

# DAO ĐỘNG RIÊNG VÀ ĐÁP ỨNG ĐỘNG CỦA TẤM FGM CÓ VI BỌT RỖNG TRÊN NỀN ĐÀN HỒI KERR

Lê Thanh Hải<sup>a</sup>, Nguyễn Văn Long<sup>b,\*</sup>, Trần Minh Tú<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Khoa Xây dựng, Trường Đại học Vinh, số 182 đường Lê Duẩn, thành phố Vinh, Nghệ An, Việt Nam

<sup>b</sup>Khoa Xây dựng Dân dụng và Công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, số 55 đường Giải Phóng, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 22/12/2023, Sửa xong 25/3/2024, Chấp nhận đăng 12/4/2024

## Tóm tắt

Dựa trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản với bốn ẩn số chuyển vị, bài báo xây dựng lời giải Navier cho tấm FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi Kerr. Sử dụng nguyên lý Hamilton cùng với việc xem xét đến yếu tố mặt trung hòa của tấm có cơ tính thay đổi theo chiều dày, hệ phương trình chuyển động thu được có dạng đơn giản hơn so với khi tính qua mặt trung bình. Phương pháp Runge-Kutta với các điều kiện ban đầu của bài toán được áp dụng để phân tích đáp ứng chuyển vị của tấm dưới tác dụng của tải trọng động. Các ví dụ kiểm chứng cả về dao động riêng và đáp ứng động của tấm cho thấy độ tin cậy của mô hình áp dụng. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, và các tham số nền đàn hồi đến ứng xử dao động tấm được khảo sát qua các ví dụ số.

*Từ khóa:* tấm FGM có vi bọt rỗng; nền đàn hồi Kerr; phân tích dao động; biến dạng cắt bậc nhất đơn giản; lời giải Navier.

FREE VIBRATION AND DYNAMIC RESPONSE OF FUNCTIONALLY GRADED PLATES WITH POROSITIES RESTING ON KERR'S ELASTIC FOUNDATION

## Abstract

Based on the simple first-order shear deformation theory with four displacement unknowns, the free vibration and dynamic response of the FGM plate with porosities resting on Kerr's elastic foundation are presented by using Navier's solution. The equations of motion are derived from Hamilton's principle considering the neutral surface position, so it has a simpler form than when choosing a reference coordinate system located on the middle plane. The Runge-Kutta method with the initial conditions is utilized to analyze the dynamic response of the plate under excited loads. Verified examples of both the free vibration and dynamic response of the plate demonstrate the reliability of the proposed approach. The influence of material and elastic foundation parameters on plate vibrational characteristics is investigated through numerical examples.

*Keywords:* FGM plate with porosity; Kerr's elastic foundation; vibration analysis; simple first-order shear deformation theory; Navier's solution.

[https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18\(3V\)-01](https://doi.org/10.31814/stce.huce2024-18(3V)-01) © 2024 Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (ĐHXDHN)

## 1. Mở đầu

Vật liệu có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Material - FGM) được biết đến như là loại vật liệu tiên tiến, cấu thành từ hai vật liệu thành phần: gồm có khả năng kháng nhiệt tốt và kim loại có độ bền dẻo cao [1]. Do tỷ phần thể tích các vật liệu thành phần biến đổi trơn và liên tục theo một hoặc nhiều hướng trong không gian kết cấu, nên các đặc trưng cơ học của chúng có thể biểu diễn bằng một hàm liên tục theo tọa độ không gian vật liệu. Loại vật liệu này thường được sử dụng để chế tạo các chi tiết cơ khí hay cấu kiện công trình làm việc trong môi trường nhiệt độ cao do tránh được sự tập trung

\*Tác giả đại diện. Địa chỉ e-mail: [longnv@huce.edu.vn](mailto:longnv@huce.edu.vn) (Long, N. V.)

ứng suất hay bong tách lớp, điều thường xảy ra với vật liệu composite truyền thống [2]. Các ứng dụng của FGM có thể tìm thấy trong nhiều lĩnh vực khác nhau, chẳng hạn trong công nghiệp hàng không vũ trụ và trong kết cấu của lò phản ứng nhiệt hạch [3], trong công nghiệp đóng tàu, ô tô, chuyển đổi năng lượng, sinh học, ... [4]. Để nâng cao hiệu quả sử dụng, thì hiểu biết sâu về ứng xử cơ học của kết cấu sử dụng FGM là cần thiết, do vậy việc phát triển các mô hình và phương pháp tính toán các kết cấu FGM là chủ đề thu hút sự quan tâm các nhà khoa học trong và ngoài nước. Tổng quan về các mô hình và phương pháp tính áp dụng cho kết cấu tấm và vỏ FGM Thai và cs. trình bày trong [5], Swaminathan và cs. trình bày trong [6]. Các nghiên cứu cụ thể về ứng xử tĩnh, ổn định và dao động của tấm FGM là phong phú, chẳng hạn, Talha và Singh [7] phân tích ứng xử tĩnh và dao động riêng của tấm FGM bằng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT). Trên cơ sở lý thuyết tấm cổ điển, Chakraverty và Pradhan [8] đã phân tích dao động riêng của tấm FGM với các điều kiện biên khác nhau bằng phương pháp Rayleigh-Ritz. Sử dụng nghiệm Navier và lý thuyết biến dạng cắt bốn ẩn số chuyển vị, Zenkour và Radwan [9] phân tích ứng xử uốn và ổn định của tấm FGM, đặt trên nền đàn hồi và làm việc trong môi trường nhiệt. Zidi và cs. [10] phân tích ứng xử tĩnh của tấm FGM dưới tác dụng của tải trọng cơ-nhiệt-âm theo lý thuyết bốn ẩn chuyển vị cải tiến. Sử dụng các phương pháp số khác nhau (phương pháp không lưới và phương pháp PTHH), Bernardo và cs. [11] khảo sát ứng xử uốn và dao động riêng của tấm FGM theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT).

Trong các nghiên cứu kể trên, các tác giả chỉ đề cập đến FGM hoàn hảo. Tuy nhiên, trong quá trình sản xuất, trong cấu trúc FGM thường xuất hiện các vi bọt rỗng (porosity), sự có mặt của chúng làm thay đổi tính chất cơ lý của vật liệu. Đã có nhiều nghiên cứu khảo sát về ảnh hưởng dạng phân bố của vi bọt rỗng, cũng như hệ số rỗng đến ứng xử cơ học của kết cấu tấm FGM có vi bọt rỗng. Long và cs. [12] xây dựng lời giải giải tích dựa trên lý thuyết dầm Timoshenko trong phân tích ứng xử uốn phi tuyến của dầm có các điều kiện biên khác nhau. Tú và cs. [13] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản để phân tích ứng xử uốn tấm FGM có vi bọt rỗng, các khảo sát số đã đánh giá được ảnh hưởng của tham số vật liệu, kích thước hình học, nền đàn hồi đến độ võng và các thành phần ứng suất. Đặc trưng dao động của tấm FGM có vi bọt rỗng là một trong những vấn đề quan trọng, cần được quan tâm trong quá trình tính toán, thiết kế. Ảnh hưởng của vi bọt rỗng đến dao động của tấm FGM được Yousfi và cs. [14] khảo sát trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt với hàm chuyển vị dạng hàm sine và sử dụng lời giải Navier. Sử dụng phương pháp Vlasov-Galerkin, Kumar và cs. [15] nghiên cứu các đặc trưng dao động của tấm FGM có vi bọt rỗng với chiều dày thay đổi đặt trên nền đàn hồi theo lý thuyết FSDT. Merdaci và cs. [16] phân tích dao động riêng của tấm FGM có vi bọt rỗng, sử dụng HSDT và dạng nghiệm Navier. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, cũng như các tham số về kích thước hình học của tấm đến tần số dao động riêng được khảo sát qua các ví dụ số khác nhau. Rezaei và cs. [17] sử dụng lý thuyết tấm bậc nhất đơn giản, và dạng nghiệm Levy phân tích dao động tự do của tấm FGM có vi bọt rỗng. Cũng sử dụng mô hình FSDT và nghiệm Navier, Hu và Fu [18] phân tích dao động riêng của tấm FGM với các loại FGM và kiểu phân bố vi bọt rỗng khác nhau. Bằng tiếp cận giải tích và bán giải tích, Thịnh và Tùng [19] khảo sát dao động riêng và đáp ứng động của tấm FGM có vi bọt rỗng với các liên kết theo phương tiếp tuyến, sử dụng lý thuyết tấm cổ điển, có kể đến thành phần biến dạng phi tuyến von Kármán, độ không hoàn hảo hình học và cản kết cấu.

Phân tích ứng xử cơ học của kết cấu dầm/tấm/vỏ đặt trên nền đàn hồi là bài toán có ý nghĩa ứng dụng thực tế, chẳng hạn, tà vẹt đường ray tàu hỏa đặt trên nền đá, móng nhà đặt trên lớp bê tông lót, mặt đường đặt trên nền đất, ... Có nhiều mô hình nền khác nhau đã được đề xuất và được ứng dụng trong phân tích các kết cấu đặt trên nền đàn hồi. Tran và cs. [20] sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn tron (edge-based smoothed finite element method), phân tích dao động riêng của tấm FGP (functionally graded porous) đặt trên nền đàn hồi Pasternak. Với lý thuyết tựa đàn hồi 3D (quasi-3D), Kaddari và

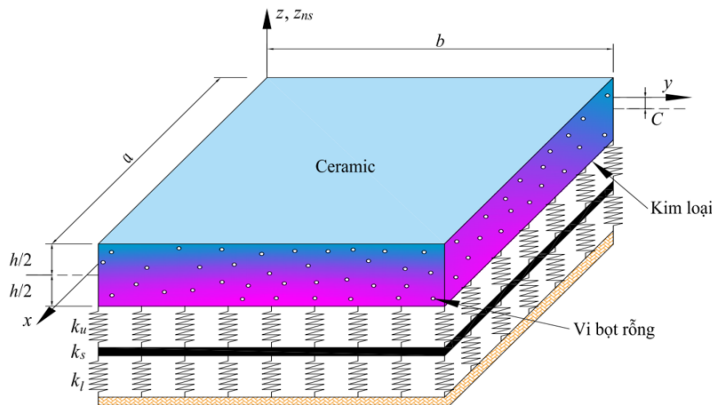
cs. [21] nghiên cứu ứng xử uốn và dao động riêng của tấm FGM đặt trên nền đàn hồi, Shahsavari và cs. [22] phân tích dao động tự do của tấm FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi. Li và cs. [23] với lý thuyết HSDT phân tích dao động riêng của tấm FGM trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr. Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc của Reddy và phương pháp phân tích đẳng hình học, Vu và cs. [24] phân tích dao động riêng của tấm FGM trên nền đàn hồi Kerr.

Từ các phân tích trên, có thể thấy rằng các nghiên cứu về ứng xử dao động riêng và đáp ứng động của tấm FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi ba hệ số nền (Kerr foundation) theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất cải tiến còn chưa được đề cập đến. Vì thế bài báo này sẽ tiến hành khảo sát dao động riêng và đáp ứng động cho tấm FGM có vi bọt rỗng, liên kết khớp trên chu vi, sử dụng dạng nghiệm Navier. Với việc sử dụng hệ quy chiếu đi qua mặt trung hòa để tính toán, tương tác màng-uốn ( $B_{ij}$ ) trong quan hệ nội lực - biến dạng bị loại bỏ, chính vì thế các biểu thức nội lực, cũng như hệ phương trình cân bằng viết theo chuyển vị trở nên đơn giản hơn, thời gian tính toán vì thế cũng được rút ngắn hơn. Sau khi kiểm chứng độ tin cậy của lời giải, các khảo sát số sẽ được thực hiện nhằm đánh giá ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng, chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$ , tỷ phần thể tích lỗ rỗng  $\alpha$ , và các tham số nền đàn hồi đến tần số dao động riêng và đáp ứng chuyển vị theo thời gian của tấm FGM có vi bọt rỗng.

## 2. Cơ sở lý thuyết

### 2.1. Tấm FGM có vi bọt rỗng

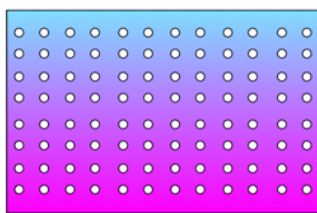
Xét tấm chữ nhật FGM có vi bọt rỗng (Hình 1), với chiều dày  $h$ , kích thước các cạnh  $a \times b$ . Tấm đặt trên nền đàn hồi Kerr với ba hệ số nền lần lượt là:  $k_u$  là hệ số độ cứng uốn của lớp đàn hồi trên;  $k_s$  là hệ số độ cứng cắt của lớp giữa;  $k_l$  là hệ số độ cứng uốn của lớp đàn hồi dưới.



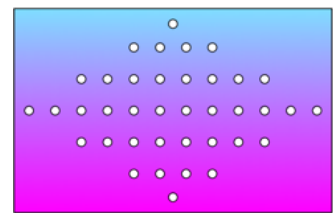
(a) Tấm FGM có vi bọt rỗng trên nền đàn hồi



(b) FGM-1



(c) FGM-2



(d) FGM-3

Hình 1. Tấm FGM có vi bọt rỗng đặt trên nền đàn hồi Kerr và ba dạng quy luật phân bố của vật liệu

FGM gồm hai pha vật liệu thành phần: ceramic và kim loại; các tính chất hiệu dụng được giả thiết biến đổi trơn dọc chiều dày tấm theo quy luật hàm lũy thừa (P-FGM). Mặt trên là mặt giàu gốm và mặt dưới là mặt giàu kim loại. Đối với tấm FGM không hoàn hảo, các lỗ rỗng phát triển theo chiều dày tấm do khuyết tật trong quá trình chế tạo. Chính vì thế, mặt trung hòa của tấm có thể không trùng với mặt trung bình. Sử dụng mặt trung hòa ( $x-y-z_{ns}$ ) là mặt phẳng tham chiếu, các tính chất hiệu dụng của tấm FGM hoàn hảo và tấm FGM không hoàn hảo với hai quy luật phân bố lỗ rỗng [25, 26] như sau:

- FGM hoàn hảo (không có vi bọt rỗng: FGM-1):

$$P(z_{ns}) = (P_c - P_m) \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^P + P_m \quad (1)$$

- FGM có vi bọt rỗng phân bố đều (FGM-2):

$$P(z_{ns}) = (P_c - P_m) \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^P + P_m - \frac{\alpha}{2} (P_c + P_m) \quad (2)$$

- FGM có vi bọt rỗng phân bố không đều - đối xứng (FGM-3), tập trung ở vị trí giữa chiều cao tấm, và giảm tuyến tính về không ở mặt trên và mặt dưới:

$$P(z_{ns}) = (P_c - P_m) \left( \frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^P + P_m - \frac{\alpha}{2} (P_c + P_m) \left( 1 - \frac{2|z_{ns} + C|}{h} \right) \quad (3)$$

trong đó:  $p$  là chỉ số tỷ lệ thể tích ( $p \geq 0$ );  $\alpha$  là tỷ phần thể tích lỗ rỗng ( $0 \leq \alpha \ll 1$ ).

$C$  là khoảng cách từ mặt trung bình đến mặt trung hòa. Vị trí mặt trung hòa của tấm FGM có vi bọt rỗng được xác định từ điều kiện [27]:

$$C = \left[ \int_{-h/2}^{h/2} E(z)z dz \right] / \left[ \int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz \right] \quad (4)$$

Để đơn giản, hệ số Poisson được giả thiết là hằng số theo chiều dày tấm [25, 28, 29]:  $\nu = \text{const}$ .

## 2.2. Các phương trình cơ bản - Hệ phương trình chủ đạo

Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất với năm ẩn số chuyển vị thường được sử dụng trong phân tích kết cấu tấm có độ dày trung bình do tính đơn giản và dễ sử dụng, mặc dù việc xác định hệ số hiệu chỉnh cắt chính xác là khá phức tạp. Để giảm ẩn số chuyển vị, Thai và Choi [30] đã đề xuất cải tiến: phân tích độ võng thành hai thành phần: độ võng do biến dạng uốn và do biến dạng cắt ngang, số ẩn chuyển vị vì thế giảm xuống còn bốn. Theo Thai và Choi, trường chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản có dạng [30]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z_{ns}, t) &= u_0(x, y, t) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} \\ v(x, y, z_{ns}, t) &= v_0(x, y, t) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} \\ w(x, y, z_{ns}, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (5)$$

trong đó:  $t$  là biến thời gian;  $u_0, v_0$  là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung hòa của tấm theo các phương  $x, y$ ;  $w_b, w_s$  tương ứng là độ võng do biến dạng uốn và độ võng do biến dạng cắt gây nên.

Các thành phần biến dạng được xác định từ quan hệ chuyển vị-biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z_{ns} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_{ns} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Quan hệ ứng suất - biến dạng có thể được viết dưới dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(z_{ns})}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Tích phân các thành phần ứng suất dọc theo chiều dày tấm ta được các thành phần nội lực:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz_{ns} \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z_{ns} dz_{ns} \\ (Q_x, Q_y) &= k \int_{-h/2-C}^{h/2-C} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz_{ns} \end{aligned} \quad (8)$$

trong đó:  $k$  là hệ số hiệu chỉnh cắt.

Thay quan hệ (7) vào biểu thức (8), ta được:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \bar{A} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \bar{D} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \bar{A}^s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{với: } \bar{A} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{E(z_{ns})}{1-\nu^2} dz_{ns}; \quad \bar{D} = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{E(z_{ns})}{1-\nu^2} z_{ns}^2 dz_{ns}; \quad \bar{A}^s = k \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)} dz_{ns}.$$

Sử dụng nguyên lý Hamilton [31], hệ phương trình chuyển động cho tấm thu được dưới dạng [30]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \quad (10)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q - f_e = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b \quad (12)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - f_e = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \quad (13)$$

trong đó:  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  là toán tử Laplace trong hệ tọa độ Cartesian cho bài toán 2 chiều.  $I_0, I_1, I_2$

là các mô men quán tính khối lượng:  $I_i = \int_{-h/2-C}^{h/2-C} \rho z_{ns}^i dz_{ns}; i = 1, 2, 3.$

Phản lực nền  $f_e$ , theo mô hình nền Kerr [22, 32] biểu diễn bởi:

$$f_e - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 f_e = \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} (w_b + w_s) - \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 (w_b + w_s) \quad (14)$$

Khi cho  $k_u \rightarrow \infty$ , ta được mô hình nền Pasternak, với phản lực nền tương ứng:

$$f_e = k_l (w_b + w_s) - k_s \nabla^2 (w_b + w_s) \quad (15)$$

Một trường hợp đặc biệt của nền Pasternak là nền Winkler khi cho  $k_s = 0$ :

$$f_e = k_l (w_b + w_s) \quad (16)$$

Áp dụng toán tử  $\left(1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2\right)$  lên các phương trình (12)–(13), kết hợp với phương trình (14) ta được:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2\right) \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q \right) \\ & - \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} (w_b + w_s) + \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 (w_b + w_s) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & = \left(1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2\right) \left[ I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b \right] \\ & \left(1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2\right) \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q \right) - \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} (w_b + w_s) \\ & + \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 (w_b + w_s) = \left(1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2\right) I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \end{aligned} \quad (18)$$

Bằng cách thế các phương trình (6) và (9) vào (10)–(11) và (17)–(18), hệ phương trình chuyển động biểu diễn theo các thành phần chuyển vị  $u_0, v_0, w_b, w_s$  thu được:

$$\bar{A} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} \quad (19)$$

$$\bar{A} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial y} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 \right) (-\bar{D} \nabla^4 w_b + q) - \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} (w_b + w_s) + \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 (w_b + w_s) \\ & = \left( 1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 \right) \left[ I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 \right) (\bar{A}^s \nabla^2 w_s + q) - \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} (w_b + w_s) + \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 (w_b + w_s) \\ & = \left( 1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 \right) I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) \end{aligned} \quad (22)$$

### 3. Lời giải Navier

Trong trường hợp tấm chữ nhật liên kết khớp trên chu tuyến, điều kiện biên có dạng sau [30]:

$$\begin{aligned} \text{Tại } x = 0, a: \quad N_x = v_0 = w_b = w_s = M_x = 0 \\ \text{Tại } y = 0, b: \quad N_y = u_0 = w_b = w_s = M_y = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Các thành phần chuyển vị được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép, thỏa mãn điều kiện biên (23):

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn}(t) \cos(\mu x) \sin(\eta y); \quad v_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn}(t) \sin(\mu x) \cos(\eta y) \\ w_b &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{bmn}(t) \sin(\mu x) \sin(\eta y); \quad w_s = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{smn}(t) \sin(\mu x) \sin(\eta y) \end{aligned} \quad (24)$$

trong đó  $u_{0mn}, v_{0mn}, w_{bmn}, w_{smn}$  là các hệ số phụ thuộc thời gian cần được xác định, và  $\mu = \frac{m\pi}{a}; \eta = \frac{n\pi}{b}$ .

Tải trọng  $q(x, y, t)$  cũng được khai triển theo chuỗi lượng giác kép:

$$q(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}(t) \sin(\mu x) \sin(\eta y) \quad (25)$$

với:

$$q_{mn}(t) = \frac{1}{4ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) \sin(\mu x) \sin(\eta y) dx dy \quad (26)$$

Khi tải trọng có dạng phân bố đều,  $q = q_0(t)$ :

$$q_{mn}(t) = \frac{16q_0(t)}{\pi^2 mn} \quad (27)$$

Thế biểu thức (24) và (25) vào (19), ta được nhận được hệ phương trình vi phân theo thời gian,  $\forall m, n$ :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} & s_{34} \\ 0 & 0 & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0mn} \\ v_{0mn} \\ w_{bmn} \\ w_{smn} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{0mn} \\ \ddot{v}_{0mn} \\ \ddot{w}_{bmn} \\ \ddot{w}_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ q_{mn} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Hay dưới dạng ma trận thu gọn:

$$[K]\{Q(t)\} + [M]\{\ddot{Q}(t)\} = \{F(t)\} \quad (29)$$

trong đó  $[K]$ ,  $[M]$ ,  $\{Q\}$ ,  $\{F\}$  tương ứng là ma trận độ cứng của kết cấu, ma trận khối lượng, véc tơ các hệ số chuyển vị và véc tơ tải trọng. Các hệ số  $s_{ij}$  và  $m_{ij}$  được xác định bởi:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \bar{A} \left( \mu^2 + \frac{1-\nu}{2} \eta^2 \right); & s_{12} = s_{21} &= \frac{1+\nu}{2} \bar{A} \mu \eta; & s_{22} &= \bar{A} \left( \frac{1-\nu}{2} \mu^2 + \eta^2 \right) \\ s_{33} &= \xi \bar{D} (\mu^2 + \eta^2)^2 + \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} + \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} (\mu^2 + \eta^2) \\ s_{34} = s_{43} &= \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} + \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} (\mu^2 + \eta^2) \\ s_{44} &= \xi \bar{A}^s (\mu^2 + \eta^2) + \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} + \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} (\mu^2 + \eta^2) \\ m_{11} = m_{22} &= I_0; & m_{13} &= -\mu I_1; & m_{23} &= \eta I_1; & m_{34} = m_{43} = m_{44} &= \xi I_0; & m_{31} &= -\xi \mu I_1 \\ m_{32} &= -\xi \eta I_1; & m_{33} &= \xi \left[ I_0 + (\mu^2 + \eta^2) I_2 \right]; & \xi &= 1 + \frac{k_s}{k_u + k_l} (\mu^2 + \eta^2) \end{aligned}$$

Hệ phương trình (30) được sử dụng để giải các bài toán phân tích tuyến tính về dao động bao gồm: dao động tự do và dao động cưỡng bức.

### 3.1. Phân tích dao động riêng

Trong phân tích dao động riêng, bỏ qua tải trọng  $q$ ; bằng cách giả thiết nghiệm chuyển vị  $\{Q\} = \{Q_0\} e^{i\omega_{mn}t}$ , ta xác định được tần số dao động riêng của tấm FGM có vi bọt rỗng từ việc giải định thức:

$$\det([K] - \omega_{mn}^2 [M]) = 0 \quad (30)$$

trong đó  $\omega_{mn}$  là tần số dao động riêng của tấm, tương ứng với dạng (mode) dao động  $(m, n)$ . Tần số dao động cơ bản được xác định bởi:  $\omega_0 = \min\{\omega_{mn}\}$ .

### 3.2. Phân tích đáp ứng động

Trong phân tích đáp ứng động, giả thiết tải trọng cưỡng bức dưới dạng tải điều hòa có biên độ  $P$  và tần số  $\Omega$ :  $q(t) = P \sin \Omega t$ . Từ đó, hệ phương trình vi phân trong công thức (29) được viết lại dưới dạng:

$$[K]\{Q(t)\} + [M]\{\ddot{Q}(t)\} = \{F_0\} \sin \Omega t \quad (31)$$

Hệ phương trình (31) được dùng để phân tích đáp ứng động lực học của tấm FGM có vi bọt rỗng. Phương pháp Runge–Kutta với các điều kiện ban đầu  $\{Q(0)\} = \{0\}$ ;  $\{\dot{Q}(0)\} = \{0\}$  sẽ được áp dụng để nhận được đáp ứng của chuyển vị theo thời gian.

## 4. Kết quả số và thảo luận

Trong phần này, trước tiên các ví dụ kiểm chứng được thực hiện cho: a) Dao động riêng của tấm FGM hoàn hảo (FGM-1); b) Dao động riêng của tấm FGM có vi bọt rỗng (FGM-2 và FGM-3); c) Đáp ứng động của tấm đẳng hướng. Tiếp theo đó, ảnh hưởng của các tham số vật liệu, hình học và nền đàn hồi đến tần số dao động riêng và đáp ứng chuyển vị của tấm sẽ được khảo sát thông qua các ví dụ số.

Vật liệu P-FGM ( $Al/Al_2O_3$ ) với tính chất các vật liệu thành phần [33] như sau:

- Ceramic ( $Al_2O_3$ ):  $E_c = 380$  GPa;  $\nu_c = 0,3$ ;  $\rho_c = 3800$  kg/m<sup>3</sup>;



- Kim loại (Al):  $E_m = 70$  GPa;  $\nu_m = 0,3$ ;  $\rho_m = 2702$  kg/m<sup>3</sup>.

Trong tất cả các tính toán và ví dụ kiểm chứng, giá trị của hệ số hiệu chỉnh cắt được lấy là  $k = 5/6$ . Các giá trị không thứ nguyên sau đây được sử dụng [22, 30]:

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}; & \bar{\omega} &= \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}} \\ K_u &= \frac{k_u a^4}{D_m}; & K_s &= \frac{k_s a^2}{D_m}; & K_l &= \frac{k_l a^4}{D_m}; & D_m &= \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (32)$$

#### 4.1. Kiểm chứng độ tin cậy của lời giải

Xét tấm FGM (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) hoàn hảo dao động tự do trên nền đàn hồi Pasternak ( $k_u \rightarrow \infty$ ) với các cặp tham số nền ( $K_l; K_s$ ) và chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  khác nhau. Các kết quả tính toán tần số dao động cơ bản không thứ nguyên  $\hat{\omega}$  của tấm ( $b/a = 1, a/h = 10$ ) được thể hiện trong Bảng 1.

Bảng 1. Tần số dao động cơ bản không thứ nguyên  $\hat{\omega}$  của tấm vuông FGM

$(K_l; K_s)$	Nguồn	$p = 0,5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 5$
(0; 0)	Thai và Choi [33]	0,0964	0,0869	0,0788	0,0740
	Bài báo	0,0963	0,0868	0,0789	0,0744
	Sai số (%)	0,10	0,12	0,13	0,54
(100; 0)	Thai và Choi [33]	0,1000	0,0911	0,0837	0,0795
	Bài báo	0,0999	0,0910	0,0837	0,0799
	Sai số (%)	0,10	0,11	0,00	0,50
(100; 100)	Thai và Choi [33]	0,1550	0,1520	0,1505	0,1515
	Bài báo	0,1549	0,1519	0,1505	0,1517
	Sai số (%)	0,06	0,07	0,00	0,13

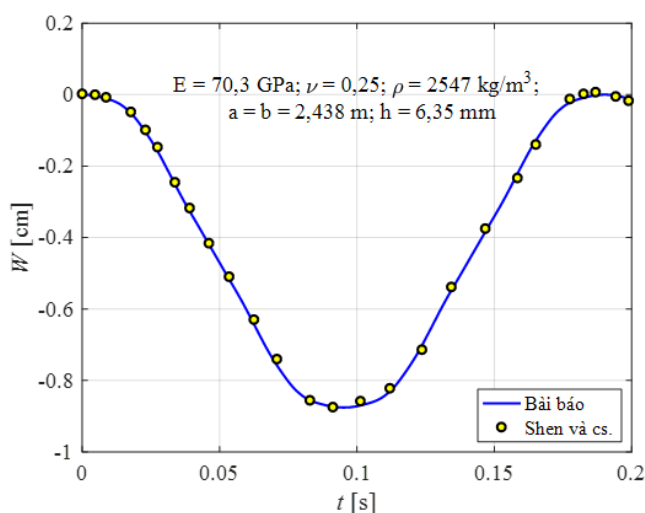
Nghiệm Navier trong bài báo được so sánh với công bố của các tác giả: Thai và Choi [33] cũng sử dụng dạng nghiệm Navier nhưng dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao cải tiến với bốn ẩn chuyển vị và tính toán trên hệ trục quy chiếu qua mặt trung bình của tấm. Có thể nhận thấy lời giải trong bài báo cho kết quả tần số dao động cơ bản rất gần với phân tích của Thai và Choi (sai lệch lớn nhất của 2 mô hình chỉ là 0,54% khi  $p = 5, K_l = K_s = 0$ ).

Tiếp theo, Bảng 2 trình bày các kết quả so sánh tần số dao động cơ bản không thứ nguyên  $\hat{\omega}$  của tấm vuông FGM (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) có vi bột rỗng giữa nghiệm Navier được xây dựng trong bài báo với nghiệm Levy và phương pháp không gian trạng thái của Demirhan và Taskin [34]. Lưu ý rằng, nghiên cứu của Demirhan và Taskin dựa trên lý thuyết biến dạng cắt đơn giản bốn ẩn chuyển vị và dạng hàm sin [35]. Dễ dàng nhận thấy, với các tham số vật liệu  $p$  và  $\alpha$  khác nhau, sai lệch giữa hai phương pháp tính là nhỏ (với sai số lớn nhất là 1,62% khi  $p = 0,1$  và  $\alpha = 0,4$ ).

Sau cùng, đáp ứng dao động của tấm vuông đẳng hướng liên kết khớp trên chu tuyến, dưới tác dụng của tải trọng bước được tính toán và kiểm chứng với lời giải theo phương pháp số của Shen và cs. [36]. Các thông số hình học và vật liệu của tấm bao gồm:  $a = b = 2,438$  m;  $h = 6,35$  mm;  $E = 70,3$  GPa,  $\nu = 0,25$  và  $\rho = 2547$  kg/m<sup>3</sup>. Tải trọng bước phân bố đều trên bề mặt tấm với cường độ  $q = 48,82$  Pa, tác động đột ngột trong khoảng thời gian từ  $t = 0$  đến  $t = 0,2$  s. Quan sát đồ thị trên Hình 2, ta thấy rằng đường cong biến thiên độ võng tại tâm tấm,  $W$  theo nghiệm giải tích của bài báo tiệm cận với kết quả của Shen và cs.

Bảng 2. Tần số dao động cơ bản không thứ nguyên  $\omega$  của tấm FGM có vi bọt rỗng ( $a/h = 10$ )

$\alpha$	Nguồn	$p = 0,1$	$p = 0,5$	$p = 1$
FGM-2				
0,2	Demirhan và Taskin [34]	0,11373	0,09719	0,08324
	Bài báo	0,11210	0,09595	0,08231
	Sai số (%)	1,43	1,28	1,12
0,4	Demirhan và Taskin [34]	0,11807	0,09592	0,07194
	Bài báo	0,11639	0,09478	0,07134
	Sai số (%)	1,42	1,19	0,83
FGM-3				
0,2	Demirhan và Taskin [34]	0,11388	0,10013	0,08859
	Bài báo	0,11232	0,09845	0,08773
	Sai số (%)	1,37	1,68	0,97
0,4	Demirhan và Taskin [34]	0,11787	0,10216	0,08991
	Bài báo	0,11596	0,10092	0,08851
	Sai số (%)	1,62	1,21	1,56



Hình 2. So sánh đường cong độ võng tại tâm tấm,  $W$  dưới tác dụng của tải trọng bước phân bố đều trên bề mặt

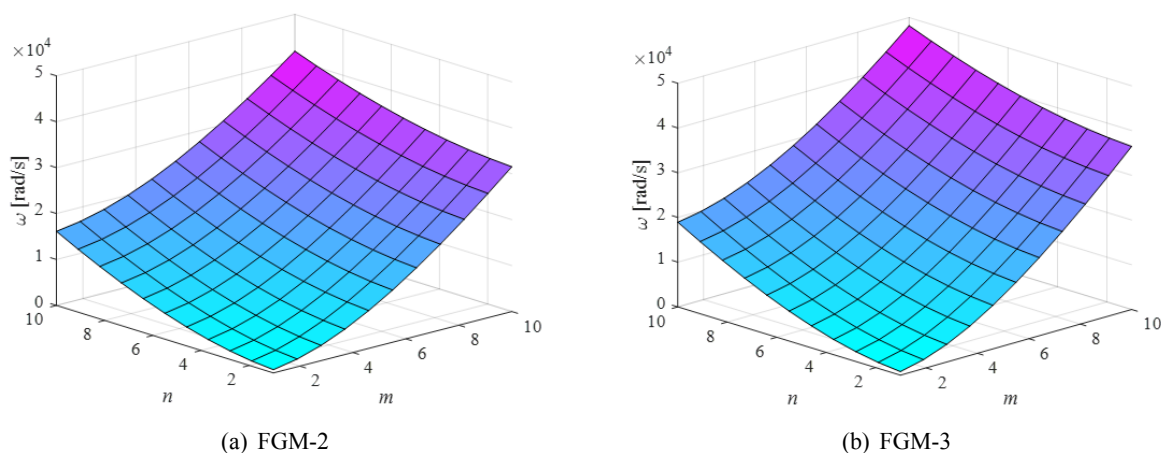
Qua 3 ví dụ kiểm chứng ở trên, bao gồm các kết quả kiểm chứng về tần số dao động riêng và đáp ứng động của tấm, có thể thấy rằng, tiếp cận giải tích cũng như mô hình tính theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản trong bài báo có độ tin cậy.

#### 4.2. Các khảo sát số

##### a. Phân tích dao động riêng

Tấm chữ nhật FGM có vi bọt rỗng được xem xét trong hai trường hợp: vi bọt rỗng phân bố đều (FGM-2) và vi bọt rỗng phân bố không đều (FGM-3). Tấm dao động tự do trong môi trường không cản với các thông số đầu vào:  $h = 0,1$  m;  $a/h = 20$ ;  $b/a = 1,5$ ;  $p = 3$ ;  $\alpha = 0,2$ ;  $K_u = K_l = 100$ ;  $K_s = 50$ . Biến thiên tần số dao động riêng với các mode dao động ( $m, n$ ) khác nhau được thể hiện trên Hình 3.

Các kết quả cho thấy, với cả 2 quy luật phân bố lỗ rỗng, khi  $m$  hoặc  $n$  tăng đều làm cho tần số dao động riêng của tấm tăng, tần số dao động cơ bản ứng với mode dao động (1, 1). Về ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng, rõ ràng là với cùng một mode dao động, phân bố không đều - đối xứng làm cho tấm dao động với tần số cao hơn so với phân bố đều. Nguyên nhân chủ yếu là do với cùng các đặc trưng  $p$  và  $\alpha$  của FGM có vi bọt rỗng, phân bố không đều - đối xứng có mô đun đàn hồi  $E$  cao hơn so với phân bố đều. Ví dụ, với  $(m, n) = (1, 1)$ , tần số cơ bản của tấm FGM-2 là  $\omega = 707,01$  rad/s, trong khi tấm FGM-3 có giá trị tương ứng là  $\omega = 795,85$  rad/s (tăng 12,57%).



Hình 3. Khảo sát ảnh hưởng của mode dao động lên tần số dao động riêng của tấm FGM có vi bọt rỗng

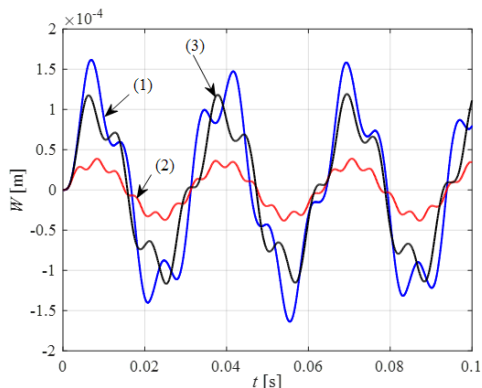
### b. Phân tích đáp ứng động

Dưới đây, tấm chữ nhật ( $h = 0,1$  m;  $a/h = 20$ ;  $b/a = 1,5$ ) FGM ( $Al/Al_2O_3$ ) có vi bọt rỗng chịu tác dụng của tải trọng cường độ điều hòa, phân bố đều trên mặt trên của tấm:  $q(x, y, t) = P \sin \Omega t$ ; với  $P = 104$  Pa;  $\Omega = 200$  rad/s. Lưu ý rằng, trong các khảo sát dưới đây, các tác giả tập trung vào phân tích độ võng tại tâm tấm:  $W(t) = w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, t\right)$ , một trong ba thành phần chuyển vị quan trọng thường được đặc biệt quan tâm của tấm chịu uốn.

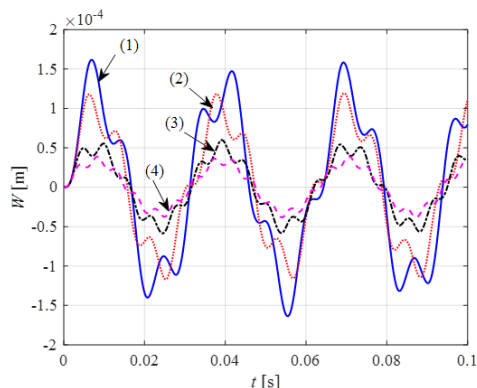
Hình 4 là đồ thị thể hiện ảnh hưởng của mô hình nền đàn hồi lên đường cong đáp ứng độ võng - thời gian của tấm FGM-3 với  $p = 3$ ;  $\alpha = 0,2$ . Ba trường hợp nền được xét đến bao gồm: (1) không nền:  $K_u = \infty, K_l = K_s = 0$ ; (2) nền Pasternak  $K_u = \infty, K_l = 100, K_s = 50$ ; (3) nền Kerr:  $K_u = \infty, K_l = 100, K_s = 50$ . Dễ dàng quan sát thấy: trong số ba mô hình nền này, nền Pasternak làm cho kết cấu tấm trở nên cứng nhất (tấm có độ võng nhỏ nhất với  $W_{\max} = 0,0389$  mm); nền Kerr do có thêm lớp lò xo đàn hồi so với nền Pasternak nên kết cấu tấm có độ cứng thấp hơn (tấm có độ võng lớn hơn so với nền Pasternak, với  $W_{\max} = 0,1193$  mm); trường hợp tấm không đặt trên nền đàn hồi, kết cấu sẽ có độ cứng nhỏ nhất (tấm có độ võng lớn nhất với  $W_{\max} = 0,1636$  mm).

Ảnh hưởng của tham số độ cứng lớp đàn hồi phía trên  $K_u$  lên đáp ứng độ võng - thời gian của tấm FGM-3:  $p = 3$ ;  $\alpha = 0,2$ ;  $K_l = 100, K_s = 50$  được thể hiện qua đồ thị trên Hình 5. Trong khảo sát này, bốn trường hợp của tham số nền đàn hồi  $K_u$  bao gồm: (1)  $K_u = 0$ ; (2)  $K_u = 100$ ; (3)  $K_u = 1000$ ; (4)  $K_u = \infty$ . Lưu ý rằng: khi  $K_u = 0$ , tương ứng với việc tấm không đặt trên nền đàn hồi; khi  $K_u = \infty$  đồng nghĩa với việc tấm đặt trên nền Pasternak. Quan sát đồ thị ta thấy, khi tăng độ cứng lớp đàn hồi phía trên (tăng  $K_u$ ), độ võng của tấm giảm. Ảnh hưởng của lớp đàn hồi phía trên là rõ ràng, chẳng hạn: khi tăng  $K_u$  từ 100 lên 1000, độ võng giảm 1,99 lần (từ  $W_{\max} = 0,1193$  mm giảm xuống  $W_{\max}$

= 0,0599); hoặc khi tăng  $K_u$  từ 0 lên  $\infty$ , độ võng giảm 4,21 lần (từ  $W_{\max} = 0,1636$  mm giảm xuống  $W_{\max} = 0,0389$  mm).



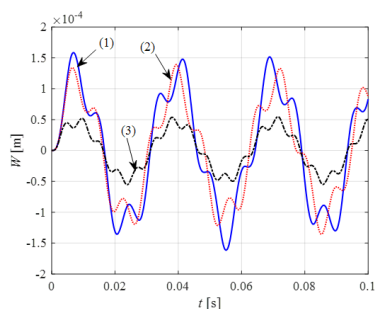
Hình 4. So sánh ảnh hưởng của mô hình nền đàn hồi lên đường cong đáp ứng độ võng - thời gian: (1) không nền; (2) nền Pasternak; (3) nền Kerr



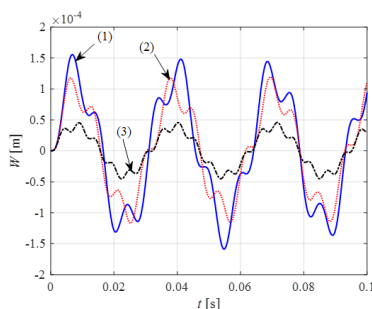
Hình 5. Ảnh hưởng của độ cứng lớp đàn hồi phía trên lên đường cong đáp ứng độ võng - thời gian: (1)  $K_u = 0$ ; (2)  $K_u = 100$ ; (3)  $K_u = 1000$ ; (4)  $K_u = \infty$

Tiếp theo, ảnh hưởng của lớp cắt so với hai lớp đàn hồi ở phía trên và phía dưới (hai lớp này được xem xét có độ cứng như nhau:  $K_u = K_l$ ) của nền Kerr như chỉ ra ở Hình 6. Các tham số vật liệu của tấm FGM rỗng loại 2 bao gồm:  $p = 3$ ;  $\alpha = 0,2$ . Ta thấy rằng: với mỗi giá trị độ cứng của lớp cắt  $K_s$ , độ cứng của các lớp đàn hồi phía trên và phía dưới làm thay đổi đáng kể độ võng; chẳng hạn như với trường hợp  $K_s = 50$ :

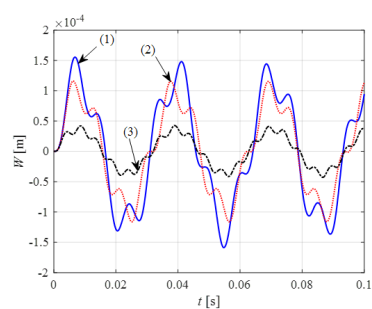
- + Khi  $K_u = K_l = 10$ , độ võng lớn nhất tại tâm tấm là  $W_{\max} = 0,1588$  mm;
- + Khi tăng độ cứng các lò xo lên  $K_u = K_l = 100$ , độ võng lớn nhất tại tâm tấm giảm xuống,  $W_{\max} = 0,1193$  mm (giảm 24,85%);
- + Khi tăng độ cứng các lò xo lên  $K_u = K_l = 1000$ , độ võng lớn nhất tại tâm tấm giảm xuống,  $W_{\max} = 0,0460$  mm (giảm 71,04%).



(a)  $K_s = 0$



(b)  $K_s = 50$



(c)  $K_s = 100$

Hình 6. Ảnh hưởng của độ cứng uốn và độ cứng cắt của các lớp đàn hồi lên đáp ứng động của tấm: (1)  $K_u = K_l = 10$ ; (2)  $K_u = K_l = 100$ ; (3)  $K_u = K_l = 1000$

Điều đặc biệt là việc tăng độ cứng của lớp cắt làm giảm độ võng, nhưng mức độ ảnh hưởng của lớp cắt phụ thuộc vào độ cứng của hai lớp đàn hồi phía trên và phía dưới:

- + Trong trường hợp độ cứng các lớp lò xo đàn hồi là nhỏ, chẳng hạn  $K_u = K_l = 10$ , khi tăng độ cứng lớp cắt từ  $K_s = 0$  lên  $K_s = 100$ , độ võng  $W_{\max}$  giảm nhẹ từ 0,1614 mm xuống 0,1587 mm (giảm 1,64%).

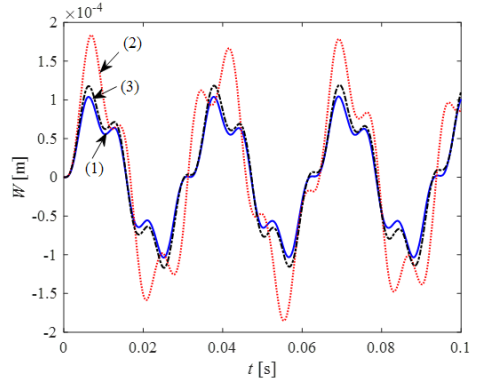
+ Trường hợp độ cứng các lớp lò xo đàn hồi đủ lớn, giả sử  $K_u = K_l = 1000$ , khi tăng độ cứng lớp cắt từ  $K_s = 0$  lên  $K_s = 100$ , độ võng  $W_{max}$  giảm đáng kể từ 0,0554 mm xuống 0,0428 mm (giảm 22,61%).

Ảnh hưởng của mô hình vật liệu và các tham số vật liệu lên đáp ứng động của tấm chữ nhật FGM rỗng trên nền đàn hồi Kerr ( $K_u = K_l = 100, K_s = 50$ ) được thể hiện qua đồ thị trên Hình 7 đến Hình 9.

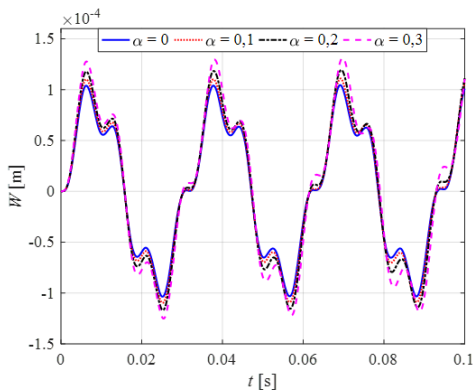
Trên Hình 7 thể hiện ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng với ba trường hợp: (1) FGM-1 (với  $p = 3$ ); (2) FGM-2 (với  $\alpha = 0,2; p = 3$ ); (3) FGM-3 (với  $\alpha = 0,2; p = 3$ ). Đồ thị này cho thấy: Tấm FGM hoàn hảo có độ võng nhỏ nhất (tấm có độ cứng lớn nhất) với  $W_{max} = 0,1045$  mm; tấm FGM rỗng loại 2 có độ võng lớn hơn một chút với  $W_{max} = 0,1193$  mm (tăng 14,22%); tấm FGM rỗng loại 1 có độ võng lớn hơn đáng kể so với loại 2,  $W_{max} = 0,1193$  mm (tăng 55,08%).

Theo đồ thị trên Hình 8, ta thấy rằng, với tấm FGM-3 ( $p = 3$ ), khi tăng tỷ phần thể tích lỗ rỗng  $\alpha$ , độ võng  $W_{max}$  của tấm tăng (do độ cứng của kết cấu tấm giảm);  $\alpha$  càng lớn thì độ võng tăng càng nhiều. Cụ thể là khi  $\alpha = 0$  thì  $W_{max} = 0,1045$  mm; và khi  $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3$  độ võng tăng lên với các giá trị tương ứng là 0,1109 mm (tăng 6,13%); 0,1193 mm (tăng 14,22%); 0,1311 mm (tăng 25,45%).

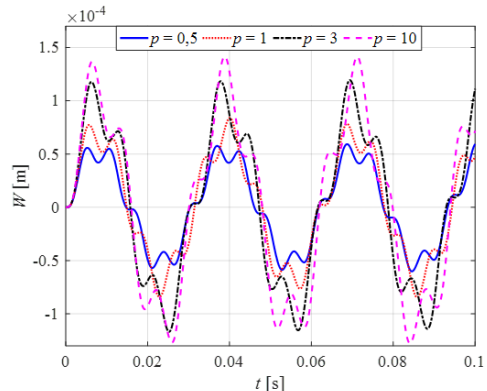
Ảnh hưởng của tham số  $p$  lên đáp ứng động của tấm là lớn hơn so với tỷ phần thể tích lỗ rỗng  $\alpha$ , như chỉ ra trên đồ thị ở Hình 9. Khi tăng  $p$  (đồng nghĩa với việc tăng hàm lượng kim loại), độ cứng của tấm giảm dẫn đến độ võng tăng; trong khoảng biến thiên của tham số  $p$  tăng từ 0,5 đến 10 thì độ võng lớn nhất tại tâm tấm  $W_{max}$  tăng từ 0,0601 mm lên 0,1417 mm (tăng 135,62%). Rõ ràng là mức độ ảnh hưởng của tham số  $p$  lên đáp ứng độ võng động lớn hơn nhiều so với tham số  $\alpha$ .



Hình 7. Ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng lên đáp ứng động của tấm: (1) FGM-1; (2) FGM-2; (3) FGM-3



Hình 8. Ảnh hưởng của tỷ phần thể tích lỗ rỗng  $\alpha$  lên đáp ứng động của tấm



Hình 9. Ảnh hưởng của chỉ số tỷ lệ thể tích  $p$  lên đáp ứng động của tấm

## 5. Kết luận

Bài báo đã sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản cùng với hệ trục ban đầu gắn với mặt trung hòa vật liệu để phân tích tần số dao động riêng và đáp ứng động tấm FGM có vi bọt rỗng trên nền đàn hồi Kerr. Kết quả kiểm chứng tần số dao động riêng và đáp ứng động trong một số trường

hợp đặc biệt cho thấy sự phù hợp của mô hình lý thuyết và nghiệm Navier đã thiết lập. Một số kết quả chính trong nghiên cứu chỉ ra rằng:

- Sự có mặt của vi bọt rỗng làm giảm đáng kể độ cứng của tấm.
- Tấm FGM có vi bọt rỗng phân bố không đều - đối xứng làm cho tấm độ cứng lớn hơn, dẫn đến tần số dao động riêng lớn hơn và độ võng nhỏ hơn so với trường hợp phân bố đều.
- Nền đàn hồi Kerr giống như sự mềm hóa nền Pasternak, việc có thêm lớp đàn hồi chịu uốn phía trên cùng so với hai lớp đàn hồi thông thường của nền Pasternak có thể làm giảm đáng kể độ võng của tấm.

### Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2021.16.

### Tài liệu tham khảo

- [1] Koizumi, M. (1997). *FGM activities in Japan*. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2):1-4.
- [2] Li, Y., Feng, Z., Hao, L., Huang, L., Xin, C., Wang, Y., Bilotti, E., Essa, K., Zhang, H., Li, Z., Yan, F., Peijs, T. (2020). *A Review on Functionally Graded Materials and Structures via Additive Manufacturing: From Multi-Scale Design to Versatile Functional Properties*. *Advanced Materials Technologies*, 5(6).
- [3] Shen, H.-S. (2016). *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*. CRC Press.
- [4] Gupta, A., Talha, M. (2015). *Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures*. *Progress in Aerospace Sciences*, 79:1-14.
- [5] Thai, H.-T., Kim, S.-E. (2015). *A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells*. *Composite Structures*, 128:70-86.
- [6] Swaminathan, K., Naveenkumar, D. T., Zenkour, A. M., Carrera, E. (2015). *Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates—A state-of-the-art review*. *Composite Structures*, 120:10-31.
- [7] Talha, M., Singh, B. N. (2010). *Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory*. *Applied Mathematical Modelling*, 34(12):3991-4011.
- [8] Chakraverty, S., Pradhan, K. K. (2014). *Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions*. *Aerospace Science and Technology*, 36: 132-156.
- [9] Zenkour, A. M., Radwan, A. F. (2020). *Bending and buckling analysis of FGM plates resting on elastic foundations in hygrothermal environment*. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 20(4).
- [10] Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M. S. A., Adda Bedia, E. A., Anwar Bég, O. (2014). *Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory*. *Aerospace Science and Technology*, 34:24-34.
- [11] Bernardo, G. M. S., Damásio, F. R., Silva, T. A. N., Loja, M. A. R. (2016). *A study on the structural behaviour of FGM plates static and free vibrations analyses*. *Composite Structures*, 136:124-138.
- [12] Van Long, N., Nguyen, V.-L., Tran, M.-T., Thai, D.-K. (2021). *Exact solution for nonlinear static behaviors of functionally graded beams with porosities resting on elastic foundation using neutral surface concept*. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 236(1):481-495.
- [13] Tú, T. M., Long, N. V., Hăng, P. T., Bình, T. V., Hiền, T. T. (2023). *Phân tích tĩnh tấm FGM có vi bọt rỗng trên nền đàn hồi Kerr theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản*. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCN XD) - ĐHXDHN*, 17(4V):49-63.
- [14] Yousfi, M., Atmane, H. A., Meradjah, M., Tounsi, A., Bennai, R. (2018). *Free vibration of FGM plates with porosity by a shear deformation theory with four variables*. *Structural Engineering and Mechanics, An Int'l Journal*, 66(3):353-368.
- [15] Kumar, V., Singh, S. J., Saran, V. H., Harsha, S. P. (2021). *Vibration characteristics of porous FGM plate with variable thickness resting on Pasternak's foundation*. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 85: 104124.

- [16] Merdaci, S., Adda, H. M., Hakima, B., Dimitri, R., Tornabene, F. (2021). [Higher-Order Free Vibration Analysis of Porous Functionally Graded Plates](#). *Journal of Composites Science*, 5(11):305.
- [17] Rezaei, A. S., Saidi, A. R., Abrishamdari, M., Mohammadi, M. H. P. (2017). [Natural frequencies of functionally graded plates with porosities via a simple four variable plate theory: An analytical approach](#). *Thin-Walled Structures*, 120:366–377.
- [18] Hu, X., Fu, T. (2023). [Free vibration analysis of functionally graded plates with different porosity distributions and grading patterns](#). *Journal of Mechanical Science and Technology*, 37(11):5725–5738.
- [19] Van Thinh, N., Van Tung, H. (2023). [Free Vibration and Dynamical Analyses of FGM Plates with Porosity and Tangential Edge Constraints](#). *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 12(3):5291–5305.
- [20] Tran, T. T., Pham, Q.-H., Nguyen-Thoi, T. (2020). [An Edge-Based Smoothed Finite Element for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Porous \(FGP\) Plates on Elastic Foundation Taking into Mass \(EFTIM\)](#). *Mathematical Problems in Engineering*, 2020:1–17.
- [21] Kaddari, M., Kaci, A., Bousahla, A. A., Tounsi, A., Bourada, F., Bedia, E. A. A., Al-Osta, M. A. (2020). A study on the structural behaviour of functionally graded porous plates on elastic foundation using a new quasi-3D model: bending and free vibration analysis. *Computers and Concrete, An International Journal*, 25(1):37–57.
- [22] Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., Karami, B. (2018). [A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation](#). *Aerospace Science and Technology*, 72:134–149.
- [23] Li, M., Guedes Soares, C., Yan, R. (2021). [Free vibration analysis of FGM plates on Winkler/Pasternak/Kerr foundation by using a simple quasi-3D HSDT](#). *Composite Structures*, 264:113643.
- [24] Vu, N. A., Pham, T. D., Tran, T. T., Pham, Q.-H. (2023). [Third-order isogeometric analysis for vibration characteristics of FGP plates in the thermal environment supported by Kerr foundation](#). *Case Studies in Thermal Engineering*, 45:102890.
- [25] Wattanasakulpong, N., Ungbhakorn, V. (2014). [Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities](#). *Aerospace Science and Technology*, 32(1):111–120.
- [26] Wattanasakulpong, N., Gangadhara Prusty, B., Kelly, D. W., Hoffman, M. (2012). [Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation](#). *Materials & Design (1980-2015)*, 36: 182–190.
- [27] Larbi, L. O., Kaci, A., Houari, M. S. A., Tounsi, A. (2013). [An Efficient Shear Deformation Beam Theory Based on Neutral Surface Position for Bending and Free Vibration of Functionally Graded Beams](#). *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41(4):421–433.
- [28] Zenkour, A. M. (2006). [Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates](#). *Applied Mathematical Modelling*, 30(1):67–84.
- [29] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. (2015). [Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations](#). *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 13(1):71–84.
- [30] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2013). [A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates](#). *Composite Structures*, 101:332–340.
- [31] Reddy, J. N. (2006). *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. CRC Press.
- [32] Kneifati, M. C. (1985). [Analysis of plates on a Kerr foundation model](#). *Journal of Engineering Mechanics*, 111(11):1325–1342.
- [33] Thai, H.-T., Choi, D.-H. (2011). [A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation](#). *Composites Science and Technology*, 71(16):1850–1858.
- [34] Demirhan, P. A., Taskin, V. (2019). [Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach](#). *Composites Part B: Engineering*, 160:661–676.
- [35] Touratier, M. (1991). [An efficient standard plate theory](#). *International Journal of Engineering Science*, 29(8):901–916.
- [36] Shen, Z., Xia, J., Cheng, P. (2019). [Geometrically nonlinear dynamic analysis of FG-CNTRC plates subjected to blast loads using the weak form quadrature element method](#). *Composite Structures*, 209: 775–788.