

Phân tích ổn định tĩnh của tấm FGP trên nền đàn hồi Kerr theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản

Lê Thanh Hải^{2,3,*}, Nguyễn Văn Long^{1,2}, Trần Minh Tú^{1,2}

¹Trường Đại học Xây dựng Hà Nội, số 55 đường Giải Phóng, Hai Bà Trưng, Hà Nội

²Nhóm nghiên cứu Cơ học vật liệu và Kết cấu tiên tiến (MAMS),

Trường Đại học Xây dựng Hà Nội

³Trường Đại học Vinh, số 182 Lê Duẩn, thành phố Vinh, Nghệ An

*Email: haidhvinh@gmail.com

Tóm tắt: Trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản bốn ẩn số chuyển vị, bài báo xây dựng lời giải Navier phân tích ổn định tuyến tính tĩnh cho tấm vật liệu xốp (FGP) đặt trên nền đàn hồi Kerr. Hai dạng quy luật phân bố lỗ rỗng của vật liệu FGP được xem xét bao gồm: phân bố đều và phân bố không đều - đối xứng. Các ví dụ kiểm chứng ổn định của tấm cho thấy độ tin cậy của mô hình áp dụng. Ảnh hưởng của các tham số vật liệu, tham số tải trọng nén và các tham số nền đàn hồi đến ứng xử ổn định tấm được khảo sát qua các ví dụ số.

Từ khóa: Tấm FGP, nền đàn hồi Kerr, phân tích ổn định, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản, lời giải Navier.

1. Mở đầu

Vật liệu xốp (functionally graded porous material - FGPM) là loại vật liệu có cấu trúc rỗng, với độ rỗng phân bố theo quy luật nhất định trong không gian, để cơ tính của vật liệu đạt được theo yêu cầu của từng loại kết cấu. Do có trọng lượng nhẹ và khả năng hấp thụ năng lượng tốt, độ dẫn nhiệt thấp, nên vật liệu xốp được sử dụng trong nhiều lĩnh vực như: hàng không vũ trụ, kỹ thuật tàu thủy, công nghệ ô tô và xây dựng dân dụng [1-3].

Với ứng dụng ngày càng gia tăng cùng với các đặc tính vượt trội của vật liệu FGP, nên các nghiên cứu về ứng xử tĩnh và động của các kết cấu FGP ngày càng phong phú. Tu và cs. [4] sử dụng lý thuyết tấm cổ điển (CPT), phân tích ổn định và sau mất ổn định của tấm FGP với hai dạng phân bố lỗ rỗng không đều đối xứng và bất đối xứng, ràng buộc bởi các điều kiện biên khác nhau. Với lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), Long và cs. [5] sử dụng phương pháp Galerkin và lời giải giải tích theo tiếp cận chuyển vị, phân tích tĩnh tấm FGP trên nền đàn hồi Pasternak, có kể đến tính phi tuyến hình học và vị trí mặt trung hòa. Bằng tiếp cận theo ứng suất, kết hợp với phương pháp Bubnov-Galerkin, Long và cs. [6, 7] phân tích phi tuyến ứng xử uốn tấm FGP trên nền đàn hồi Pasternak, với các điều kiện biên khác nhau. Hải và cs. [8] sử dụng lý thuyết FSDT phân tích ổn định và sau mất ổn định của tấm FGP trên nền đàn hồi Pasternak, với các điều kiện biên khác nhau. Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn Tran và cs. [9], phân tích dao động riêng của tấm FGP đặt trên nền đàn hồi Pasternak.

Bài toán tấm đặt trên nền đàn hồi có nhiều ý nghĩa thực tế, có nhiều mô hình nền được sử dụng, quen thuộc nhất là mô hình nền Winkler (một hệ số nền) và mô hình nền Pasternak (hai hệ số nền). Gần đây, mô hình nền với ba hệ số (nền Kerr) nhận được sự quan tâm của các nhà khoa học, thể hiện qua số lượng công bố ngày càng nhiều. Sử dụng lý thuyết FSDT, Tú và cs. [10] phân tích tĩnh tấm chữ nhật FGM có vi bọt rỗng, bốn cạnh tựa khớp trên nền đàn hồi Kerr. Kaddari và cs. [11], sử dụng lý thuyết tựa 3D (quasi-3D), nghiên cứu dao động riêng của tấm FGP đặt trên nền đàn hồi Winkler/Pasternak/Kerr. Sử dụng lý thuyết vỏ Donell, Timesli [12], phân tích ổn định vỏ trụ bằng vật liệu FGP bao quanh bởi nền đàn hồi Kerr. Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) và phương pháp Ritz, Jena và cs. [13] phân tích dao động của dầm FGM có vi bọt rỗng trên nền đàn hồi Kerr.

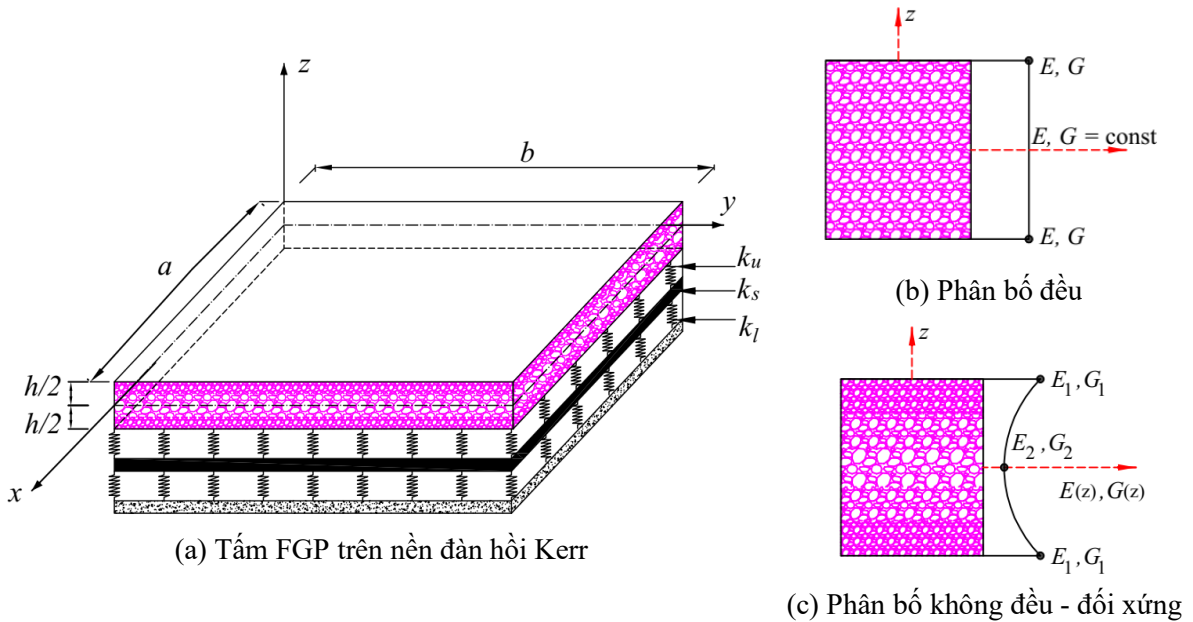
Shahraki và cs. [14] sử dụng lý thuyết tựa 3D, phân tích dao động và ổn định của tấm composite lớp gia cường ống carbon đơn vách trên nền đàn hồi Kerr.

Qua nghiên cứu tổng quan các nguồn tài liệu hiện có, nhóm nghiên cứu thấy rằng nghiên cứu về ổn định tĩnh của tấm FGP đặt trên nền đàn hồi ba hệ số nền (Kerr foundation) còn chưa được đề cập đến. Vì thế bài báo này sẽ tiến hành phân tích ổn định của tấm chữ nhật FGP, liên kết khớp trên chu vi, sử dụng dạng nghiệm Navier trên nền Kerr, theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất cải tiến. Sau khi kiểm chứng độ tin cậy của lời giải, các khảo sát số sẽ được thực hiện nhằm đánh giá ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng, hệ số rỗng, kích thước hình học và các tham số nền đàn hồi và tham số tải trọng nén đến ổn định của tấm.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Tấm FGP

Xét tấm chữ nhật bằng vật liệu FGP (Hình 1(a)), với chiều dày h , kích thước các cạnh $a \times b$. Tấm đặt trên nền đàn hồi Kerr với ba hệ số nền lần lượt gồm: k_u là hệ số độ cứng uốn lớp đàn hồi trên; k_s là hệ số độ cứng cắt lớp giữa; k_l là hệ số độ cứng uốn lớp đàn hồi dưới.



Hình 1. Tấm FGP đặt trên nền đàn hồi Kerr và hai dạng quy luật phân bố lỗ rỗng của vật liệu

Tấm làm bằng vật liệu FGP, hai quy luật phân bố lỗ rỗng theo chiều dày tấm được xét là phân bố đều, phân bố không đều đối xứng, như minh họa trên Hình 1(b)-(c). Các đặc trưng cơ học vật liệu FGP được giả thiết là biến thiên liên tục theo chiều dày tấm, tuân theo hai quy luật sau [15]:

$$\text{- Phân bố đều: } \{E, G\} = \{E_1, G_1\}(1 - e_0\chi); \quad \chi = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left(\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - e_0} - \frac{2}{\pi} + 1 \right)^2 \quad (1)$$

$$\text{- Phân bố không đều - đối xứng: } \{E(z), G(z)\} = \{E_1, G_1\} \left[1 - e_0 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right]; \quad (2)$$

trong đó: E_1, G_1 và E_2, G_2 lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mô đun đàn hồi kéo - nén, mô đun đàn hồi trượt của vật liệu; $G_i = E_i / [2(1 + \nu)]$; $i = 1, 2$. Hệ số Poisson được coi là không thay đổi theo chiều dày tấm: $\nu = \text{const}$. Hệ số độ rỗng e_0 được xác định bởi:

$$e_0 = 1 - E_2/E_1 = 1 - G_2/G_1; \quad (0 < e_0 < 1) \quad (3)$$

2.2. Các phương trình cơ bản - Hệ phương trình chủ đạo

Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất với năm ẩn số chuyển vị thường được sử dụng trong phân tích kết cấu tấm có độ dày trung bình do tính đơn giản và dễ sử dụng. Để giảm ẩn số chuyển vị, Thai và Choi [16] đã đề xuất phân tích độ võng thành hai thành phần: độ võng do biến dạng uốn và do biến dạng cắt ngang, do vậy số ẩn chuyển vị giảm xuống còn bốn. Trường chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản có dạng [16]:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x}; \quad v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y}; \quad w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (4)$$

trong đó: u_0, v_0 là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình của tấm theo các phương x, y ; w_b, w_s tương ứng là độ võng do biến dạng uốn và do biến dạng cắt gây nên.

Các thành phần biến dạng được xác định từ quan hệ chuyển vị - biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Quan hệ ứng suất - biến dạng cho tấm được viết dưới dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - \nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Tích phân các thành phần ứng suất dọc theo chiều dày tấm ta được các thành phần nội lực trong tấm FGP:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz; & (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz; \\ (Q_x, Q_y) &= k \cdot \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \end{aligned} \quad (7)$$

trong đó: k là hệ số hiệu chỉnh cắt.

Thay quan hệ (6) vào biểu thức (7), ta được liên hệ giữa các thành phần nội lực và biến dạng:

$$\begin{cases} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{cases} = \bar{A} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{cases}; \quad \begin{cases} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{cases} = \bar{D} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{cases} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{cases}; \quad (8)$$

$$\begin{cases} Q_x \\ Q_y \end{cases} = \bar{A}^s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{cases}$$

với: $\bar{A} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2} dz$; $\bar{D} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2} z^2 dz$; $\bar{A}^s = k \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} dz$.

Sử dụng nguyên lý thế năng cực tiểu, hệ phương trình cân bằng ổn định cho tấm FGP theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản thu được dưới dạng [16]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - f_e + N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - f_e + N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

Phản lực nền f_e , theo mô hình nền Kerr [13] biểu diễn bởi:

$$f_e - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 f_e = \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} (w_b + w_s) - \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 (w_b + w_s) \quad (13)$$

trong đó: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ là toán tử Laplace trong hệ tọa độ Cartesian cho bài toán 2 chiều.

Khi cho $k_u \rightarrow \infty$, ta được mô hình nền Pasternak, với phản lực nền tương ứng:

$$f_e = k_l (w_b + w_s) - k_s \nabla^2 (w_b + w_s) \quad (14)$$

Một trường hợp đặc biệt của nền Pasternak là nền Winkler, khi cho $k_s = 0$:

$$f_e = k_l (w_b + w_s) \quad (15)$$

Áp dụng toán tử $\left(1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2\right)$ lên các phương trình (11)-(12), kết hợp với phương trình (13) ta

được:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2\right) \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q \right) - \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} (w_b + w_s) + \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 (w_b + w_s) \\ & = \left(1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2\right) \left[I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2\right) \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} (w_b + w_s) + \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 (w_b + w_s) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Bằng cách thế các phương trình (5) và (8) vào (9)-(10) và (16)-(17), hệ phương cân bằng biểu diễn theo các thành phần chuyển vị thu được:

$$\bar{A} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (18)$$

$$\bar{A} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2\right) \left(-\bar{D} \nabla^4 w_b + N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} (w_b + w_s) + \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 (w_b + w_s) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{k_s}{k_u + k_l} \nabla^2\right) \left(\bar{A}^s \nabla^2 w_s + N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} (w_b + w_s) + \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} \nabla^2 (w_b + w_s) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

3. Lời giải Navier

Trong phần này lời giải giải tích với dạng nghiệm Navier được thiết lập cho bài toán phân tích ổn định của tấm chữ nhật FGP. Giả thiết tấm chịu tác dụng của các tải trọng nén trong mặt trung bình: $N_x^0 = -\gamma_1 N_0$, $N_y^0 = -\gamma_2 N_0$, $N_{xy}^0 = 0$. Các điều kiện biên của tấm liên kết khớp trên chu tuyến có dạng sau [16]:

$$\begin{aligned} & \text{Tại } x = 0, a: N_x = v_0 = w_b = w_s = M_x = 0; \\ & \text{Tại } y = 0, b: N_y = u_0 = w_b = w_s = M_y = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Các thành phần chuyển vị được giả thiết dưới dạng chuỗi lượng giác kép, thỏa mãn điều kiện biên (22):

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0mn} \cos(\mu x) \sin(\eta y); & v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{0mn} \sin(\mu x) \cos(\eta y); \\ w_b &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{bmn} \sin(\mu x) \sin(\eta y); & w_s &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{smn} \sin(\mu x) \sin(\eta y) \end{aligned} \quad (23)$$

trong đó: $\mu = \frac{m\pi}{a}, \eta = \frac{n\pi}{b}$; m, n là số nửa bước sóng hình sin phản ánh dạng (mode) mất ổn định của tấm; $u_{0mn}, v_{0mn}, w_{bmn}, w_{smn}$ là các hệ số cần được xác định tương ứng với dạng mất ổn định (m, n) .

Thế biểu thức (23) vào (18)-(21), ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất, $\forall m, n$:

$$\left(\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} - N_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} & s_{34} \\ 0 & 0 & s_{43} & s_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_{0mn} \\ v_{0mn} \\ w_{bmn} \\ w_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

trong đó: các hệ số k_{ij} và s_{ij} được xác định bởi:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \bar{A} \left(\mu^2 + \frac{1-\nu}{2} \eta^2 \right); & k_{12} &= k_{21} = \frac{1+\nu}{2} \bar{A} \mu \eta; & k_{22} &= \bar{A} \left(\frac{1-\nu}{2} \mu^2 + \eta^2 \right); \\ k_{33} &= \xi \bar{D} \left(\mu^2 + \eta^2 \right)^2 + \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} + \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} \left(\mu^2 + \eta^2 \right); & k_{34} &= k_{43} = \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} + \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} \left(\mu^2 + \eta^2 \right); \\ k_{44} &= \xi \bar{A}^s \left(\mu^2 + \eta^2 \right) + \frac{k_u k_l}{k_u + k_l} + \frac{k_u k_s}{k_u + k_l} \left(\mu^2 + \eta^2 \right); & s_{33} &= s_{34} = s_{43} = s_{44} = \xi \left(\gamma_1 \mu^2 + \gamma_2 \eta^2 \right); \\ \xi &= 1 + \frac{k_s}{k_u + k_l} \left(\mu^2 + \eta^2 \right). \end{aligned}$$

Với tiêu chuẩn ổn định O-1e cho tấm phẳng, hoàn hảo về hình học, giải phương trình trị riêng (24) ta xác định được tải trọng mất ổn định N_{0mn} ứng với dạng mất ổn định (m, n) . Tải trọng tới hạn là giá trị nhỏ nhất trong các tải trọng mất ổn định: $N_{th} = \min \{ N_{0mn} \}$.

4. Kết quả số và thảo luận

Với nghiệm giải tích đã thiết lập ở phần trên, chương trình tính trên nền Matlab được viết để thực hiện các ví dụ số. Tấm chữ nhật FGP, đặt trên nền đàn hồi Kerr, liên kết khớp 4 cạnh. Vật liệu rỗng là bọt nhôm với các đặc trưng cơ học bao gồm: $\nu = 0,3$; $G_1 = 26,293$ GPa; $E_1 = 2G_1(1+\nu)$ [17]. Trong tất cả các tính toán và ví dụ kiểm chứng, giá trị của hệ số hiệu chỉnh cắt được lấy là $k = 5/6$. Các giá trị không thứ nguyên sau đây được sử dụng [11, 18]:

$$\bar{N} = N_{th} \frac{a^2}{E_1 h^3}; \quad K_u = \frac{k_u a^4}{D_0}; \quad K_s = \frac{k_s a^2}{D_0}; \quad K_l = \frac{k_l a^4}{D_0}; \quad D_0 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (25)$$

4.1. Kiểm chứng độ tin cậy của lời giải

Xét tấm vuông FGP ($a/h = 10$) với các hệ số rỗng e_0 khác nhau. Bảng 1 là các tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N} của tấm dưới tác dụng của tải trọng nén đều theo phương x ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$). Hai quy luật phân bố lỗ rỗng được xem xét bao gồm: phân bố đều và phân bố không đều - đối xứng. Các kết quả trong bài báo được so sánh với các kết quả của Thang và cs. [18] cũng sử dụng lời giải Navier nhưng với lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT thông thường. Có thể thấy rằng, các kết quả tính toán tải trọng tới hạn trong bài báo có sự tương đồng với Thang và cs. [18] (sai số lớn nhất khi $e_0 = 0,6$ trong trường hợp phân bố không đều - đối xứng là 0,336%).

Bảng 1. Tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N} của tấm vuông FGP dưới tác dụng của tải nén đều theo phương x

Phân bố lỗ rỗng	Nguồn	e_0					
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
Đều	Thang và cs. [18]	3,2109	2,9856	2,7549	2,5173	2,2710	2,0135
	Bài báo này	3,2023	2,9777	2,7475	2,5105	2,2650	2,0081
	Sai số (%)	0,268	0,265	0,269	0,270	0,264	0,268
Không đều - Đối xứng	Thang và cs. [18]	3,3023	3,1729	3,0432	2,9130	2,7822	2,6506
	Bài báo này	3,2933	3,1640	3,0343	2,9041	2,7733	2,6417
	Sai số (%)	0,273	0,281	0,292	0,306	0,320	0,336

Tiếp theo, Bảng 2 bao gồm tải trọng tới hạn của tấm vuông mỏng đẳng hướng ($e_0 = 0$) được tính toán với các cặp hệ số nền đàn hồi khác nhau. Kết quả của bài báo được so sánh với kết quả tính theo nghiệm Navier và Levy của Thai và Choi [19]. Có thể thấy rằng, đối với tấm mỏng, kết quả tính theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản trong bài báo hoàn toàn trùng khớp với kết quả tính theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao đơn giản 4 ẩn chuyển vị của Thai và Choi.

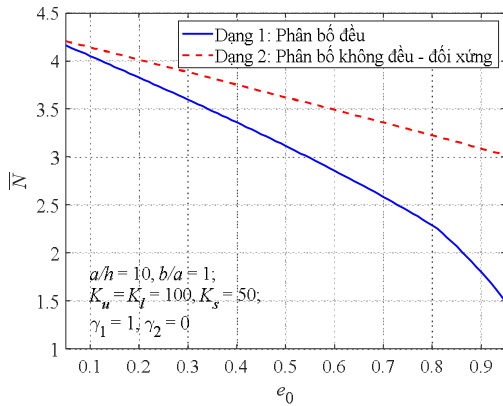
Bảng 2. Tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N} của tấm vuông mỏng vật liệu đẳng hướng dưới tác dụng của tải nén

Nguồn	(K_l, K_s)			
	(0, 0)	(0, 100)	(100, 0)	(100, 100)
Nén 1 phương: phương x ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$)/phương y ($\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1$)				
Thai và Choi [19]	4.0000	18.9151	5.0266	19.1717
Bài báo	4.0000	18.9151	5.0266	19.1718
Nén 2 phương ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$)				
Thai và Choi [19]	2.0000	12.1321	2.5133	12.6454
Bài báo	2.0000	12.1321	2.5133	12.6454

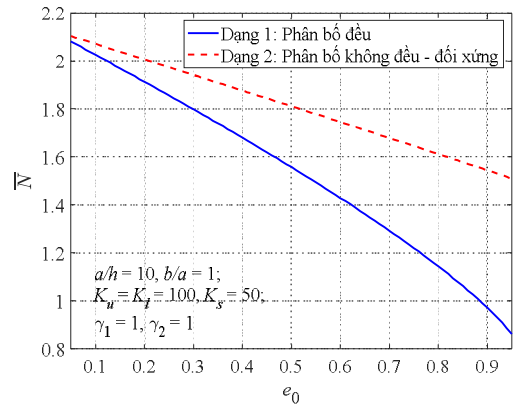
Qua các kết quả kiểm chứng ở trên, có thể thấy rằng, nghiệm giải tích xây dựng trong bài báo và code chương trình máy tính đã thiết lập bằng phần mềm Matlab là có độ tin cậy.

4.2. Khảo sát số

Trong phần này, xét tấm chữ nhật FGP (bột nhôm) liên kết khớp trên chu tuyến, đặt trên nền đàn hồi Kerr, dưới tác dụng của các tải trọng nén: $N_x^0 = -\gamma_1 N_0; N_y^0 = -\gamma_2 N_0$.



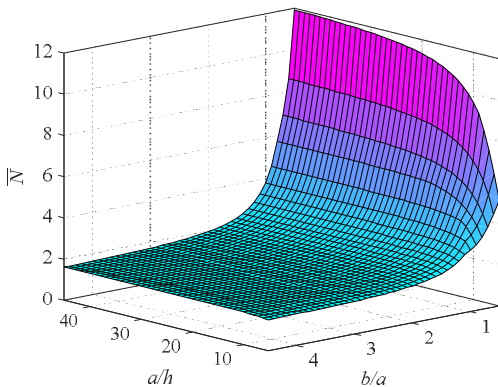
(a) $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$



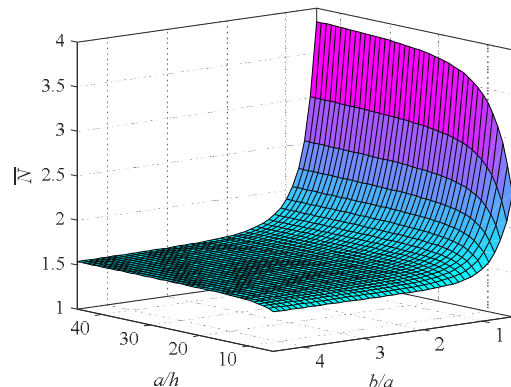
(b) $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$

Hình 2. Ảnh hưởng của quy luật phân bố và hệ số lỗ rỗng e_0 lên tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N} của tấm FGP

Biến thiên tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N} của tấm vuông vật liệu rỗng ($a/h = 10$; $K_u = K_l = 100; K_s = 50$) theo hệ số rỗng e_0 được thể hiện bằng đồ thị trên Hình 2. Hai dạng quy luật phân bố lỗ rỗng: phân bố đều, phân bố không đều - đối xứng, và hai trường hợp tải trọng nén được xem xét bao gồm: tải nén đều theo 1 phương (phương x : $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$) và tải nén đều theo 2 phương x, y ($\gamma_1 = \gamma_2 = 1$). Các kết quả cho thấy, khi hệ số rỗng e_0 tăng, với cả hai trường hợp tải trọng nén, tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N} của tấm đều giảm. Rõ ràng là khi e_0 càng lớn thì ảnh hưởng của quy luật phân bố lỗ rỗng lên tải trọng tới hạn của tấm càng đáng kể (đường nét liền và nét đứt tách xa nhau khi e_0 tăng); tấm có lỗ rỗng phân bố không đều - đối xứng luôn có tính ổn định cao hơn so với tấm có phân bố lỗ rỗng đều. Một điểm đáng chú ý là với mỗi tấm vuông FGP, khi chịu nén theo cả 2 phương sẽ nhanh mất ổn định hơn so với chịu nén chỉ theo 1 phương.



(a) $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$



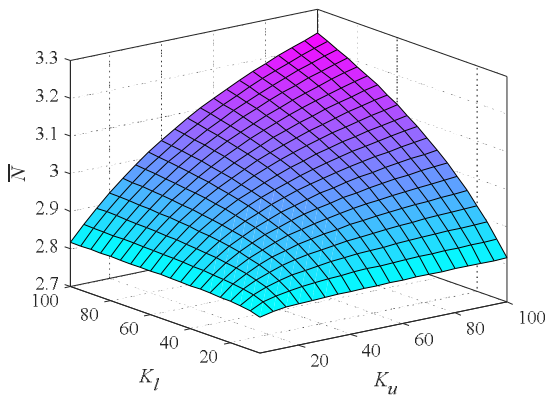
(b) $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$

Hình 3. Ảnh hưởng của kích thước hình học đến tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N} của tấm FGP phân bố lỗ rỗng không đều - đối xứng

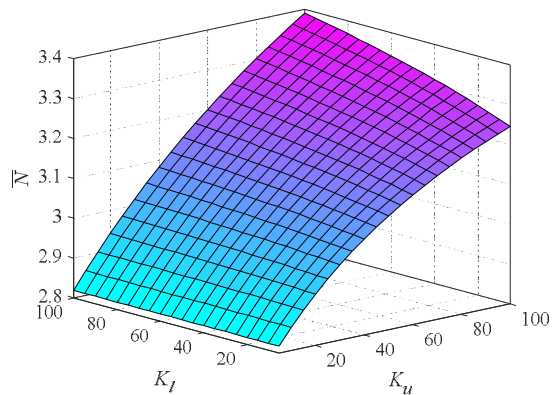
Hình 3 thể hiện ảnh hưởng của kích thước hình học (tỷ số kích thước tấm/chiều dày a/h và tỷ số kích thước các cạnh b/a) lên tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N} của tấm FGP phân bố không đều - đối

xúng ($K_u = K_l = 100; K_s = 50; e_0 = 0,5; a = 1$ m). Rõ ràng là, tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N} của tấm FGP giảm khi tăng tỷ số kích thước cạnh b/a , lực tới hạn giảm nhanh khi $b/a \leq 2$, sau đó giảm chậm dần. Khi tỷ số kích thước tấm a/h tăng, lực tới hạn không thứ nguyên \bar{N} tăng nhiều khi b/a còn nhỏ, sau đó tăng chậm dần. Ví dụ trường hợp tấm chịu nén theo phương x ($\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$): với $b/a = 0,5$, khi tỷ số kích thước tấm tăng từ $a/h = 5$ đến $a/h = 50$, lực tới hạn không thứ nguyên tăng từ $\bar{N} = 5,1348$ lên $\bar{N} = 11,9150$ (tăng 132,04%); trong khi đó, các kết quả tương ứng với trường hợp $b/a = 4,5$, lực tới hạn \bar{N} chỉ tăng 6,6178%. Chú ý rằng, lực tới hạn không thứ nguyên có thể coi là một tham số lực tới hạn nên quy luật biến thiên của nó ngược lại so với giá trị có thứ nguyên khi tấm dày lên hay mỏng đi.

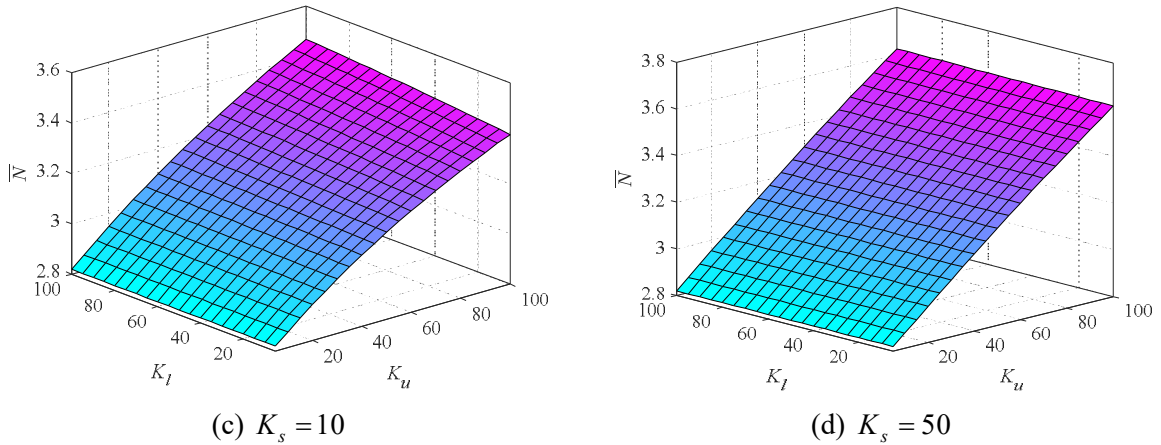
Đồ thị so sánh ảnh hưởng của các tham số nền đàn hồi lên tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N} của tấm vuông FGP, phân bố lỗ rỗng không đều - đối xứng ($a/h = 10; b/a = 1; e_0 = 0,5; \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$) được thể hiện trên Hình 4. Hình 4(a) là đồ thị mô tả sự biến thiên của tải trọng tới hạn không thứ nguyên theo các tham số nền K_u, K_l khi tham số nền $K_s = 0$; các hình Hình 4(b), Hình 4(c), Hình 4(d) cùng ý nghĩa đó nhưng tương ứng với $K_s = 5, 10, 50$. Kết quả trên Hình 4(a) cho thấy: Khi không có lớp đàn hồi cắt, vai trò của hai lớp lò xo phía trên và phía dưới là tương tự nhau; khi các tham số K_u, K_l tăng làm tăng độ cứng uốn cho hệ kết cấu, dẫn đến lực tới hạn tăng. Muốn tăng khả năng ổn định cho tấm trong trường hợp này, cần lưu ý nên tăng cả 2 hệ số nền K_u, K_l . Các đồ thị trên Hình 4(b)-Hình 4(d) cho thấy, khi có sự tham gia của lớp cắt làm cho độ cứng uốn tổng thể của kết cấu tăng, K_s càng lớn thì lực tới hạn của tấm càng tăng. Ảnh hưởng của K_s lên tải trọng tới hạn sẽ là khá đáng kể khi K_u, K_l đủ lớn, chẳng hạn như với $K_u = K_l = 100$ khi tăng K_s từ giá trị 0 lên 10, 50, 100 thì tải trọng tới hạn không thứ nguyên tăng tương ứng 4,74%, 7,12%, 11,92%; còn khi K_u, K_l bé, chẳng hạn với $K_u = K_l = 5$ khi tăng K_s từ giá trị 0 lên 5, 10, 50 thì tải trọng tới hạn không thứ nguyên chỉ tăng tương ứng 0,75%, 0,79%, 0,82%. Một điểm đáng lưu ý nữa là khi có sự tham gia của lớp cắt, ảnh hưởng của lớp lò xo đàn hồi phía trên rõ ràng hơn nhiều so với lớp lò xo đàn hồi phía dưới. Khi lớp cắt có độ cứng càng cao, ảnh hưởng của lớp lò xo phía dưới càng yếu đi. Chẳng hạn trên Hình 4(d), với mỗi giá trị của K_u , lực tới hạn không thứ nguyên dường như không thay đổi khi K_l thay đổi từ giá trị 5 đến 100.



(a) $K_s = 0$



(b) $K_s = 5$



Hình 4. Ảnh hưởng của các hệ số nền đàn hồi lên tải trọng tới hạn không thứ nguyên \bar{N} của tấm FGP phân bố lỗ rỗng không đều - đối xứng

5. Kết luận

Bài báo đã sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản để phân tích ổn định cho tấm FGP trên nền đàn hồi Kerr. Kết quả kiểm chứng tải trọng tới hạn trong một số trường hợp đặc biệt cho thấy sự phù hợp của mô hình lý thuyết và nghiệm Navier đã thiết lập. Một số kết quả chính trong nghiên cứu chỉ ra rằng:

- Khi tăng hệ số rỗng e_0 , khả năng ổn định của tấm giảm;
- Với cùng một hệ số rỗng xác định, tấm có lỗ rỗng phân bố không đều - đối xứng luôn có khả năng ổn định cao hơn so với tấm có lỗ rỗng phân bố đều;
- Đối với nền đàn hồi Kerr, lớp lò xo đàn hồi phía trên có ảnh hưởng rõ ràng hơn nhiều so với lớp lò xo đàn hồi phía dưới, muốn nâng cao khả năng ổn định cho tấm cần chú ý tăng cường độ cứng lớp lò xo này. Khi lớp cắt có độ cứng đủ lớn, ảnh hưởng của lớp lò xo phía dưới gần như không đáng kể.

Tài liệu tham khảo

- [1] Reay, D., *Metal foams: fundamentals and applications*. 2013.
- [2] Lefebvre, L.P., J. Banhart, and D.C. Dunand, Porous metals and metallic foams: current status and recent developments. *Advanced Engineering Materials*, 2008. **10**(9): pp. 775-787.
- [3] Ashby, M.F., Evans, A., Fleck, N. A., Gibson, L. J., Hutchinson, J. W., Wadley, H. N. G., & Delale, F., Metal foams: a design guide. *Applied Mechanics Reviews*, 2001. **54**(6): pp. B105-B106.
- [4] Tu, T.M., Hoa, L. K., Hung, D. X., & Hai, L. T., Nonlinear buckling and post-buckling analysis of imperfect porous plates under mechanical loads. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 2020. **22**(6): pp. 1910-1930.
- [5] Long, N.V., T.M. Tú, and C.T. Bình, Phân tích tĩnh tấm bằng vật liệu fgm xốp trên nền đàn hồi Pasternak theo phương pháp chuyên vị có kể đến tính phi tuyến hình học và vị trí mặt trung hòa. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD)-ĐHXDHN*, 2020. **14**(5V): pp. 166-179.
- [6] Long, N.V., T.M. Tú, and V.T.T. Trang, Phân tích phi tuyến ứng xử uốn của tấm bằng vật liệu FGM xốp đặt trên nền đàn hồi Pasternak với các điều kiện biên khác nhau có xét đến vị trí thực của mặt trung hòa. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (KHCNXD)-ĐHXDHN*, 2020. **14**(4V): pp. 1-15.

- [7] Long, N.V., Tu, T. M., Truong, H. Q., Hai, L. T., & Trang, V. T. T., Displacement-based and stress-based analytical approaches for nonlinear bending analysis of functionally graded porous plates resting on elastic substrate. *Acta Mechanica*, 2022. **233**(4): pp. 1689-1714.
- [8] Hai, L.T., Van Long, N., Tu, T. M., & Binh, C. T., Post-buckling response of functionally graded porous plates rested on elastic substrate via first-order shear deformation theory. in *Modern Mechanics and Applications: Select Proceedings of ICOMMA 2020*. 2022. Springer.
- [9] Tran, T.T., Q.-H. Pham, and T. Nguyen-Thoi, An edge-based smoothed finite element for free vibration analysis of functionally graded porous (FGP) plates on elastic foundation taking into mass (EFTIM). *Mathematical Problems in Engineering*. 2020: pp. 1-17.
- [10] Tú, T.M., Long, N. V., Hằng, P. T., Bình, T. V., & Hiền, T. T., Phân tích tĩnh tâm FGM có vi bọt rỗng trên nền đàn hồi Kerr theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất đơn giản. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Xây dựng (TCKHCNXD)-ĐHXD*, 2023. **17**(4V): pp. 49-63.
- [11] Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., & Karami, B., A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation. *Aerospace Science and Technology*, 2018. **72**: pp. 134-149.
- [12] TIMESLI, A., Analytical modeling of buckling behavior of porous FGM cylindrical shell embedded within an elastic foundation. *Gazi University Journal of Science*, 2022. **35**(1): pp. 148-165.
- [13] Jena, S.K., S. Chakraverty, and M. Malikan, Application of shifted Chebyshev polynomial-based Rayleigh–Ritz method and Navier’s technique for vibration analysis of a functionally graded porous beam embedded in Kerr foundation. *Engineering with Computers*, 2021. **37**: pp. 3569-3589.
- [14] Shahraki, H., Tajmir Riahi, H., Izadinia, M., & Talaeitaba, S. B., Buckling and vibration analysis of FG-CNT-reinforced composite rectangular thick nanoplates resting on Kerr foundation based on nonlocal strain gradient theory. *Journal of Vibration and Control*, 2020. **26**(5-6): pp. 277-305.
- [15] Chen, D., J. Yang, and S. Kitipornchai, Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016. **108**: pp. 14-22.
- [16] Thai, H.-T. and D.-H. Choi, A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 2013. **101**: pp. 332-340.
- [17] Rezaei, A. and A. Saidi, Application of Carrera Unified Formulation to study the effect of porosity on natural frequencies of thick porous–cellular plates. *Composites Part B: Engineering*, 2016. **91**: pp. 361-370.
- [18] Thang, P.T., Nguyen-Thoi, T., Lee, D., Kang, J., & Lee, J., Elastic buckling and free vibration analyses of porous-cellular plates with uniform and non-uniform porosity distributions. *Aerospace Science and Technology*, 2018. **79**: pp. 278-287.
- [19] Thai, H.-T. and D.-H. Choi, A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation. *Composites Science and Technology*, 2011. **71**(16): pp. 1850-1858.