường .....                                                                                              | 171 |
| 18. <i>Phân tích ứng xử uốn của tấm vật liệu xốp đặt trên nền đàn hồi Pasternak trong môi trường nhiệt</i>                                          |     |
| Nguyễn Văn Long, Trần Minh Tú, Lê Thanh Hải và Phan Xuân Thực .....                                                                                 | 182 |
| 19. <i>Phân tích ổn định phi tuyến tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng bão hòa chất lưu trên nền đàn hồi có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ</i>          |     |
| Nguyễn Văn Long, Trần Minh Tú và Vũ Thị Thu Trang .....                                                                                             | 193 |
| 20. <i>Phân tích tĩnh tấm chữ nhật bằng vật liệu rỗng bão hòa chất lưu trên nền đàn hồi có xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ</i>                       |     |
| Nguyễn Văn Long, Trần Minh Tú, Vũ Thị Thu Trang và Đặng Xuân Trung .....                                                                            | 204 |
| 21. <i>Nghiên cứu sử dụng mô hình khung trong tính toán kết cấu tường kép nhà cao tầng</i>                                                          |     |
| Nguyễn Hải Quang, Nguyễn Tiến Chương và Phạm Thu Hiền .....                                                                                         | 214 |
| 22. <i>Dao động của dầm Euler-Bernoulli bằng vật liệu xốp trong môi trường nhiệt dưới tác dụng của tải trọng di động</i>                            |     |
| Chu Thanh Bình, Trần Minh Tú, Nguyễn Văn Long và Nguyễn Tuấn Anh .....                                                                              | 224 |
| 23. <i>Phân tích uốn phi tuyến dầm sandwich có lớp lõi bằng vật liệu FGP với các liên kết đàn hồi</i>                                               |     |
| Hương Quý Trường, Đặng Xuân Hùng, Trần Minh Tú và Nguyễn Văn Long .....                                                                             | 234 |
| 24. <i>Tính độ võng của dầm bê tông cốt thép thường khi có vết nứt, xét đến ảnh hưởng của từ biến và co ngót</i>                                    |     |
| Nguyễn Tất Thắng, Trần Bình Định và Trần Văn Liên .....                                                                                             | 245 |
| 25. <i>Buckling analysis of corrugated-core FGM toroidal shell segments subjected to axial loads using the first-order shear deformation theory</i> |     |
| Do Thi Kieu My, Dang Thuy Dong and Vu Hoai Nam .....                                                                                                | 256 |
| 26. <i>Nonlinear vibration of FG-CNTRC cylindrical panels with corrugated core using the FSDT</i>                                                   |     |
| Vu Minh Duc, Tran Ngoc Hung and Nguyen Thi Phuong .....                                                                                             | 266 |
| 27. <i>Nonlinear buckling behavior of FG-CNTRC cylindrical shells stiffened by spiral FG-CNTRC stiffeners under external pressure</i>               |     |
| Nguyen Van Tien, Vu Minh Duc, Nguyen Minh Khoa and Vu Hoai Nam .....                                                                                | 275 |
| 28. <i>Đánh giá mới các hệ số đàn hồi cho một lớp vật liệu đa tinh thể Tetragonal</i>                                                               |     |
| Vũ Lâm Đông và Phạm Đức Chính .....                                                                                                                 | 285 |

## Phân tích ứng xử uốn của tấm vật liệu xốp đặt trên nền đàn hồi Pasternak trong môi trường nhiệt

Nguyễn Văn Long<sup>1,2,\*</sup>, Trần Minh Tú<sup>1,2</sup>, Lê Thanh Hải<sup>2,3</sup> và Phan Xuân Thực<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, Số 55 đường Giải Phóng, Hai Bà Trưng, Hà Nội

<sup>2</sup>Nhóm nghiên cứu Cơ học vật liệu và kết cấu tiên tiến (MAMS), Đại học Xây dựng Hà Nội

<sup>3</sup>Trường Đại học Vinh, Số 182 Lê Duẩn, thành phố Vinh, Nghệ An

\*Email: longnv@huce.edu.vn

**Tóm tắt.** Bài báo sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba Reddy để phân tích ứng xử uốn trong tấm bằng vật liệu xốp đặt trên nền đàn hồi Pasternak dưới tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt. Mô hình vật liệu xốp với ba dạng phân bố lỗ rỗng khác nhau: đều, không đều đối xứng và không đều bất đối xứng được xem xét. Các thành phần chuyển vị, biến dạng, ứng suất và nội lực của tấm chữ nhật, liên kết khớp trên các cạnh đã được xác định bằng cách sử dụng dạng nghiệm Navier. Sau khi thực hiện ví dụ kiểm chứng đối với tấm bằng vật liệu đẳng hướng và vật liệu rỗng, ảnh hưởng của tham số vật liệu, kích thước hình học, nền đàn hồi và tải cơ-nhiệt đến độ võng được khảo sát qua các ví dụ số.

**Từ khóa:** Tấm vật liệu xốp, ứng xử uốn, lý thuyết biến dạng cắt bậc ba, tải cơ-nhiệt, nền đàn hồi.

### 1. Mở đầu

Vật liệu xốp hay vật liệu rỗng (FGP - Functionally Graded Porous Materials) được sử dụng rộng rãi trong nhiều ngành công nghiệp như: đóng tàu, giao thông vận tải, hàng không vũ trụ, xây dựng dân dụng,... Trong đó các lỗ rỗng phân bố theo một quy luật nhất định, có thể không thay đổi hoặc biến đổi liên tục theo một phương bất kỳ trong kết cấu. Đây là loại vật liệu nhẹ, có khả năng hấp thụ năng lượng tốt, nên thường được sử dụng để chế tạo các kết cấu sandwich, tấm tường, tấm cách âm, cách nhiệt và hấp thụ năng lượng. Với tiềm năng ứng dụng như vậy nên các nghiên cứu về ứng xử cơ học của các kết cấu sử dụng vật liệu xốp nói chung và tấm, vỏ bằng vật liệu xốp nói riêng thu hút được sự quan tâm của các nhà khoa học trong và ngoài nước.

Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và lý thuyết tấm cổ điển Trần Minh Tú và cs. [1-6] đã phân tích ứng xử tĩnh, ổn định và sau ổn định của tấm bằng vật liệu xốp, các tính toán được thực hiện với hệ tọa độ quy chiếu đi qua mặt trung bình hoặc mặt trung hoà. Các khảo sát số cho thấy ảnh hưởng không thể bỏ qua của tham số vật liệu, kích thước hình học và tham số nền đàn hồi đến đối tượng khảo sát. Magnucka-Blandzi [7] phân tích tĩnh và xác định lực tới hạn cho tấm tròn bằng vật liệu xốp liên kết khớp trên chu tuyến chịu tải trọng uốn đối xứng trục và tải nén phân bố đều trong mặt trung bình. Magnucki và cs. [8] khảo sát ứng xử uốn, và xác định lực tới hạn của tấm chữ nhật bằng vật liệu xốp chịu nén trong mặt trung bình. Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba (Third-Order Shear Deformation Plate Theory - TSDT), Arani và cs. [9] phân tích dao động tự do của tấm vật liệu xốp trên nền đàn hồi Winkler. Leclaire [10] phân tích dao động riêng của tấm mỏng chữ nhật bằng vật liệu xốp ở trạng thái bão hoà chất lỏng.

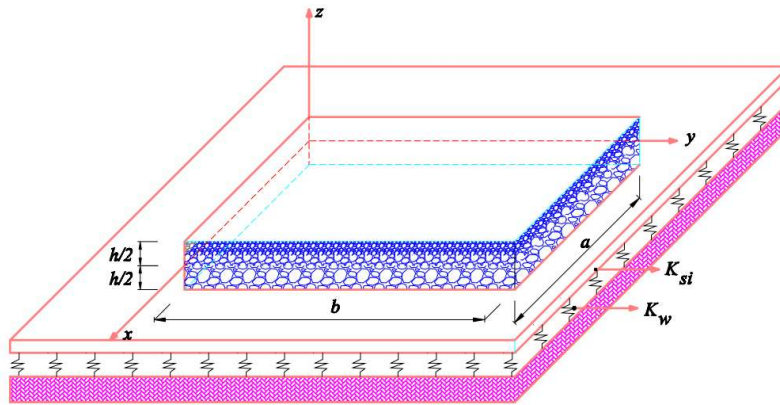
Phân tích ảnh hưởng của nhiệt độ đến sự làm việc của kết cấu trong môi trường nhiệt độ cao, luôn là vấn đề nghiên cứu có tính thực tiễn cao. Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, có kể đến thành phần biến dạng phi tuyến von Kármán, Reddy và cs. [11] phân tích tĩnh và động tấm P-FGM (vật liệu có cơ tính biến thiên) có kể đến ảnh hưởng của nhiệt độ bằng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH). Na và Kim [12] sử dụng phương pháp PTHH-3D, phân tích ứng xử uốn phi tuyến của tấm FGM chịu tác dụng đồng thời của tải cơ-nhiệt. Zhao và Liew [13] phân tích phi tuyến tấm FGM chịu tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt bằng phương pháp kp-Ritz không lưới (mesh-

free kp-Ritz method). Áp dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba (Third-Order Shear Deformation Plate Theory - TSDT) và hàm ứng suất, Dục và cs. [14] phân tích ổn định nhiệt phi tuyến của tấm FGM trên nền đàn hồi. Trên cơ sở lý thuyết TSDT và sử dụng kỹ thuật hàm phạt (perturbation technique), Yang và Shen [15] phân tích phi tuyến ứng xử uốn của tấm FGM chịu tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt. Cong và cs. [16] sử dụng lý thuyết TSDT, phân tích ổn định cơ-nhiệt phi tuyến và sau ổn định của tấm FGM có vi bọt rỗng, đặt trên nền đàn hồi.

Có thể thấy rằng các nghiên cứu về tấm vật liệu xốp chịu tải trọng cơ-nhiệt còn chưa nhiều, chủ yếu mới dừng lại ở các bài toán phân tích tĩnh, dao động và ổn định mà không xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ. Do vậy, mục đích của bài báo là sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba (TSDT) và dạng nghiệm Navier để phân tích ứng xử tĩnh của tấm bằng vật liệu xốp liên kết khớp trên chu tuyến đặt trong môi trường nhiệt. Ảnh hưởng của ba dạng phân bố lỗ rỗng: đều, không đều đối xứng và bất đối xứng, hệ số mật độ lỗ rỗng, dạng tải trọng uốn, kích thước hình học, nền đàn hồi và tải trọng cơ-nhiệt độ đến độ võng của tấm FGP sẽ được khảo sát.

## 2. Mô hình tấm bằng vật liệu xốp

Xét tấm chữ nhật FGP có chiều dày  $h$ , kích thước theo phương các trục  $x, y$  là  $a$  (chiều dài),  $b$  (chiều rộng). Tấm được đặt trên nền đàn hồi Pasternak (Hình 1) với các hệ số nền:  $K_w$  - hệ số độ cứng uốn (Winkler stiffness),  $K_{si}(i = x, y)$  - hệ số độ cứng cắt (shear stiffness).



Hình 1. Mô hình tấm chữ nhật FGP trên nền đàn hồi Pasternak

Các hằng số vật liệu ( $P$ ) được giả thiết phụ thuộc nhiệt độ và có thể biểu diễn [17]:

$$P = P_0 \left( P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right) \quad (1)$$

với  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2$  và  $P_3$  là các hệ số của nhiệt độ  $T$  (độ Kelvin);  $T = T_0 + \Delta T$ ,  $T_0 = 300$  K (nhiệt độ ban đầu).

Trong bài báo này, Hệ số Poisson và hệ số giãn nở nhiệt được coi là không thay đổi theo tọa độ chiều dày:  $\nu(z) = \text{const}$ ;  $\alpha(z) = \text{const}$  [18]. Trong khi các hằng số vật liệu: mô đun đàn hồi kéo - nén và mô đun đàn hồi trượt biến thiên liên tục theo chiều dày tấm, phụ thuộc vào mật độ phân bố lỗ rỗng [19, 20]:

Phân bố đều:

$$\{E(T), G(T)\} = \{E_1(T), G_1(T)\} (1 - e_0 \chi); \quad \chi = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left( \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 \quad (2)$$

$$\text{Phân bố đối xứng: } \{E(z, T), G(z, T)\} = \{E_1(T), G_1(T)\} \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (3)$$

$$\text{Phân bố bất đối xứng: } \{E(z, T), G(z, T)\} = \{E_1(T), G_1(T)\} \left[ 1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (4)$$

trong đó  $E_1(T), G_1(T)$  lần lượt là các giá trị lớn nhất của môđun đàn hồi kéo - nén và môđun đàn hồi trượt;  $E_2(T), G_2(T)$  là các giá trị nhỏ nhất tương ứng  $G_i = E_i / [2(1 + \nu)]$ .

### 3. Lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy

Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba (TSDT), các thành phần chuyển vị  $u, v, w$  của điểm bất kỳ có tọa độ  $(x, y, z)$  trong không gian tám [21]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) - c_1 z^3 \left[ \theta_x(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \right]; \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) - c_1 z^3 \left[ \theta_y(x, y) + \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \right]; \quad w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

trong đó:  $c_1 = 4/3h^2$ ;  $u_0, v_0, w_0$  là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình theo các phương  $x, y, z$ ;  $\theta_x, \theta_y$  là các góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh hai trục  $y, x$ .

Các thành phần biến dạng tuyến tính nhận được từ quan hệ biến dạng - chuyển vị:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \kappa_x^* \\ \kappa_y^* \\ \kappa_{xy}^* \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{Bmatrix} \quad (6)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{Bmatrix} = -3c_1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix}; \\ \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \kappa_x^* \\ \kappa_y^* \\ \kappa_{xy}^* \end{Bmatrix} = -c_1 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Các thành phần ứng suất được xác định từ định luật Hooke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \alpha T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

trong đó:  $Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}$ ,  $Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}$ ,  $Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$ .

Tích phân các thành phần ứng suất theo chiều dày của tấm ta nhận được các thành phần nội lực:

$$\begin{Bmatrix} N_x & M_x & M_x^* \\ N_y & M_y & M_y^* \\ N_{xy} & M_{xy} & M_{xy}^* \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z & z^3 \end{bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix} Q_x & Q_x^* \\ Q_y & Q_y^* \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z^2 \end{bmatrix} dz \quad (8)$$

Liên hệ giữa nội lực và biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_x^* \\ M_y^* \\ M_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & E_{11} & E_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 & E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & E_{66} \\ D_{11} & D_{12} & 0 & E_{11} & E_{12} & 0 & G_{11} & G_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & E_{12} & E_{22} & 0 & G_{12} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & E_{66} & 0 & 0 & G_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \kappa_x^* \\ \kappa_y^* \\ \kappa_{xy}^* \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \\ M_x^{*T} \\ M_y^{*T} \\ M_{xy}^{*T} \end{Bmatrix}; \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_x^* \\ Q_y^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} & 0 & C_{44} \\ C_{55} & 0 & E_{55} & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 & E_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{Bmatrix}$$

trong đó:  $(A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz$ ,  $ij = 11, 12, 22, 66$ ;

$(A_{ij}, C_{ij}, E_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, z^2, z^4) dz$ ,  $ij = 44, 55$ ;

$$\begin{Bmatrix} N_x^T & M_x^T & M_x^{*T} \\ N_y^T & M_y^T & M_y^{*T} \\ N_{xy}^T & M_{xy}^T & M_{xy}^{*T} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} Q_{11} + Q_{12} \\ Q_{21} + Q_{22} \\ 0 \end{Bmatrix} \alpha \Delta T \begin{bmatrix} 1 & z & z^3 \end{bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{E \alpha \Delta T}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & z & z^3 \end{bmatrix} dz = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N^T & M^T & M^{*T} \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình cân bằng của tấm theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba có dạng [22]:

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0; \quad (10)$$

$$\delta w_0 : c_1 \left( \frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} \right) - K_w w_0 + K_{sx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + K_{sy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q = 0$$

$$\delta \theta_x : \left( \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} \right) - \bar{Q}_x = 0; \quad \delta \theta_y : \left( \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} \right) - \bar{Q}_y = 0$$

trong đó:  $\bar{M}_{ij} = M_{ij} - c_1 M_{ij}^*$ ;  $ij = x, y, xy$  và  $\bar{Q}_i = Q_i - c_2 Q_i^*$ ;  $i = x, y$ .

Thay liên hệ giữa các thành phần nội lực và chuyển vị vào (10), ta được hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị:

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - c_1 D_{11} \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \\ & + \bar{B}_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \bar{B}_{66} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N_x^T}{\partial x}; \\ & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - c_1 D_{22} \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \\ & + (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + \bar{B}_{66} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + \bar{B}_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} = \frac{\partial N_y^T}{\partial y}; \\ & c_1 D_{11} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} \right) + c_1 D_{11} \left( \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) - c_1^2 G_{11} \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) \\ & + (\bar{A}_{44}^s - c_2 \bar{C}_{44}^s) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + c_1 \bar{E}_{11} \left( \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} \right) + (\bar{A}_{55}^s - c_2 \bar{C}_{55}^s) \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + c_1 \bar{E}_{11} \left( \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} \right) \\ & + (\bar{A}_{44}^s - c_2 \bar{C}_{44}^s) \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - K_w w_0 + K_{sx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + K_{sy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + q = c_1 \left( \frac{\partial^2 M_x^{*T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^{*T}}{\partial y^2} \right); \quad (11) \\ & \bar{B}_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \bar{B}_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + (\bar{C}_{11} - c_1 \bar{E}_{11}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \\ & + (\bar{C}_{66} - c_1 \bar{E}_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + (c_2 \bar{C}_{55}^s - \bar{A}_{55}^s) \theta_x + (\bar{C}_{12} - c_1 \bar{E}_{12}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \\ & + (\bar{C}_{66} - c_1 \bar{E}_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} - c_1 \bar{E}_{11} \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) + (c_2 \bar{C}_{55}^s - \bar{A}_{55}^s) \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial M_x^T}{\partial x} - c_1 \frac{\partial M_x^{*T}}{\partial x}; \\ & \bar{B}_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \bar{B}_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \bar{B}_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \bar{B}_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (\bar{C}_{66} - c_1 \bar{E}_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \\ & + (\bar{C}_{12} - c_1 \bar{E}_{12}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + (\bar{C}_{66} - c_1 \bar{E}_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + (\bar{C}_{22} - c_1 \bar{E}_{22}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} \\ & + (c_2 \bar{C}_{44}^s - \bar{A}_{44}^s) \theta_y - c_1 \bar{E}_{11} \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) + (c_2 \bar{C}_{44}^s - \bar{A}_{44}^s) \frac{\partial w_0}{\partial y} = \frac{\partial M_y^T}{\partial y} - c_1 \frac{\partial M_y^{*T}}{\partial y} \end{aligned}$$



trong đó:  $\bar{B}_{ij} = B_{ij} - c_1 D_{ij}$ ;  $\bar{C}_{ij} = C_{ij} - c_1 E_{ij}$ ;  $\bar{E}_{ij} = E_{ij} - c_1 G_{ij}$ ;  $ij = 11, 12, 22, 66$ ;

$\bar{A}_{ij}^s = A_{ij} - c_2 C_{ij}$ ;  $\bar{C}_{ij}^s = C_{ij} - c_2 E_{ij}$ ;  $ij = 44, 55$ .

#### 4. Lời giải giải tích

Với tấm chữ nhật bốn biên tựa khớp có chiều dài  $a$ , chiều rộng  $b$ , các điều kiện biên có dạng:

$$\text{Tại } x = 0 \text{ và } x = a: v_0 = 0, w_0 = 0, \theta_y = 0, N_x = 0, M_x^* = 0, \bar{M}_x = 0; \quad (12)$$

$$\text{Tại } y = 0 \text{ và } y = b: u_0 = 0, w_0 = 0, \theta_x = 0, N_y = 0, M_y^* = 0, \bar{M}_y = 0.$$

Khai triển các thành phần chuyển vị và tải trọng cơ-nhiệt theo dạng nghiệm Navier để thỏa mãn các điều kiện biên (12):

$$\begin{aligned} \{u_0(x, y) \quad \theta_x(x, y)\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{U_{mn} \quad \Phi_{mn}\} \cos \lambda x \sin \mu y; \\ \{v_0(x, y) \quad \theta_y(x, y)\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{V_{mn} \quad \Psi_{mn}\} \sin \lambda x \cos \mu y; \\ w_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y; \quad q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y; \\ \{N^T \quad M^T \quad M^{*T}\} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{N_0^T \quad M_0^T \quad M_0^{*T}\} \sin \lambda x \sin \mu y; \end{aligned} \quad (13)$$

Thay (13) vào hệ phương trình cân bằng theo chuyển vị nhận được từ (11); nhóm các hệ số, hệ phương trình cân bằng được đưa về dạng ma trận,  $\forall m, n$ :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Phi_{mn} \\ \Psi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \\ F_3^T \\ F_4^T \\ F_5^T \end{Bmatrix}; \quad (14)$$

trong đó:  $s_{11} = A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2$ ;  $s_{12} = (A_{12} + A_{66})\lambda\mu$ ;  $s_{13} = -c_1 D_{11}\lambda(\lambda^2 + \mu^2)$ ;  $s_{14} = \bar{B}_{11}\lambda^2 + \bar{B}_{66}\mu^2$ ;

$s_{15} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{66})\lambda\mu$ ;  $s_{22} = A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2$ ;  $s_{23} = -c_1 \mu D_{22}(\lambda^2 + \mu^2)$ ;  $s_{24} = (\bar{B}_{21} + \bar{B}_{66})\lambda\mu$ ;

$s_{25} = \bar{B}_{66}\lambda^2 + \bar{B}_{22}\mu^2$ ;  $s_{33} = c_1^2 G_{11}(\lambda^2 + \mu^2)^2 + (\bar{A}_{44} - c_2 \bar{C}_{44})(\lambda^2 + \bar{A}_{44}\mu^2) + K_w + K_{sx}\lambda^2 + K_{sy}\mu^2$ ;

$s_{34} = (\bar{A}_{55} - c_2 \bar{C}_{55})\lambda - c_1 E_{11}\lambda(\lambda^2 + \mu^2)$ ;  $s_{35} = (\bar{A}_{44} - c_2 \bar{C}_{44})\mu - c_1 E_{22}\mu(\lambda^2 + \mu^2)$ ;

$s_{44} = \bar{A}_{55} - c_2 \bar{C}_{55} + \bar{C}_{11}\lambda^2 + \bar{C}_{66}\mu^2 - c_1(\bar{E}_{11}\lambda^2 + \bar{E}_{66}\mu^2)$ ;  $s_{45} = (\bar{C}_{12} + \bar{C}_{66})\lambda\mu - c_1(\bar{E}_{12} + \bar{E}_{66})\lambda\mu$ ;

$s_{55} = \bar{A}_{44} - c_2 \bar{C}_{44} + \bar{C}_{66}\lambda^2 + \bar{C}_{22}\mu^2 - c_1(\bar{E}_{66}\lambda^2 + \bar{E}_{22}\mu^2)$ ;  $F_1^T = \lambda N_0^T$ ;  $F_2^T = \mu N_0^T$ ;

$F_3^T = c_1(\lambda^2 + \mu^2)M_0^{*T}$ ;  $F_4^T = \lambda(M_0^T - c_1 M_0^{*T})$ ;  $F_5^T = \mu(M_0^T - c_1 M_0^{*T})$ ;

Nghiệm của hệ phương trình đại số (14) là vectơ chuyển vị  $\{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \Phi_{mn}, \Psi_{mn}\}$ ; từ đó xác định được các phần chuyển vị, biến dạng, ứng suất và nội lực cho bài toán phân tích tĩnh.

## 5. Kết quả số và thảo luận

Trên cơ sở lý thuyết đã trình bày ở trên, các tác giả đã viết code chương trình máy tính trên nền Matlab để khảo sát ứng xử tĩnh của tấm chữ nhật FGP bốn biên tựa khớp trong môi trường nhiệt. Vật liệu bột kim loại (SUS304) với các hệ số phụ thuộc nhiệt độ được cho trong Bảng 1.

Bảng 1. Các hệ số phụ thuộc nhiệt độ của vật liệu thuần nhất [23]

| Vật liệu | Hằng số        | $P_0$     | $P_{-1}$ | $P_1$     | $P_2$     | $P_3$ | $P(T = 300 \text{ K})$ |
|----------|----------------|-----------|----------|-----------|-----------|-------|------------------------|
| SUS304   | $E$ (Pa)       | 201,04e+9 | 0        | 3,079e-4  | -6,534e-7 | 0     | 207,7877e+9            |
|          | $\alpha$ (1/K) | 12,330e-6 | 0        | 8,086e-4  | 0         | 0     | 15,321e-6              |
|          | $\nu$          | 0,3262    | 0        | -2,002e-4 | 3,797e-7  | 0     | 0,3178                 |

### 5.1. Ví dụ kiểm chứng

Xét tấm vuông đẳng hướng ( $b = a = 100h$ ) liên kết khớp 4 cạnh dưới tác dụng của trường nhiệt phân bố theo quy luật hàm sin ở mặt trên tấm và thay đổi tuyến tính theo chiều dày tấm:

$\Delta T = T_1 z \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ . Trong bài toán này, cơ tính của tấm được giả thiết không phụ thuộc nhiệt độ:  $E = \text{const}$ ;  $\alpha = \text{const}$ ;  $\nu = 0,25$ . Các công thức không thứ nguyên được sử dụng bao gồm:

$$\hat{w} = \frac{1}{\alpha a^2 T_1} w_0 \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right); \quad \hat{\sigma}_i = \frac{1}{h E \alpha T_1} \sigma_i \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right); \quad i = x, y, xy \quad (15)$$

Độ võng và các thành phần ứng suất không thứ nguyên của tấm được tính toán và trình bày như trong Bảng 2. Có thể nhận thấy, các kết quả thu được trong bài báo với  $a/h = 100$  hoàn toàn trùng khớp với kết quả của Reddy [21], cũng sử dụng nghiệm Navier nhưng là lý thuyết tấm cổ điển.

Bảng 2. Kiểm chứng độ võng và ứng suất của tấm đẳng hướng dưới tác dụng của tải trọng nhiệt

| Nguồn          | $\hat{w}$     | $\hat{\sigma}_x$ | $\hat{\sigma}_y$ | $\hat{\sigma}_{xy}$ |
|----------------|---------------|------------------|------------------|---------------------|
| Reddy [21]     | 0,0633        | -0,25            | -0,25            | -0,25               |
| <b>Bài báo</b> | <b>0,0633</b> | <b>-0,25</b>     | <b>-0,25</b>     | <b>-0,25</b>        |

Bảng 3. thể hiện kết quả độ võng không thứ nguyên  $\tilde{w} = \frac{E_1 h^3}{q_0 a^4} w_0 \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$  của tấm vuông

bằng vật liệu xốp, phân bố không đều bất đối xứng ( $E_1 = 69 \text{ GPa}$ ;  $\nu = 0,25$ ) liên kết khớp 4 cạnh, chịu tác dụng của tải trọng uốn phân bố đều  $q_0 = -10^4 \text{ Pa}$ , với các tỷ số kích thước tấm  $a/h = 5$ ; 10; 20.

Bảng 3. Kiểm chứng độ võng không thứ nguyên  $\bar{w}$  của tấm vuông rỗng

| $e_0$       | Nguồn                  | $a/h = 5$      | $a/h = 10$     | $a/h = 20$     |
|-------------|------------------------|----------------|----------------|----------------|
| $e_0 = 0$   | Ebrahim và Habibi [24] | 0,05398        | 0,04774        | 0,04618        |
|             | <b>Bài báo</b>         | <b>0,05453</b> | <b>0,04791</b> | <b>0,04625</b> |
| $e_0 = 0,2$ | Ebrahim và Habibi [24] | 0,06120        | 0,05405        | 0,05226        |
|             | <b>Bài báo</b>         | <b>0,06213</b> | <b>0,05450</b> | <b>0,05259</b> |

Các kết quả của bài báo được so sánh với Ebrahimi và Habibi [24] cũng sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy nhưng theo phương pháp Phần tử hữu hạn [25]. Rõ ràng là, với cả 3 giá trị của tỷ số kích thước tấm  $a/h$ , các kết quả của bài báo đều phù hợp với kết quả của Ebrahim và Habibi.

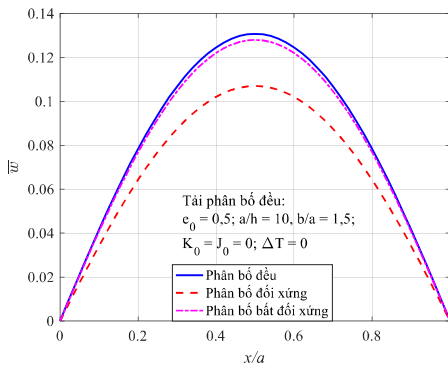
## 5.2. Khảo sát ảnh hưởng của các tham số vật liệu, hình học, nhiệt độ và nền đàn hồi lên ứng xử uốn của tấm chữ nhật vật liệu xốp

Xét tấm chữ nhật vật liệu xốp (SUS304 foam) làm việc trong môi trường nhiệt, liên kết khớp 4 cạnh, đặt trên nền đàn hồi, chịu tác dụng của tải trọng phân bố. Các công thức không thứ nguyên sử dụng dưới dạng [26, 27]:

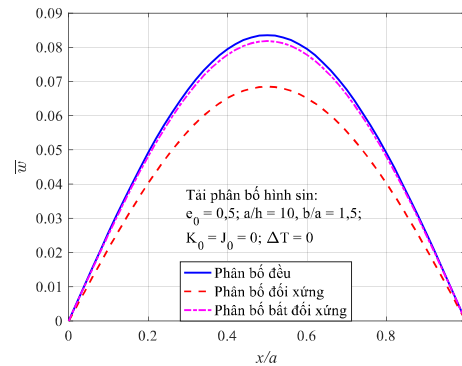
$$\{\bar{w}(x), w^*\} = \frac{E_s h^3}{q_0 a^4} \left\{ w\left(x, \frac{b}{2}\right), w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \right\}; K_0 = \frac{K_w a^4}{E_s h^3}; J_0 = \frac{K_{sx} a^2}{E_s h^3 \nu_s} = \frac{K_{sy} b^2}{E_s h^3 \nu_s}; q_0 = \alpha_s E_s \quad (16)$$

trong đó  $E_s$ ,  $\nu_s$ ,  $\alpha_s$  tương ứng là giá trị của  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  của vật liệu thuần nhất ở nhiệt độ phòng  $T = 300$  K.

Biến thiên độ võng  $\bar{w}$  tại mặt cắt  $y = b/2$  của tấm chữ nhật vật liệu xốp với ba quy luật phân bố tải trọng khác nhau chịu hai trường hợp tải trọng uốn phân bố, được thể hiện bằng các đồ thị trên Hình 2. Có thể thấy rằng, quy luật phân bố tải trọng đã ảnh hưởng đáng kể lên độ võng, trong cả hai trường hợp: tải phân bố đều và tải phân bố hình sin. Phân bố tải trọng không đều đối xứng có độ võng nhỏ hơn đáng kể so với hai quy luật phân bố đều và phân bố không đều bất đối xứng (hai quy luật phân bố đều và bất đối xứng cho kết quả độ võng khác nhau không nhiều). Ngoài ra, với cùng cấu hình vật liệu, tải phân bố đều luôn có độ võng lớn hơn so với tải phân bố hình sin. Ví dụ như, trong trường hợp phân bố đều: tải phân bố hình sin có  $\bar{w}_{\max} = 0,0836$  trong khi đó tải phân bố đều có  $\bar{w}_{\max} = 0,1307$  (độ võng tăng 56,45%).

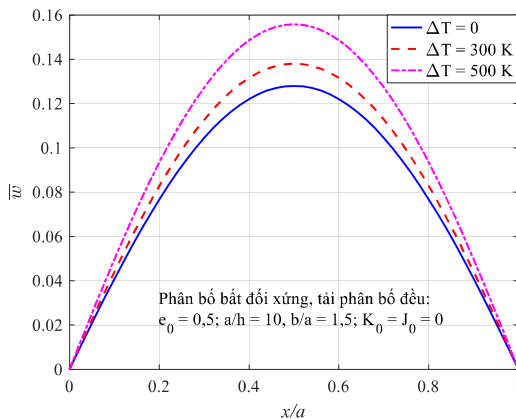


(a) Tải phân bố đều

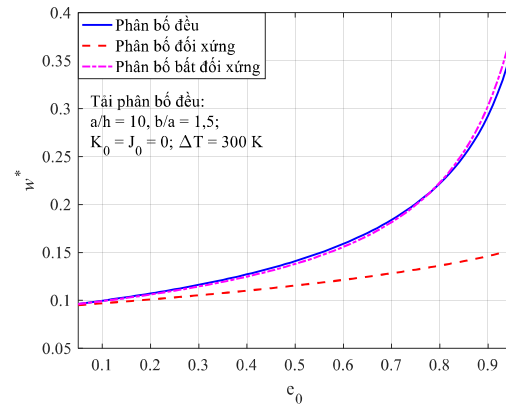


(b) Tải phân bố hình sin

Hình 2. Biến thiên độ võng  $\bar{w}$  của tấm với các quy luật phân bố tải trọng khác nhau



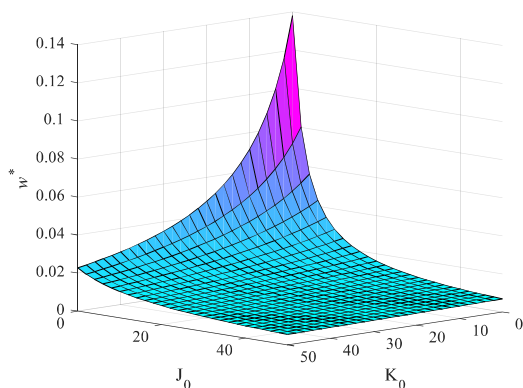
Hình 3. Biến thiên độ võng  $\bar{w}$  của tấm với các mức thay đổi nhiệt độ  $\Delta T$  khác nhau



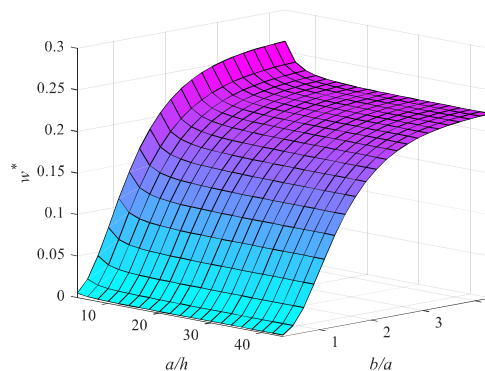
Hình 4. Ảnh hưởng của hệ số lệch và quy luật phân bố tải trọng lên độ võng  $\bar{w}$  của tấm

Hình 3 là đồ thị khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ đến độ võng không thứ nguyên  $\bar{w}$  của tấm xốp với phân bố lỗ rỗng bất đối xứng tại mặt cắt  $y = b/2$ . Kết quả trên đồ thị cho thấy độ võng không thứ nguyên của tấm tăng khi tăng nhiệt độ môi trường  $\Delta T$ . Chẳng hạn như, khi  $\Delta T = 0$ :  $\bar{w}_{\max} = 0,1280$ , và khi tăng nhiệt độ môi trường lên khi  $\Delta T = 500$  K:  $\bar{w}_{\max} = 0,1558$  (độ võng tăng 21,75%).

Hình 4 là đồ khảo ảnh hưởng của hệ số rỗng  $e_0$  lên độ võng không thứ nguyên  $w^*$  của tấm xốp cho ba trường hợp phân bố lỗ rỗng. Rõ ràng là, khi mật độ lỗ rỗng tăng, độ cứng của tấm giảm dẫn đến độ võng tăng; hệ số rỗng càng lớn thì ảnh hưởng của dạng phân bố càng rõ rệt. Tấm phân bố lỗ rỗng không đều đối xứng mang lại hiệu quả tốt nhất khi đem lại khả năng chống uốn cao nhất cho tấm so với hai quy luật phân bố còn lại và do đó luôn cho kết quả độ võng nhỏ nhất.



Hình 5. Ảnh hưởng của nền đàn hồi lên độ võng  $\bar{w}$  của tấm xốp phân bố bất đối xứng



Hình 6. Ảnh hưởng của kích thước hình học lên độ võng  $\bar{w}$  của tấm xốp phân bố bất đối xứng

Đồ thị so sánh ảnh hưởng của các tham số nền đàn hồi lên độ võng không thứ nguyên  $w^*$  của tấm vật liệu xốp, phân bố bất đối xứng ( $a/h = 10$ ,  $b/a = 1,5$ ;  $e_0 = 0,5$ ;  $\Delta T = 300$  K; tải phân bố đều) được thể hiện trên Hình 5. Có thể thấy rằng: khi tăng các hệ số nền đàn hồi (tăng  $K_0$ ,  $J_0$ ) làm cho độ cứng của tấm tăng, dẫn đến độ võng của tấm giảm; độ võng  $w^*$  giảm nhanh khi các tham số nền  $K_0$ ,  $J_0$  tăng trong khoảng  $[0, 50]$ . Ví dụ, khi  $K_0 = J_0 = 0$ :  $w_{\max}^* = 0,1380$ , và khi các tham số nền tăng lên  $K_0 = J_0 = 50$ :  $w_{\max}^* = 0,0054$  (độ võng giảm 96,09%). Ngoài ra, chú ý rằng, khi hệ số nền Paternak đủ lớn ( $J_0 \rightarrow 50$ ), ảnh hưởng của hệ số nền Winkler gần như không đáng kể; trong khi đó độ võng vẫn giảm đáng kể khi tăng hệ số nền Pasternak mặc dù hệ số nền Winkler là lớn đáng kể ( $K_0 \rightarrow 50$ ).

Hình 6 thể hiện ảnh hưởng của kích thước hình học bao gồm tỷ số kích thước tấm  $a/h$  và tỷ số kích thước cạnh  $b/a$  lên độ võng không thứ nguyên  $w^*$  của tấm vật liệu xốp, phân bố bất đối xứng ( $K_0 = J_0 = 0$ ;  $e_0 = 0,5$ ;  $\Delta T = 300$  K; tải phân bố đều). Độ võng không thứ nguyên  $w^*$  của tấm vật liệu xốp tăng lên khi tăng tỷ số kích thước cạnh  $b/a$ ; và giảm nhẹ khi tăng tỷ số kích thước tấm  $a/h$ .

## 6. Kết luận

Bài báo xây dựng cơ sở lý thuyết và thuật toán phân tích ứng xử uốn của tấm chữ nhật vật liệu xốp đặt trên nền đàn hồi dưới tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt, sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba Reddy. Nghiệm giải tích được thiết lập cho tấm liên kết khớp trên chu tuyến cùng chương

trình tính viết trên nền Matlab được kiểm chứng, cho thấy đủ độ tin cậy. Các khảo sát số cho thấy ảnh hưởng của tham số vật liệu, tải trọng cơ-nhiệt, kích thước hình học và nền đàn hồi lên độ võng của tấm. Các kết quả khảo sát số cho thấy:

- Quy luật phân bố lỗ rỗng không đều đối xứng luôn cho kết quả độ võng nhỏ hơn so với hai quy luật phân bố còn lại;

- Khi tăng nhiệt độ môi trường, tỷ số kích thước tấm  $b/a$  hoặc tăng hệ số lỗ rỗng  $e_0$ , độ võng của tấm tăng;

- Khi tăng độ cứng của nền đàn hồi, độ cứng của kết cấu tấm tăng, độ võng của tấm giảm.

Các kết quả khảo sát thu được là tài liệu hữu ích cho công tác nghiên cứu, thiết kế, thi công và bảo trì các kết cấu tấm làm bằng vật liệu xốp trong môi trường nhiệt.

### Tài liệu tham khảo

- [1] Tu, T.M., et al., Nonlinear buckling and post-buckling analysis of imperfect porous plates under mechanical loads. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 2020. **22**(6): p. 1910-1930.
- [2] Long, N.V., T.M. Tú, and V.T.T. Trang, Phân tích phi tuyến ứng xử uốn của tấm bằng vật liệu FGM xốp đặt trên nền đàn hồi Pasternak với các điều kiện biên khác nhau có xét đến vị trí thực của mặt trung hòa. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD)-ĐH XDHN*, 2020. **14**(4V): p. 1-15.
- [3] Long, N.V., T.M. Tú, and C.T. Bình, Phân tích tĩnh tấm bằng vật liệu fgm xốp trên nền đàn hồi Pasternak theo phương pháp chuyển vị có kể đến tính phi tuyến hình học và vị trí mặt trung hòa. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCN XD)-ĐH XDHN*, 2020. **14**(5V): p. 166-179.
- [4] Hai, L.T., et al., *Post-buckling Response of Functionally Graded Porous Plates Rested on Elastic Substrate via First-Order Shear Deformation Theory*, in *Modern Mechanics and Applications*. 2022, Springer. p. 761-779.
- [5] Tung, P.T., et al. *Nonlinear bending analysis of fgp plates under various boundary conditions using an analytical approach. in Structures*. 2021. Elsevier.
- [6] Long, N.V., et al., Displacement-based and stress-based analytical approaches for nonlinear bending analysis of functionally graded porous plates resting on elastic substrate. *Acta Mechanica*, 2022. **233**(4): p. 1689-1714.
- [7] Magnucka-Blandzi, E., Axi-symmetrical deflection and buckling of circular porous-cellular plate. *Thin-Walled Structures*, 2008. **46**(3): p. 333-337.
- [8] Magnucki, K., M. Malinowski, and J. Kasprzak, Bending and buckling of a rectangular porous plate. *Steel and Composite Structures*, 2006. **6**(4): p. 319-333.
- [9] Arani, A.G., et al., Free vibration of embedded porous plate using third-order shear deformation and poroelasticity theories. *Journal of Engineering*, 2017. **2017**.
- [10] Leclaire, P., K. Horoshenkov, and A. Cummings, Transverse vibrations of a thin rectangular porous plate saturated by a fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 2001. **247**(1): p. 1-18.
- [11] Praveen, G. and J. Reddy, Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 1998. **35**(33): p. 4457-4476.
- [12] Na, K.-S. and J.-H. Kim, Nonlinear bending response of functionally graded plates under thermal loads. *Journal of Thermal Stresses*, 2006. **29**(3): p. 245-261.
- [13] Zhao, X. and K. Liew, Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009. **198**(33-36): p. 2796-2811.
- [14] Duc, N.D., D.H. Bich, and P.H. Cong, Nonlinear thermal dynamic response of shear deformable FGM plates on elastic foundations. *Journal of Thermal Stresses*, 2016. **39**(3): p. 278-297.
- [15] Yang, J. and H.-S. Shen, Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *Composites Part B: Engineering*, 2003. **34**(2): p. 103-115.
- [16] Cong, P.H., et al., Nonlinear thermomechanical buckling and post-buckling response of porous FGM plates using Reddy's HSDT. *Aerospace Science and Technology*, 2018. **77**: p. 419-428.
- [17] Touloukian, Y.S., *Thermophysical properties of high temperature solid materials*. Vol. 3. 1967: Macmillan.

- [18] Lakes, R., Cellular solid structures with unbounded thermal expansion. *Journal of Materials Science Letters*, 1996. **15**(6): p. 475-477.
- [19] Barati, M.R. and A.M. Zenkour, Investigating post-buckling of geometrically imperfect metal foam nanobeams with symmetric and asymmetric porosity distributions. *Composite Structures*, 2017. **182**: p. 91-98.
- [20] Chen, D., J. Yang, and S. Kitipornchai, Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016. **108**: p. 14-22.
- [21] Reddy, J.N., *Theory and analysis of elastic plates and shells*. 2006: CRC press.
- [22] Reddy, J., Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000. **47**(1-3): p. 663-684.
- [23] Reddy, J. and C. Chin, Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *Journal of Thermal Stresses*, 1998. **21**(6): p. 593-626.
- [24] Ebrahimi, F. and S. Habibi, Deflection and vibration analysis of higher-order shear deformable compositionally graded porous plate. *Steel and Composite Structures*, 2016. **20**: p. 205-225.
- [25] Reddy, J.N., *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. 2003: CRC press.
- [26] Thai, H.-T. and D.-H. Choi, A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation. *Composites Science and Technology*, 2011. **71**(16): p. 1850-1858.
- [27] Zenkour, A.M., The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2009. **51**(11-12): p. 869-880.

**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ**

Nhà A16 - Số 18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội

Điện thoại: Phòng Phát hành: **024.22149040**;

Phòng Biên tập: **024.37917148**;

Phòng Quản lý Tổng hợp: **024.22149041**;

Fax: **024.37910147**; Email: **nxb@vap.ac.vn**; Website: **www.vap.ac.vn**

---

**TUYỂN TẬP CÔNG TRÌNH KHOA HỌC  
HỘI NGHỊ CƠ HỌC TOÀN QUỐC LẦN THỨ XI**

**Tập 1. Cơ học Vật rắn biến dạng**

**Hội Cơ học Việt Nam**

*Chịu trách nhiệm xuất bản*

**Giám đốc, Tổng biên tập**

**PHẠM THỊ HIẾU**

*Biên tập:*

**Nguyễn Văn Vĩnh, Lê Phi Loan**

*Trình bày kỹ thuật:*

**Trần Ngọc Trung**

*Trình bày bìa:*

**Trần Ngọc Trung**

*Liên kết xuất bản: Hội Cơ học Việt Nam*

*Địa chỉ: P102, 264 Đội Cấn, Ba Đình, Hà Nội*

**ISBN: 978-604-357-084-7**

In 100 cuốn, khổ 19x26,5 cm, tại Công ty Cổ phần Khoa học & Công nghệ Hoàng Quốc Việt.

Địa chỉ: 18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội.

Số xác nhận đăng ký xuất bản: 3562-2022/CXBIPH/02-53/KHTNVN.

Số quyết định xuất bản: 78/QĐ-KHTNCN, cấp ngày 30 tháng 11 năm 2022.

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2022.





ISBN: 978-604-357-084-7



9 786043 570847

SÁCH KHÔNG BÁN