NGUYỄN DUY BÌNH (chủ biên)
NGUYỄN NGỌC BÍCH - NGUYỄN HỮU QUANG

GIÁO TRÌNH
HÌNH HỌC TUYẾN TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC VINH

TS. NGUYỄN DUY BÌNH (chủ biên)
TS. NGUYỄN NGỌC BÍCH - TS. NGUYỄN HỮU QUANG

HÌNH HỌC TUYẾN TÍNH

(DÙNG CHO ĐÀO TẠO CỬ NHÂN SƯ PHẠM TOÁN HỌC)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC VINH

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Giáo trình *Hình học tuyến tính* là tài liệu phục vụ giảng dạy và học tập học phần *Hình học tuyến tính*. Đây là học phần bắt buộc với thời lượng 5 tín chỉ trong chương trình đào tạo cử nhân Sư phạm Toán học theo hướng tiếp cận CDIO (Conceive - Design - Implement - Operate). Học phần bao gồm các kiến thức cơ bản về hình học afin, hình học Euclid và hình học xạ ảnh. Các nội dung trình bày trong giáo trình đã được thể hiện trong các giáo trình hay sách chuyên khảo về hình học cho các trường đại học sư phạm mà chúng hoặc nằm trong cùng một cuốn với tên thường gọi là hình học cao cấp [1] ... hoặc được tách riêng thành hai cuốn: cuốn thứ nhất về Hình học afin và Hình học Euclid [2],... và cuốn thứ hai về Hình học xạ ảnh [3]. Tuy nhiên, để phục vụ đào tạo, học phần cần có một tài liệu đầy đủ về các nội dung trên và đáp ứng yêu cầu của chương trình đào tạo. Giáo trình được biên soạn nhằm phục vụ học tập của sinh viên thông qua hệ thống tín chỉ theo tiếp cận năng lực người học và để đáp ứng các chuẩn đầu ra của học phần.

Nội dung giáo trình gồm 3 chương, phần Hướng dẫn giải bài tập và phần Phụ lục:

Chương 1 trình bày về Hình học afin, bao gồm không gian afin, ánh xạ afin và siêu mặt bậc hai afin.

Chương 2 trình bày về Hình học Euclid, bao gồm không gian

[1] Nguyễn Mộng Hy (1999), *Hình học cao cấp*. Nxb Giáo dục, Hà Nội.

[2] Văn Như Cương, Tạ Mân (1988), *Hình học afin và Hình học Euclid*. Nxb ĐHQG Hà Nội.

[3] Văn Như Cương (1999), *Hình học xạ ảnh*. Nxb Giáo dục, Hà Nội.

vectơ Euclid, ánh xạ trực giao, không gian Euclid, ánh xạ đẳng cự và siêu mặt bậc hai trong không gian Euclid.

Chương 3 trình bày về Hình học xạ ảnh, bao gồm không gian xạ ảnh, ánh xạ xạ ảnh và siêu mặt bậc hai xạ ảnh.

Phần Hướng dẫn giải bài tập Chương 1, Chương 2, Chương 3 giúp sinh viên nắm bắt được phương pháp và phương pháp giải một số bài tập gắn với nội dung lý thuyết của từng chương.

Phần Phụ lục cung cấp thêm các kiến thức về hình học của các mặt bậc hai thường gặp trong không gian Euclid 3 chiều.

Trong mỗi chương, các kiến thức được trình bày theo thứ tự: không gian hình học, các phép biến đổi của không gian và siêu mặt bậc hai trong không gian. Các kiến thức được trình bày chi tiết, có hệ thống theo đề cương học phần. Đầu mỗi chương nêu rõ các mục tiêu cụ thể mà người học cần đạt được. Cùng với các tính chất được chứng minh chi tiết, một số tính chất yêu cầu người học tự kiểm tra xem như bài tập. Để biên soạn Chương 1 và Chương 2, chúng tôi tham khảo chủ yếu từ cuốn Hình học afin và hình học Euclid của các tác giả Văn Như Cương, Tạ Mân [1]. Để biên soạn Chương 3, chúng tôi tham khảo chủ yếu từ cuốn Hình học xạ ảnh của tác giả Văn Như Cương [2] và cuốn Hình học cao cấp của tác giả Nguyễn Mộng Hy [3].

Mặc dầu học phần hình học tuyến tính gồm các kiến thức cơ sở, xuất hiện từ khá sớm, tuy nhiên, bằng các kiến thức đó, với sự hỗ trợ của máy tính, nhiều vấn đề thời sự của toán học có thể được giải quyết. Để minh hoạ cho điều này, Mục 1.4 dành cho việc giới thiệu một số kết quả về tính chất của hàm bậc hai trong không gian afin, đặc biệt, có những kết quả mới thu được trong vài năm trở lại đây. Hy vọng rằng, sinh viên có thể tiếp cận nghiên cứu các vấn đề mới từ các kiến thức lĩnh hội được qua học phần.

---

[1] Văn Như Cương, Tạ Mân (1988), *Hình học afin và Hình học Euclid.* Nxb ĐHQG Hà Nội.

[2] Văn Như Cương (1999), *Hình học xạ ảnh.* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

[3] Nguyễn Mộng Hy (1999), *Hình học cao cấp.* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

Hình học tuyến tính được nghiên cứu dựa trên mối quan hệ với đại số tuyến tính, do vậy, yêu cầu người học cần có các kiến thức cơ sở về lĩnh vực này. Mặt khác, để nắm vấn đề dễ dàng hơn, người học cần có khả năng trực giác thông qua hình học trên không gian 2 chiều và 3 chiều thông thường. Để củng cố kiến thức và giúp tự học có hiệu quả, một hệ thống câu hỏi ôn tập và bài tập chọn lọc kèm theo hướng dẫn lời giải cũng được đưa vào trong giáo trình.

Tập thể tác giả biên soạn giáo trình gồm có: TS. Nguyễn Duy Bình là chủ biên, biên soạn nội dung Chương 3; TS. Nguyễn Ngọc Bích biên soạn Mục 1.1, 1.2 và 1.3 Chương 1; TS. Nguyễn Hữu Quang biên soạn Mục 1.4 Chương 1 và Chương 2.

Trong quá trình biên soạn, các tác giả đã nhận được những ý kiến nhận xét và đóng góp bổ ích từ các chuyên gia và đồng nghiệp, đặc biệt là PGS. TS. Nguyễn Huỳnh Phán và PGS. TS. Nguyễn Thành Quang. Các tác giả xin chân thành cảm ơn.

Giáo trình được biên soạn sau nhiều năm giảng dạy học phần Hình học tuyến tính cho sinh viên ngành Sư phạm Toán học. Tuy nhiên giáo trình không thể tránh khỏi thiếu sót. Các tác giả rất mong nhận được sự góp ý của người đọc.

Các tác giả

CHƯƠNG 1

HÌNH HỌC AFIN

Mục tiêu chương

Học xong chương này, sinh viên có thể:
- Phát biểu được khái niệm không gian afin và mô tả khái niệm thông qua các ví dụ. Nhận biết được hệ điểm độc lập, hệ điểm phụ thuộc, mục tiêu afin trong không gian afin. Xác định được đơn hình, hình hộp trong các mô tả cụ thể.
- Nhận biết được ánh xạ afin, biến đổi afin. Giải thích được khái niệm "hình học afin".
- Lập được phương trình của phẳng; xác định được vị trí tương đối của các phẳng.
- Lập được phương trình phép biến đổi afin.
- Giải được một số bài toán liên quan đến tính chất của ánh xạ afin, biến đổi afin.
- Phát biểu được khái niệm siêu mặt bậc hai và các khái niệm liên quan, mô tả chúng thông qua các minh họa.
- Xác định được các yếu tố liên quan đến đường bậc hai: dạng của đường bậc hai, tâm của đường bậc hai; phương tiệm cận ...

1.1 Không gian afin

1.1.1 *Định nghĩa và ví dụ*

Định nghĩa 1.1.1.1. Cho $\mathbf{V}$ là không gian vectơ trên trường $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$), $\mathbf{A}$ là một tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó được gọi là điểm và ánh xạ $\varphi : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{V}$. Ký hiệu $\varphi(M, N) = \overrightarrow{MN}$ với $M, N \in \mathbf{A}$. Bộ ba $(\mathbf{A}, \varphi, \mathbf{V})$ được gọi là một không gian afin nếu hai tiên đề sau thỏa mãn:

i) Với mỗi điểm $M \in \mathbf{A}$, mỗi vectơ $\vec{v} \in \mathbf{V}$, có duy nhất điểm $N \in \mathbf{A}$ sao cho $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$;

ii) Với mọi ba điểm $M, N, P \in \mathbf{A}$ có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ (hệ thức Chasles).

Không gian afin $(\mathbf{A}, \varphi, \mathbf{V})$ còn được gọi là không gian afin $\mathbf{A}$ liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}$, hay gọi tắt là không gian afin $\mathbf{A}$ trên trường $\mathbf{K}$ (hoặc $\mathbf{K}-$không gian afin $\mathbf{A}$). Không gian vectơ liên kết $\mathbf{V}$ thường được ký hiệu $\overrightarrow{\mathbf{A}}$.

Không gian afin $\mathbf{A}$ được gọi là không gian n chiều nếu $\dim(\mathbf{V}) = n$. Không gian afin n chiều thường được ký hiệu là $\mathbf{A}^n$, số chiều của không gian afin $\mathbf{A}$ ký hiệu là $\dim(\mathbf{A})$.

Khi $\mathbf{K}$ là trường số thực, ta nói $\mathbf{A}$ là không gian afin thực, khi $\mathbf{K}$ là trường số phức, ta nói $\mathbf{A}$ là không gian afin phức.

Trong giáo trình này, nếu không nói gì thêm thì không gian afin được xét là không gian afin thực và có chiều hữu hạn.

Ví dụ 1.1.1.2. 1) Trong hình học ở trường trung học phổ thông, chúng ta cần phân biệt không gian 3 chiều thông thường là không gian chỉ gồm các điểm, ký hiệu là $\mathbf{E}^3$ và không gian các vectơ "tự do", ký hiệu là $\overrightarrow{\mathbf{E}^3}$. Với phép cộng hai vectơ và phép nhân mỗi số thực với một vectơ, $\overrightarrow{\mathbf{E}^3}$ là một không gian vectơ 3 chiều. Khi đó việc "vẽ" vectơ nối hai điểm A và B chính là ánh xạ liên kết φ nói trên. Ta có $\mathbf{E}^3$ là không gian afin liên kết với không gian vectơ $\overrightarrow{\mathbf{E}^3}$ vì có thể dễ dàng kiểm tra ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{E}^3 \times \mathbf{E}^3 &\to \overrightarrow{\mathbf{E}^3} \\ (A, B) &\mapsto \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

thỏa mãn các tiên đề trong Định nghĩa 1.1.1.1.

2) Cho $\mathbf{V}$ là một không gian vectơ, xét ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\to \mathbf{V} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \vec{v} - \vec{u} \end{aligned}.$$

Khi đó, φ thỏa mãn các tiên đề của không gian afin nên $\mathbf{V}$ là không gian afin liên kết với chính nó. Ta nói φ xác định một cấu trúc afin chính tắc trên không gian vectơ $\mathbf{V}$ hay $\mathbf{V}$ là không gian afin với cấu trúc afin chính tắc.

Sau đây là một số tính chất đơn giản suy từ định nghĩa của không gian afin.

Tính chất 1.1.1.3. *i)* $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$; $\forall M \in \mathbf{A}$, *trong đó* $\vec{0}$ *là vectơ không của* $\overrightarrow{\mathbf{A}}$.

Thật vậy, theo Tiên đề ii) ta có: $\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{MM}$, suy ra $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

ii) $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$; $\forall M, N \in \mathbf{A}$.

Thật vậy, theo tiên đề ii) ta có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$. Do đó ta suy ra $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.

iii) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ *khi và chỉ khi* $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$.

Thật vậy, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} \iff \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NQ} \iff \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$.

iv) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$ $\forall M, N, P \in \mathbf{A}$.

Thật vậy, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = -\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$.

1.1.2 *Hệ điểm độc lập*

Định nghĩa 1.1.2.1. Hệ $k+1$ điểm $\{M_0, M_1 \ldots, M_k\}$ $(k \geq 1)$ của không gian afin $\mathbf{A}$ được gọi là độc lập afin (hay gọi tắt là độc lập) nếu hệ vectơ $\{\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_k}\}$ độc lập tuyến tính trong không gian $\overrightarrow{\mathbf{A}}$.

Hệ điểm không độc lập afin được gọi là phụ thuộc afin (hay gọi tắt là phụ thuộc).

Quy ước: hệ chỉ gồm một điểm luôn được xem là độc lập.

Nhận xét 1.1.2.2. i) Trong định nghĩa trên điểm M_0 không đóng vai trò gì đặc biệt so với các điểm M_i khác. Thật vậy, ta có thể chứng minh được rằng với $i > 0$ nào đó hệ các vectơ $\{\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_k}\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi, hệ k vectơ $\{\overrightarrow{M_iM_0}, \ldots, \overrightarrow{M_iM_{i-1}}, \overrightarrow{M_iM_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{M_iM_k}\}$ độc lập tuyến tính.

ii) Hệ con của hệ điểm độc lập là hệ điểm độc lập, một hệ điểm chứa hệ con phụ thuộc là hệ điểm phụ thuộc.

Định lý 1.1.2.3. *Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ luôn có những hệ m điểm độc lập với $1 \leq m \leq n+1$, mọi hệ gồm nhiều hơn $n+1$ điểm đều là hệ phụ thuộc.*

Chứng minh. Giả sử $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ là một cơ sở nào đó của $\overrightarrow{\mathbf{A}}^n$. Vì $\mathbf{A}^n$ không rỗng nên có $M_0 \in \mathbf{A}^n$, khi đó mỗi i tồn tại duy nhất các điểm M_i sao cho $\overrightarrow{M_0M_i} = \vec{e}_i$. Theo định nghĩa, hệ điểm $\{M_0, M_1, \ldots, M_n\}$ là hệ gồm $n+1$ điểm độc lập. Khi đó, hiển nhiên hệ $\{M_0, M_1, \ldots, M_{m-1}\}$ với $1 \leq m \leq n+1$, là hệ gồm m điểm độc lập.

Nếu hệ $\{N_0, N_1, \ldots, N_p\}$ gồm hơn $n+1$ điểm thì $p > n$, do đó hệ $\{\overrightarrow{N_0N_1}, \ldots, \overrightarrow{N_0N_p}\}$ có nhiều hơn n vectơ nên phụ thuộc tuyến tính. Theo định nghĩa, suy ra hệ gồm $p+1$ điểm $\{N_0, N_1, \ldots, N_p\}$ là hệ điểm phụ thuộc. □

1.1.3 *Mục tiêu afin và tọa độ afin*

a) Mục tiêu afin

Định nghĩa 1.1.3.1. Cho không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ liên kết với không gian vectơ $\overrightarrow{\mathbf{A}}^n$.

Giả sử $\epsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ là một cơ sở của $\overrightarrow{\mathbf{A}}^n$ và O là một điểm thuộc $\mathbf{A}^n$. Khi đó tập hợp $\{O; \epsilon\}$ hay $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ được gọi là mục tiêu afin của $\mathbf{A}^n$, O là điểm gốc, $\vec{e}_i$ là vectơ cơ sở thứ i của mục tiêu, $\epsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ là cơ sở nền của mục tiêu.

Nhận xét 1.1.3.2. i) Ký hiệu E_i là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OE_i} = \vec{e}_i$, khi đó hệ điểm $\{O, E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ là hệ điểm độc lập. Ngược lại một hệ gồm $n+1$ điểm độc lập $\{O, E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ xác định một mục tiêu afin $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$. Do đó ta cũng gọi một hệ có thứ tự gồm $n+1$ điểm độc lập $\{O; E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ là một mục tiêu afin với điểm gốc là O, E_i được gọi là đỉnh thứ i của mục tiêu.

ii) Một mục tiêu afin chỉ có một cơ sở nền duy nhất, nhưng ngược lại với một cơ sở $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ của $\overrightarrow{\mathbf{A}}^n$ có thể là nền của nhiều mục tiêu khác nhau trong $\mathbf{A}^n$.

b) Tọa độ afin

Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ cho mục tiêu afin $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$. Với mỗi điểm $X \in \mathbf{A}^n$ ta có vectơ $\overrightarrow{OX} \in \overrightarrow{\mathbf{A}}^n$, vì vậy có duy nhất bộ n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho $\overrightarrow{OX} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$.

Bộ n phần tử $(x_1, \ldots, x_n)$ như trên được gọi là tọa độ của điểm X đối với mục tiêu đã chọn, ký hiệu $X(x_1, \ldots, x_n)$ hay $X = (x_1, \ldots, x_n)$.

Nhận xét 1.1.3.3. i) Theo định nghĩa, đối với mục tiêu afin $\{O; E_1,$ $\ldots$, $E_n\}$, điểm O có tọa độ $(0, \ldots, 0)$ và điểm E_i có tọa độ (0, $\ldots$,1,$\ldots$, 0) (số 1 ở vị trí thứ i).

ii) Nếu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ thì

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = (y_1 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - x_2)\vec{e}_2 + \ldots + (y_n - x_n)\vec{e}_n.$$

Vậy vectơ $\overrightarrow{XY}$ có tọa độ đối với cơ sở $\epsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ của không gian $\overrightarrow{\mathbf{A}}^n$ là $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)$.

iii) Giả sử trên $\mathbf{A}^n$ đã chọn mục tiêu cố định $\{O; \epsilon\}$ với $\epsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Xét ánh xạ:

$$\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$X \mapsto (x_i)$$

với (x_i) là tọa độ của M đối với mục tiêu $\{O; \epsilon\}$. Ta có φ là một song ánh. Ánh xạ này cho phép đồng nhất mỗi điểm của $\mathbf{A}^n$ với một phần tử của $\mathbb{R}^n$ và nhờ đó sau này các đối tượng hình học sẽ được đồng nhất với các đối tượng đại số.

c) Đổi mục tiêu afin

Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ cho hai mục tiêu afin $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ (I) và $\{O'; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n\}$ (II). Với mỗi điểm $X \in \mathbf{A}^n$ gọi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là tọa độ của X đối với với mục tiêu (I), $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ là tọa độ của X đối với với mục tiêu (II).

Giả sử tọa độ của O' đối với mục tiêu (I) là $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và

$$\begin{cases} \vec{e'}_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + \ldots + c_{n1}\vec{e}_n \\ \vdots \\ \vec{e'}_n = c_{1n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + c_{nn}\vec{e}_n \end{cases}.$$

Ta tìm mối liên hệ giữa (x_i) và (x'_i).

Từ đẳng thức $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X}$ ta có

$$\begin{aligned} x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n &= a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n + x'_1\vec{e'}_1 + \ldots + x'_n\vec{e}_n \\ &= a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n + x'_1(c_{11}\vec{e}_1 + \ldots + c_{n1}\vec{e}_n) \\ &\quad + \ldots + x'_n(c_{1n}\vec{e}_1 + \ldots + c_{nn}\vec{e}_n) \\ &= (a_1 + x'_1c_{11} + \ldots + x'_nc_{1n})\vec{e}_1 + \ldots \\ &\quad + (a_n + x'_1c_{n1} + \ldots + x'_nc_{nn})\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \ldots + c_{1n}x'_n + a_1 \\ x_2 = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + \ldots + c_{2n}x'_n + a_2 \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}x'_1 + c_{n2}x'_2 + \ldots + c_{nn}x'_n + a_n \end{cases} \quad (*)$$

Ký hiệu $[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, [x'] = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$ (ma trận chuyển từ cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ đến cơ sở $\left\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \dots, \vec{e'}_n\right\}$ và $[a] = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$). Khi đó, (*) có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$[x] = C\,[x'] + [a]. \qquad (**)$$

Các biểu thức (*) hoặc (**) được gọi là công thức đổi tọa độ (hay công thức đổi mục tiêu từ mục tiêu (I) sang mục tiêu (II).

1.1.4 *Phẳng và phương trình của phẳng*

a) Các phẳng trong không gian afin

Định nghĩa 1.1.4.1. Cho không gian afin $\mathbf{A}$ liên kết với không gian vectơ $\overrightarrow{\mathbf{A}}$. Gọi I là một điểm của $\mathbf{A}$ và $\overrightarrow{\alpha}$ là một không gian vectơ con của $\overrightarrow{\mathbf{A}}$. Khi đó tập hợp $\alpha = \{M \in \mathbf{A} : \overrightarrow{IM} \in \overrightarrow{\alpha}\}$ được gọi là cái phẳng (hay gọi tắt là phẳng) đi qua I, có phương là $\vec{\alpha}$.

Nếu $\vec{\alpha}$ có số chiều bằng m thì ta nói α là phẳng m chiều (hay $m-$phẳng) và viết $\dim(\alpha) = m$.

Theo cách gọi thông thường, $1-$phẳng là đường thẳng, $2-$phẳng là mặt phẳng. Phẳng $(n-1)$ chiều trong không gian n chiều được gọi là siêu phẳng.

Nhận xét 1.1.4.2. i) Không gian afin $\mathbf{A}^n$ là $n-$phẳng của nó, có phương là $\overrightarrow{\mathbf{A}}^n$.

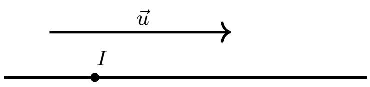
ii) Mỗi điểm là một $0-$phẳng.

iii) Nếu α là phẳng đi qua điểm I thì $I \in \alpha$ và với mọi $M, N \in \alpha$, vectơ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM} \in \overrightarrow{\alpha}$.

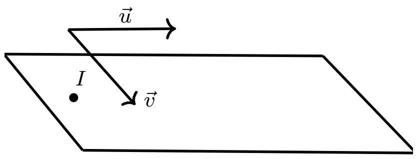
iv) Điểm I trong định nghĩa của phẳng α không đóng vai trò gì đặc biệt so với các điểm khác của α. Thật vậy, giả sử α là phẳng đi qua

I có phương $\overrightarrow{\alpha}$ và J là một điểm nào đó của α. Điều đó có nghĩa là $\overrightarrow{IJ} \in \overrightarrow{\alpha}$. Ta có $M \in \alpha$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{IM} \in \overrightarrow{\alpha}$ hay khi và chỉ khi $\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IJ} \in \overrightarrow{\alpha}$, tức là khi và chỉ khi $\overrightarrow{JM} \in \overrightarrow{\alpha}$. Điều đó chứng tỏ rằng điểm J có thể đóng vai trò của điểm I.

v) Đường thẳng được xác định bởi một điểm và một vectơ chỉ phương khác 0. Mặt phẳng được xác định bởi một điểm và hai vectơ độc lập tuyến tính (Hình 1.1 và 1.2).



Hình 1.1: Đường thẳng được xác định bởi một điểm và một vectơ chỉ phương.



Hình 1.2: Mặt phẳng được xác định bởi một điểm và một cặp vectơ chỉ phương.

Định lý 1.1.4.3. *Nếu α là $m-$phẳng của không gian afin $\mathbf{A}$ và có phương $\overrightarrow{\alpha}$ thì α là không gian afin m chiều liên kết với không gian vectơ $\overrightarrow{\alpha}$.*

Chứng minh. Giả sử α là m-phẳng trong không gian afin $\mathbf{A}$ tương ứng với bộ ba $(\mathbf{A}, \varphi, \overrightarrow{\mathbf{A}})$ đi qua I và có phương $\overrightarrow{\alpha}$. Rõ ràng $\alpha \neq \emptyset$ vì $I \in \alpha$. Với mọi cặp điểm $M, N \in \alpha$, theo định nghĩa của α thì $\overrightarrow{IM} \in \overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{IN} \in \overrightarrow{\alpha}$, suy ra $\varphi(M,N) = \overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM} \in \overrightarrow{\alpha}$. Vậy ta có thể xét ánh xạ:

$$\varphi|_{\alpha\times\alpha} : \alpha \times \alpha \to \overrightarrow{\alpha}$$

và ánh xạ này thỏa mãn hai tiên đề i), ii) của không gian afin. Thật vậy, tiên đề i) suy ra từ định nghĩa của phẳng, còn tiên đề ii) đúng vì nó đúng trên toàn bộ $\mathbf{A}$.

Vậy $(\alpha, \varphi|_{\alpha\times\alpha}, \overrightarrow{\alpha})$ là không gian afin hay α là không gian afin liên kết với không gian vectơ $\overrightarrow{\alpha}$. □

Định lý 1.1.4.4. *Qua $m+1$ điểm độc lập của không gian afin $\mathbf{A}$ có một và chỉ một $m-$phẳng $(m \geq 0)$.*

Chứng minh. Giả sử $M_0, M_1, \ldots, M_m$ $(m \geq 1)$ là $m+1$ điểm độc lập của không gian afin $\mathbf{A}$ liên kết với không gian vectơ $\overrightarrow{\mathbf{A}}$. Khi đó hệ m vectơ

$$\{\overrightarrow{M_0M}_1, \overrightarrow{M_0M}_2, \ldots, \overrightarrow{M_0M}_m\}$$

của $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ là độc lập tuyến tính. Gọi $\overrightarrow{\alpha}$ là không gian vectơ con của $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ nhận m vectơ đó làm cơ sở. Gọi α là phẳng đi qua M_0 có phương là $\overrightarrow{\alpha}$. Vì $\overrightarrow{M_0M}_i \in \overrightarrow{\alpha}$ nên $M_i \in \alpha$ với $i = 1, 2, \ldots, m$. Vậy α là phẳng đi qua $m+1$ điểm đã cho. Sự duy nhất của $m-$phẳng là hiển nhiên.

Với $m = 0$, hiển nhiên vì mỗi điểm là một $0-$phẳng □

Hệ quả 1.1.4.5. *Một hệ gồm $m+1$ điểm của không gian afin $\mathbf{A}$ là độc lập khi và chỉ khi chúng không cùng thuộc một $(m-1)-$phẳng $(m \geq 1)$.*

b) Vị trí tương đối của các phẳng

Định nghĩa 1.1.4.6. Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ cho $p-$phẳng α và $q-$phẳng β có phương lần lượt là $\overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{\beta}$. Khi đó:

i) α và β được gọi là cắt nhau nếu chúng có điểm chung;

ii) α được gọi là song song với β nếu $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\beta}$ hoặc $\overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\alpha}$ ký hiệu $\alpha \parallel \beta$;

iii) α và β được gọi là chéo nhau nếu chúng không cắt nhau và không song song với nhau;

iv) Giao $\alpha \cap \beta$ hiểu theo nghĩa thông thường của lý thuyết tập hợp và được gọi là giao của hai phẳng α và β;

v) Tổng $\alpha + \beta$ là giao của tất cả các phẳng chứa α và β, $\alpha + \beta$ được gọi là tổng của hai phẳng α và β.

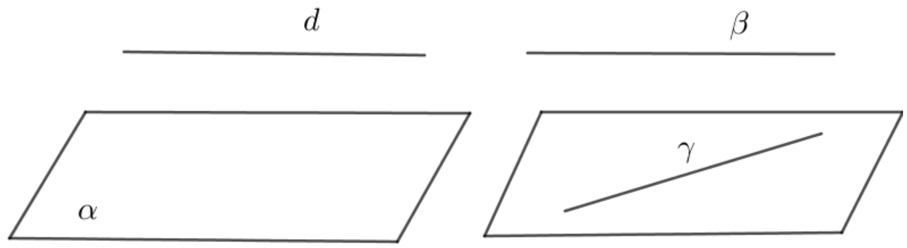
Ví dụ 1.1.4.7. Xét trong không gian 3 chiều thông thường $\mathbf{E}^3$. Ta có:

1) Hai đường thẳng "cắt nhau theo nghĩa ở hình học phổ thông" là hai $1-$phẳng cắt nhau tại một điểm ($0-$phẳng). Tổng của chúng là mặt phẳng duy nhất xác định bởi hai đường thẳng đó.

2) Hai mặt phẳng “cắt nhau theo nghĩa ở hình học phổ thông” là hai 2-phẳng cắt nhau theo một đường thẳng (1−phẳng). Tổng của chúng chính là $\mathbf{E}^3$.

3) Hai đường thẳng "song song theo nghĩa ở hình học phổ thông" là hai 1−phẳng song song. Tổng của chúng chính là mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó.

4) Tương tự, hai mặt phẳng "song song theo nghĩa ở hình học phổ thông" là hai 2−phẳng song song. Hai đường thẳng "chéo nhau theo nghĩa ở hình học phổ thông" là hai 1−phẳng chéo nhau. Tổng của chúng chính là $\mathbf{E}^3$.



Hình 1.3: $d \parallel \alpha$; β và γ chéo nhau

Định lý 1.1.4.8. *Giao của hai phẳng α và β hoặc là tập rỗng hoặc là phẳng có phương $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}$.*

Chứng minh. Nếu $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ thì chúng có ít nhất một điểm chung I. Gọi γ là phẳng đi qua I có phương $\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}$. Ta có

$$\begin{aligned} M \in \gamma \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IM} \in \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IM} \in \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{IM} \in \overrightarrow{\beta} \\ &\Leftrightarrow \quad M \in \alpha, M \in \beta \\ &\Leftrightarrow \quad M \in \alpha \cap \beta. \end{aligned}$$

Như vậy $\alpha \cap \beta$ là phẳng có phương $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}$. □

Hệ quả 1.1.4.9. *Nếu hai phẳng α và β song song với nhau thì hoặc chúng không có điểm chung hoặc chúng chứa nhau.*

Chứng minh. Thật vậy, nếu $\alpha \parallel \beta$ thì $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\beta}$ (hoặc $\overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\alpha}$). Giả sử $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ ta có $\alpha \cap \beta$ là cái phẳng có phương $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\alpha}$ (hoặc $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\beta}$). Suy ra $\alpha \cap \beta = \alpha$ (hoặc $\alpha \cap \beta = \beta$) hay $\alpha \subset \beta$ (hoặc $\beta \subset \alpha$). □

Định lý 1.1.4.10. *Cho các phẳng α và β. Khi đó $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ khi và chỉ khi với mọi điểm $P \in \alpha$ và mọi điểm $Q \in \beta$ ta có $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$.*

Chứng minh. Giả sử $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ và $P \in \alpha$, $Q \in \beta$. Lấy điểm $M \in \alpha \cap \beta$. Khi đó $\overrightarrow{PM} \in \overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{MQ} \in \overrightarrow{\beta}$, nên $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} \in \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$.

Ngược lại, giả sử $P \in \alpha$ và $Q \in \beta$, ta có $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$, do đó $\overrightarrow{PQ} = \vec{u} + \vec{v}$, với $\vec{u} \in \overrightarrow{\alpha}, \vec{v} \in \overrightarrow{\beta}$. Khi đó tồn tại $M \in \alpha, N \in \beta$ sao cho $\overrightarrow{PM} = \vec{u}, \overrightarrow{QN} = -\vec{v}$. Ta có $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NM}$. Suy ra $\vec{u} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{v} + \overrightarrow{NM}$. Dó đó $\overrightarrow{NM} = \vec{0}$. Vậy $M \equiv N$, từ đó $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. □

Định lý 1.1.4.11 (Định lý về số chiều của giao và tổng hai cái phẳng)**.** *Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ cho $p-$phẳng α và $q-$phẳng β có phương lần lượt là $\overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{\beta}$.*

i) Nếu α và β cắt nhau thì

$$\dim(\alpha + \beta) = \dim \alpha + \dim \beta - \dim(\alpha \cap \beta).$$

ii) Nếu α và β không cắt nhau thì

$$\dim(\alpha + \beta) = \dim \alpha + \dim \beta - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) + 1.$$

Chứng minh. Nếu α và β cắt nhau và giả sử $I \in \alpha \cap \beta$. Khi đó phẳng qua I có phương $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ là phẳng bé nhất chứa phẳng α và phẳng β, tức là phẳng $\alpha + \beta$. Ta có

$$\begin{aligned}\dim(\alpha + \beta) = \dim(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) &= \dim \overrightarrow{\alpha} + \dim \overrightarrow{\beta} - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) \\ &= \dim\alpha + \dim\beta - \dim(\alpha \cap \beta).\end{aligned}$$

Nếu α và β không cắt nhau thì có $P \in \alpha$ và $Q \in \beta$ sao cho $\overrightarrow{PQ} \notin \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ (theo Định lý 1.1.4.10). Gọi $\overrightarrow{\gamma}$ là không gian con 1 chiều sinh bởi $\overrightarrow{PQ}$ và I là một điểm thuộc α. Xét phẳng qua I có phương là không gian $(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) \oplus \overrightarrow{\gamma}$, đó là phẳng nhỏ nhất chứa α và β, do đó chính là $\alpha + \beta$. Ta có

$$\begin{aligned}\dim(\alpha+\beta) &= \dim((\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) \oplus \overrightarrow{\gamma})\\ &= \dim(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) + 1\\ &= \dim\overrightarrow{\alpha} + \dim\overrightarrow{\beta} - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) + 1\\ &= \dim\alpha + \dim\beta - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) + 1.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 1.1.4.12. 1) Từ công thức về số chiều suy ra tổng của một điểm và một đường thẳng không chứa nó là một mặt phẳng, tổng của hai đường thẳng cắt nhau là một mặt phẳng.

2) Trong không gian 3 chiều, xét α và β là hai đường thẳng chéo nhau. Áp dụng công thức trong định lý trên, ta có $\dim(\alpha + \beta) = 3$. Do đó $\alpha + \beta$ là toàn bộ không gian.

Định lý 1.1.4.13. *Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ cho siêu phẳng α và $m-$phẳng β $(1 \leq m \leq n-1)$. Khi đó hoặc β song song với α, hoặc β cắt α theo một $(m-1)-$phẳng.*

Chứng minh. - Nếu α và β cắt nhau thì có thể xảy ra hai trường hợp:

\+ Trường hợp 1: $\beta \subset \alpha$, khi đó α và β song song với nhau.

\+ Trường hợp 2: $\beta \not\subset \alpha$, khi đó $\alpha + \beta = \mathbf{A}^n$. Áp dụng công thức của định lý về số chiều của giao và tổng các phẳng (Định lý 1.1.4.11) ta có

$$\dim(\alpha + \beta) = \dim\alpha + \dim\beta - \dim(\alpha \cap \beta),$$

hay $n = n - 1 + m - \dim(\alpha \cap \beta)$.

Suy ra $\dim(\alpha \cap \beta) = m - 1$. Vậy α và β cắt nhau theo một $(m-1)-$phẳng.

- Nếu α và β không cắt nhau, cũng áp dụng Định lý 1.1.4.11, ta có:

$$\dim(\alpha + \beta) = \dim\alpha + \dim\beta - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) + 1,$$

hay $n = n - 1 + m - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) + 1$.

Suy ra $\dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) = m = \dim \overrightarrow{\beta}$. Tức là $\overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\alpha}$.

Vậy ta có β và α song song với nhau. Định lý được chứng minh.

□

c) Phương trình tham số của phẳng

Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu afin $\{O; \epsilon\}$, với $\epsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, cho $m-$phẳng α đi qua điểm I và có phương $\overrightarrow{\alpha}$ $(0 < m < n)$.

Chọn m vectơ độc lập tuyến tính trong $\overrightarrow{\alpha} : \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_m$, khi đó $\{\vec{a_1}, \overrightarrow{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$ là một cơ sở của $\overrightarrow{\alpha}$. Giả sử tọa độ điểm I đối với mục tiêu $\{O; \epsilon\}$ là $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, tọa độ vectơ $\vec{a}_i$ đối với cơ sở ϵ là $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$.

Giả sử $X \in \mathbf{A}^n$ và tọa độ của X đối với mục tiêu đã cho là $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ta có

$$X \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{IX} \in \overrightarrow{\alpha} \Leftrightarrow \overrightarrow{IX} = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \ldots + t_m\vec{a}_m$$

trong đó $t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$.

Tức là

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - b_i)\, \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{m} t_j \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} t_j \right) \vec{e}_i.$$

Vậy ta có

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} t_j + b_i, i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Hệ phương trình (1.1) được viết dưới dạng tường minh

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m + b_1, \\ x_2 = a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m + b_2, \\ \vdots \\ x_n = a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m + b_n. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

hay viết dưới dạng ma trận

$$[x] = t_1[\vec{a}_1] + t_2[\vec{a}_2] + \ldots + t_m[\vec{a}_n] + [b], \tag{1.3}$$

trong đó $[x], [b]$ lần lượt là ma trận tọa độ cột của các điểm X, I và $[\vec{a}_i]$ là ma trận tọa độ cột của vectơ $\vec{a}_i$.

Hệ phương trình (1.1) (hay (1.2), (1.3)) được gọi là phương trình tham số của $m-$phẳng α, các phần tử $t_i, i = 1, 2, \ldots, m$ được gọi là các tham số.

Với $m = 1$ ta có phương trình tham số của một đường thẳng α trong không gian afin n chiều là

$$\begin{cases} x_1 = a_1 t + b_1, \\ x_2 = a_2 t + b_2, \\ \qquad \vdots \\ x_n = a_n t + b_n. \end{cases}$$

trong đó t là tham số, các phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không đồng thời bằng 0 là các thành phần tọa độ của vectơ chỉ phương của α, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ là tọa độ của điểm I cho trước thuộc α còn $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là tọa độ của điểm tùy ý $X \in \alpha$.

d) Phương trình tổng quát của phẳng

Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu cho trước, cho m-phẳng α và giả sử α có phương trình tham số dạng (1.1)

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} t_j + b_i, i = 1, 2, \ldots, n,$$

trong đó $A = [a_{ij}]$ có hạng bằng m. Nếu xem phương trình tham số của α là một hệ gồm n phương trình đối với m ẩn $t_1, t_2, \ldots, t_m$ còn các $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$ là các hằng số thì từ điều kiện $A = [a_{ij}]$ có hạng là m ta có thể chọn trong n phương trình của hệ một hệ con gồm m phương trình độc lập (có định thức của ma trận hệ số của ẩn khác 0). Không mất tính tổng quát, giả sử đó là hệ gồm m

phương trình đầu. Giải hệ m phương trình đó (hệ Cramer) ta tìm được các nghiệm $t_1, t_2, \ldots, t_m$ và chúng biểu thị một cách duy nhất dưới dạng hàm bậc nhất của $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Thay m giá trị này của các t_i vào $n-m$ phương trình còn lại của hệ ta thu được hệ phương trình dạng

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + c_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n-m. \tag{1.4}$$

Ma trận hệ số của hệ phương trình (1.4) có hạng $n-m$ vì có định thức con cấp $n-m$ ứng với các ẩn $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ là

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ta gọi hệ phương trình dạng (1.4) là phương trình tổng quát của $m-$phẳng α. Đây là hệ phương trình tuyến tính gồm $n-m$ phương trình độc lập.

Ngược lại, có thể thấy rằng mỗi hệ phương trình tuyến tính gồm $n-m$ phương trình độc lập của các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là phương trình tổng quát của một $m-$phẳng nào đó trong không gian $\mathbf{A}^n$ (việc chứng minh điều này xem như một bài tập).

Nhận xét 1.1.4.14. Phương trình tổng quát của một siêu phẳng trong $\mathbf{A}^n$ (ứng với $m = n-1$) đối với một mục tiêu afin cho trước có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0,$$

trong đó các phần tử $a_i \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0.

Như vậy từ phương trình tổng quát của $m-$phẳng, ta có thể xem một $m-$phẳng là giao của $n-m$ siêu phẳng (độc lập) nào đó.

Ví dụ 1.1.4.15. Trong $\mathbf{A}^4$ với mục tiêu cho trước, cho các điểm

$$M(1,2,1,3), N(0,2,2,2), P(2,3,1,-2).$$

Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của phẳng bé nhất đi qua M, N, P.

Lời giải: Ba điểm M, N, P là độc lập nên phẳng bé nhất chứa chúng là mặt phẳng đi qua M và có các vectơ chỉ phương $\overrightarrow{MN} = (-1, 0, 1, -1)$, $\overrightarrow{MP} = (1, 1, 0, -5)$. Phương trình tham số của mặt phẳng (MNP) là

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t_1 + t_2 \\ x_2 = 2 + t_2 \\ x_3 = 1 + t_1 \\ x_4 = 3 - t_1 - 5t_2 \end{cases} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Rút t_1, t_2 từ phương trình thứ hai và thứ ba ta có $t_1 = x_3 - 1, t_2 = x_2 - 2$. Thay vào phương trình thứ nhất và phương trình thứ tư, sau khi biến đổi ta có phương trình tổng quát của mặt phẳng (MNP) :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_2 + x_3 + x_4 - 14 = 0 \end{cases}.$$

1.1.5 *Tâm tỷ cự*

Định lý 1.1.5.1. *Cho k điểm $P_1, P_2, \ldots, P_k$ của không gian afin $\mathbf{A}$ và k số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ thuộc trường $\mathbb{R}$ sao cho $\sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0$. Khi đó có duy nhất điểm G sao cho $\sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$.*

Chứng minh. Lấy điểm O tùy ý của $\mathbf{A}$ ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0} \ &\Leftrightarrow\ \sum_{i=1}^k \lambda_i (\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow\ \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{OP_i} = (\sum_{i=1}^k \lambda_i)\overrightarrow{OG}, \end{aligned}$$

tức

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{OP_i}.$$

Vậy điểm G là xác định và duy nhất từ điều kiện trên. □

Điểm G nói trong định lý trên được gọi là tâm tỷ cự của hệ điểm $P_1, P_2, \dots, P_k$ gắn với họ hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Chú ý: Các tâm tỷ cự của cùng một hệ điểm $P_1, P_2, \dots, P_k$ gắn với hai họ hệ số tỷ lệ: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ và $t\lambda_1, t\lambda_2, \dots, t\lambda_k$ $(t \neq 0)$ là trùng nhau.

Trong trường hợp các hệ số λ_i bằng nhau, tâm tỷ cự G của hệ điểm $P_1, P_2, \dots, P_k$ được gọi là trọng tâm của hệ điểm. Theo chú ý trên, trọng tâm của hệ điểm là tâm tỷ cự gắn với họ hệ số $1, 1, \dots, 1$.

Nói riêng,

+ G là trọng tâm của hệ hai điểm A, B nếu $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$,

+ G là trọng tâm của hệ ba điểm A, B, C nếu $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Nhận xét 1.1.5.2. Từ phép chứng minh định lý trên, nếu chọn O là gốc mục tiêu tọa độ, ta có tọa độ của tâm tỉ cự được tính qua tọa độ của hệ điểm như sau:

$$[G] = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i [P_i]\,.$$

Đặc biệt, khi G là trọng tâm của hệ điểm, ta có

$$[G] = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} [P_i].$$

Định lý 1.1.5.3. *Cho hệ điểm $P_0, P_1, \dots, P_m$ trong không gian afin* $\mathbf{A}$. *Khi đó tập các tâm tỉ cự của hệ điểm (gắn với các họ hệ số khác nhau) là phẳng bé nhất chứa các điểm này.*

Chứng minh. Gọi α là phẳng bé nhất chứa các điểm $P_0, P_1, \dots, P_m$. Khi đó các vectơ $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_m}$ thuộc phương của α. Giả sử $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_s}, s \leq m$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính tối đại từ hệ trên. Ta có $s = \dim(\alpha)$.

Giả sử G là điểm bất kỳ thuộc α, vì $\overrightarrow{P_0G}$ thuộc phương của α nên

$\overrightarrow{P_0G} = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i \overrightarrow{P_0P}_i = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i \left(\overrightarrow{GP}_i - \overrightarrow{GP}_0\right) \Leftrightarrow \left(1 - \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i\right) \overrightarrow{GP}_0 +$
$\sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i \overrightarrow{GP}_i = \vec{0}.$

Điều này chứng tỏ G là tâm tỉ cự của hệ điểm đã cho gắn với họ hệ số

$$(1 - \sum_{i=1}^{s} \lambda_i), \lambda_1, \ldots, \lambda_s, 0, \ldots, 0.$$

Ngược lại, nếu G là tâm tỉ cự của họ điểm đã cho gắn với họ hệ số $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, thì

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{GP}_i = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \left(\overrightarrow{GP}_0 + \overrightarrow{P_0P}_i\right) = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0G} = -\frac{1}{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P_0P}_i.
\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{P_0G}$ thuộc phương của α, do đó G thuộc α. □

Khi xét hệ điểm là độc lập, từ định lý trên ta có

Hệ quả 1.1.5.4. *Giả sử α là $m-$phẳng đi qua $m+1$ điểm độc lập $P_0, P_1, \ldots, P_m$. Khi đó α chính là tập hợp các tâm tỷ cự của hệ điểm đó (gắn với các họ hệ số khác nhau).*

Định lý 1.1.5.5. *Giả sử α là $m-$phẳng đi qua $m+1$ điểm độc lập $P_0, P_1, \ldots, P_m$ và O là một điểm tùy ý. Khi đó điều kiện cần và đủ để điểm M thuộc α là $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OP}_i$, trong đó $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$.*

Chứng minh. Điểm $M \in \alpha$ khi và chỉ khi M là tâm tỉ cự của họ điểm $P_0, P_1, \ldots, P_m$ gắn với họ hệ số $\lambda'_0, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_m$, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m} \lambda'_i \overrightarrow{MP}_i = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda'_i \left(\overrightarrow{OP}_i - \overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda'_i\right) \overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} \lambda'_i \overrightarrow{OP}_i \\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OP}_i,
\end{aligned}$$

trong đó $\lambda_i = \dfrac{\lambda'_i}{\sum_{i=0}^m \lambda' i}$, có $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$.

$\square$

1.1.6 *Tỷ số đơn, tập lồi, đơn hình, hình hộp*

a) Tỷ số đơn

Cho P và Q là hai điểm phân biệt trong không gian afin $\mathbf{A}$. Điểm M thuộc đường thẳng d đi qua P và Q, đồng thời $M \neq Q$ khi và chỉ khi có số thực $k \neq 0$ để $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MQ}$. Khi đó k được gọi là tỉ số đơn của hệ ba điểm M, P, Q thẳng hàng lấy theo thứ tự đó. Ký hiệu $k = (MPQ)$.

+ Khi $k = -1$, ta gọi M là trung điểm của cặp điểm P và Q.

+ Cho hai điểm phân biệt P, Q. Tập hợp các điểm thuộc đường thẳng PQ gồm hai điểm P, Q và các điểm M sao cho $k = (MPQ) < 0$ được gọi là đoạn thẳng PQ. Hai điểm P, Q được gọi là các đầu mút của đoạn thẳng.

Định lý 1.1.6.1. *Cho hai điểm phân biệt A, B trong không gian afin $\mathbf{A}$, M là một điểm trong $\mathbf{A}$. Thế thì M thuộc đoạn thẳng AB khi và chỉ khi với điểm O tùy ý trong $\mathbf{A}$, tồn tại số thực $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ sao cho $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$.*

Chứng minh. Giả sử điểm M thuộc đoạn thẳng (do đó thuộc đường thẳng) AB và O là điểm tùy ý trong không gian, theo Định lý 1.1.5.5 tồn tại các số thực $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ sao cho

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{OM} = \lambda_1\overrightarrow{OA} + \lambda_2\overrightarrow{OB} \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \lambda_1\overrightarrow{OA} + \lambda_2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda_2\overrightarrow{AB} = \lambda_2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \\
\Leftrightarrow (\lambda_2 - 1)\,\overrightarrow{AM} = \lambda_2\overrightarrow{BM}.
\end{gathered}$$

Nếu M là điểm khác A và B, khi đó $\lambda_2 \neq 0, 1$, từ đẳng thức trên suy ra $(ABM) = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1}$. Vì $(ABM) < 0$ suy ra $0 < \lambda_2 < 1$. Do đó nếu đặt $\lambda_2 = \lambda$, ta có

$$\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Kể cả khi M là các điểm mút A, B của đoạn thẳng, ta có

$$\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}, \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

Ngược lại, giả sử với điểm O tùy ý trong không gian, tồn tại số thực $\lambda, 0 \le \lambda \le 1$ sao cho $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$.

Nếu $\lambda = 0$ thì M trùng với điểm A và nếu $\lambda = 1$ thì M trùng với điểm B.

Nếu $0 < \lambda < 1$, ta có $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1-\lambda)(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + \lambda(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow (1-\lambda)\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ $\overrightarrow{MA} = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}\overrightarrow{MB}$. Do đó $(ABM) = \dfrac{\lambda}{\lambda-1} < 0$. Vậy M thuộc đoạn thẳng AB (khác A và B). $\square$

b) Tập lồi

Tập $\mathbf{X}$ trong không gian afin $\mathbf{A}$ được gọi là tập lồi nếu với mọi điểm P, Q thuộc $\mathbf{X}$ thì đoạn thẳng PQ nằm hoàn toàn trong $\mathbf{X}$.

Dễ thấy giao của một họ không rỗng các tập lồi là một tập lồi. Từ đây ta có định nghĩa bao lồi của một tập $\mathbf{X} \subset \mathbf{A}$ là giao của tất cả các tập lồi chứa $\mathbf{X}$, tức là tập lồi bé nhất chứa $\mathbf{X}$.

Ví dụ 1.1.6.2. 1) Mỗi $m-$phẳng α trong không gian afin $\mathbf{A}$ là tập lồi vì nếu P, Q là hai điểm phân biệt thuộc α thì toàn bộ đường thẳng PQ thuộc α, do đó đoạn thẳng PQ nằm hoàn toàn trong α.

2) Gọi α là siêu phẳng trong không gian afin $\mathbf{A}$. Ta chia tập $\mathbf{A} \setminus \alpha$ thành hai tập bằng cách như sau:

Lấy điểm $O \in \mathbf{A} \setminus \alpha$. Tập $\mathbf{X}$ gồm những điểm M mà đoạn thẳng OM không có điểm chung với α. Tập $\mathbf{Y}$ gồm những điểm M mà đoạn thẳng OM có điểm chung với α. Khi đó $\mathbf{X}$ và $\mathbf{Y}$ được gọi là các nửa không gian mở. Các tập $\mathbf{X} \cup \alpha$, $\mathbf{Y} \cup \alpha$ được gọi là các nửa không gian đóng của không gian afin $\mathbf{A}$.

Ta có nửa không gian mở và nửa không gian đóng là các tập lồi.

c) Đơn hình m chiều

Định nghĩa 1.1.6.3. Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ cho $m+1$ điểm độc lập $P_0, P_1, \ldots, P_m$. Lấy $O \in \mathbf{A}^n$, khi đó tập

$$\mathcal{S} = \left\{ M \in \mathbf{A}^n : \overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OP}_i, \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, m \right\}$$

được gọi là một đơn hình m chiều hay $m-$đơn hình với các đỉnh $P_0, P_1, \ldots, P_m$ và ký hiệu là $\mathcal{S}(P_0, P_1, \ldots, P_m)$.

Từ định nghĩa ta có $0-$đơn hình là điểm, $1-$đơn hình là đoạn thẳng. Theo cách gọi thông thường $2-$đơn hình là hình tam giác, $3-$đơn hình là hình tứ diện.

Nhận xét 1.1.6.4. Nếu xét O là gốc của mục tiêu tọa độ, từ định nghĩa trên, ta có đơn hình với các đỉnh $P_0, P_1, \ldots, P_m$ là tập

$$\mathcal{S} = \left\{ M \in \mathbf{A}^n : [M] = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i [P_i], \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Từ một hệ con $k+1$ điểm của hệ điểm độc lập $P_0, P_1, \ldots, P_m$ ta có đơn hình k chiều nhận chúng làm các đỉnh, ta gọi $k-$đơn hình này là một biên k chiều của đơn hình $\mathcal{S}(P_0, P_1, \ldots, P_m)$ và biên lập nên từ $m-k$ đỉnh còn lại của đơn hình $\mathcal{S}(P_0, P_1, \ldots, P_m)$ được gọi là biên đối diện của nó.

Định lý 1.1.6.5. *Mỗi đơn hình là một tập lồi bé nhất chứa các đỉnh của đơn hình.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{S}\left(P_0, P_1, \ldots, P_m\right)$ là đơn hình chứa các đỉnh $P_0, P_1, \ldots, P_m$ và M, N là hai điểm bất kỳ thuộc đơn hình,

$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OP}_i, \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \forall i,$

$\overrightarrow{ON} = \sum_{i=0}^{m} \mu_i \overrightarrow{OP}_i, \sum_{i=0}^{m} \mu_i = 1, \mu_i \geq 0, \forall i.$
Điểm X thuộc đoạn thẳng MN khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= (1-t)\overrightarrow{OM} + t\overrightarrow{ON},\ 0 \leq t \leq 1\\ &= (1-t)\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OP}_i + t\sum_{i=0}^{m} \mu_i \overrightarrow{OP}_i\\ &= \sum_{i=0}^{m} [(1-t)\lambda_i + t\mu_i]\overrightarrow{OP}_i.\end{aligned}$$

Ta có $\sum_{i=0}^{m}[(1-t)\lambda_i + t\mu_i] = 1$ và $(1-t)\lambda_i + t\mu_i \geq 0, \forall i$. Do đó $X \in \mathcal{S}(P_0, P_1, \ldots, P_m)$. Vậy $\mathcal{S}(P_0, P_1, \ldots, P_m)$ là một tập lồi.

Tiếp theo, ta chứng tỏ $\mathcal{S}(P_0, P_1, \ldots, P_m)$ chứa trong tập lồi bất kỳ chứa các đỉnh $P_0, P_1, \ldots, P_m$. Giả sử $\mathcal{S}'$ là tập lồi chứa các đỉnh $P_0, P_1, \ldots, P_m$. Bằng qui nạp, ta chứng minh

$$\mathcal{S}(P_0, P_1, \ldots, P_m) \subset \mathcal{S}'.$$

Trước tiên, đoạn thẳng (1−đơn hình) $\mathcal{S}(P_0, P_1) \subset \mathcal{S}'$. Giả sử $S(P_0, P_1, \ldots, P_k) \subset \mathcal{S}'$ và $M \in \mathcal{S}(P_0, P_1, \ldots, P_{k+1})$. Khi đó

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i \overrightarrow{OP}_i,\ \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, k+1.$$

Nếu $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$ thì $\lambda_{k+1} = 1$ và $M \equiv P_{k+1} \in \mathcal{S}'$. Nếu $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = \lambda \neq 0$, ta có thể viết

$$\overrightarrow{OM} = \lambda \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda} \overrightarrow{OP}_i + \lambda_{k+1}\overrightarrow{OP}_{k+1}.$$

Đặt $\overrightarrow{ON} = \sum_{i=0}^{k} \dfrac{\lambda_i}{\lambda} \overrightarrow{OP}_i \Rightarrow N \in \mathcal{S}(P_0, P_1, \ldots, P_k) \subset \mathcal{S}'$.
$\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{ON} + \lambda_{k+1}\overrightarrow{OP}_{k+1}$ với $\lambda + \lambda_{k+1} = 1$ và $\lambda, \lambda_{k+1} \geq 0$. Vì $N, P_{k+1} \in \mathcal{S}'$ và $\mathcal{S}'$ lồi, suy ra $M \in \mathcal{S}'$. Vậy $\mathcal{S}(P_0, P_1, \ldots, P_{k+1}) \subset \mathcal{S}'$.
Đặc biệt, $\mathcal{S}(P_0, P_1, \ldots, P_m) \subset \mathcal{S}'$. □

d) Hình hộp m chiều

Định nghĩa 1.1.6.6. Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ cho $m+1$ điểm độc lập $P_0, P_1, \ldots, P_m$. Tập hợp những điểm M trong $\mathbf{A}^n$ sao cho

$$\overrightarrow{P_0M} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} \text{ với } 0 \le \lambda_i \le 1.$$

được gọi là hình hộp m chiều hay gọi tắt là $m-$hộp, ký hiệu $\mathbf{H}(P_0,$ $P_1,$ ..., $P_m)$.

Từ định nghĩa, $1-$hộp là đoạn thẳng. Theo cách gọi thông thường $2-$hộp là hình bình hành, $3-$hộp là hình hộp.

Định lý 1.1.6.7. *Hình hộp m chiều là một tập lồi.*

Chứng minh. Giả sử có $m-$hộp $\mathbf{H}(P_0, P_1, \ldots, P_m)$ và M, N là hai điểm tùy ý thuộc $m-$hộp đó. Ta có:

$$\overrightarrow{P_0M} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}, \text{ với } 0 \le \lambda_i \le 1;$$
$$\overrightarrow{P_0N} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \overrightarrow{P_0P_i}, \text{ với } 0 \le \gamma_i \le 1.$$

Khi đó điểm X thuộc đoạn MN khi và chỉ khi $\overrightarrow{P_0X} = t\overrightarrow{P_0M} + (1-t)\overrightarrow{P_0N}, 0 \le t \le 1$, hay

$$\overrightarrow{P_0X} = t\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} + (1-t)\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \overrightarrow{P_0P_i} = \sum_{i=1}^{m} \left[t\lambda_i + (1-t)\gamma_i\right] \overrightarrow{P_0P_i}.$$

Ta có $0 \le t, \lambda_i, \gamma_i \le 1$ nên $0 \le t\lambda_i + (1-t)\gamma_i \le t + (1-t) = 1$. Điều đó chứng tỏ X thuộc $m-$hộp $\mathbf{H}(P_0, P_1, \ldots, P_m)$. Vậy $m-$hộp $\mathbf{H}(P_0, P_1, \ldots, P_m)$ là một tập lồi. $\square$

1.2 Ánh xạ afin, biến đổi afin

1.2.1 *Ánh xạ afin*

Định nghĩa 1.2.1.1. Cho $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ là các không gian afin liên kết với hai không gian vectơ $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ và $\overrightarrow{\mathbf{A}'}$. Ánh xạ $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ được gọi là ánh xạ afin nếu có ánh xạ tuyến tính $\phi : \overrightarrow{\mathbf{A}} \to \overrightarrow{\mathbf{A}'}$ sao cho với mọi cặp điểm $M, N \in \mathbf{A}$ và ảnh $M' = f(M), N' = f(N)$ ta có $\overrightarrow{M'N'} = \phi(\overrightarrow{MN})$ (hay $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \phi(\overrightarrow{MN})$).

Ánh xạ tuyến tính ϕ được gọi là ánh xạ tuyến tính liên kết với ánh xạ afin f. Ta còn ký hiệu $\phi = \overrightarrow{f}$.

Ví dụ 1.2.1.2. 1) Xét ánh xạ đồng nhất $id : 1_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ Khi đó ta có id là ánh xạ afin với ánh xạ liên kết là ánh xạ đồng nhất $1_{\overrightarrow{\mathbf{A}}} : \overrightarrow{\mathbf{A}} \to \overrightarrow{\mathbf{A}}$.

Thật vậy, với mọi cặp điểm $M, N \in \mathbf{A}$, ta có $M' = 1_{\mathbf{A}}(M) = M, N' = 1_{\mathbf{A}}(N) = N$. Do đó $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} = 1_{\overrightarrow{\mathbf{A}}}(\overrightarrow{MN})$.

2) Xét ánh xạ $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$, $f(M) = P, \forall M \in \mathbf{A}$, với P là một điểm cố định trong $\mathbf{A}'$ (f được gọi là ánh xạ hằng). Gọi $\theta : \overrightarrow{\mathbf{A}} \to \overrightarrow{\mathbf{A}'}$ là ánh xạ tuyến tính không, tức $\theta(\vec{x}) = \vec{0}$. Ta có ánh xạ hằng f là ánh xạ afin nhận θ là ánh xạ tuyến tính liên kết.

Thật vậy, với mọi $M, N \in \mathbf{A}$ ta có $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{PP} = \vec{0} = \theta(\overrightarrow{MN})$.

3) Cho không gian afin $\mathbf{A}$ và vectơ $\vec{a} \in \overrightarrow{\mathbf{A}}$. Xét ánh xạ $t_{\vec{a}} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}, M \mapsto M'$ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$.

Ánh xạ $t_{\vec{a}}$ như trên được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a}$. Ta có phép tịnh tiến $t_{\vec{a}}$ là một ánh xạ afin liên kết với ánh xạ tuyến tính đồng nhất $1_{\overrightarrow{\mathbf{A}}}$.

Thật vậy, ta có

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} = 1_{\overrightarrow{\mathbf{A}}}(\overrightarrow{MN}), \forall M, N \in \mathbf{A}.$$

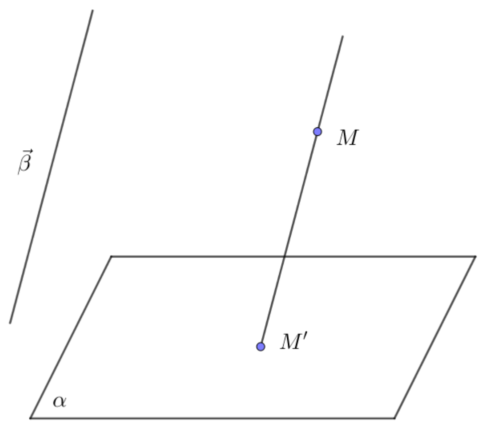
Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$ chính là ánh xạ đồng nhất trên không gian afin.

4) Cho không gian afin $\mathbf{A}$, một điểm $I \in \mathbf{A}$ và một số $k \neq 0$. Xét ánh xạ $V_I^k : \mathbf{A} \to \mathbf{A}, M \mapsto M'$ với M' được xác định bởi $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$. V_I^k được gọi là phép vị tự tâm I tỉ số k. Ta có V_I^k là ánh xạ afin có ánh xạ tuyến tính liên kết $\phi : \overrightarrow{\mathbf{A}} \to \overrightarrow{\mathbf{A}}, \phi(\vec{x}) = k\vec{x}, \forall \vec{x} \in \overrightarrow{\mathbf{A}}$.

Thật vậy, ta có $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{IN'} - \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IN} - k\overrightarrow{IM} = k(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM}) = k\overrightarrow{MN} = \phi(\overrightarrow{MN}), \forall M, N \in \mathbf{A}$.

5) Phép chiếu song song: Cho không gian afin $\mathbf{A}$ và phẳng $\alpha \subset \mathbf{A}$ có phương là không gian con $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\mathbf{A}}$. Gọi $\overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\mathbf{A}}$ là không gian con của $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ sao cho $\dim \overrightarrow{\alpha} + \dim \overrightarrow{\beta} = \dim \overrightarrow{\mathbf{A}}$ và $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \{\vec{0}\}$. Khi đó mỗi phẳng có phương $\overrightarrow{\beta}$ sẽ cắt α tại một điểm duy nhất.

Xét ánh xạ $f : \mathbf{A} \to \alpha$ (α là không gian afin có không gian liên kết là $\overrightarrow{\alpha}$) cho bởi: với $M \in \mathbf{A}$, $f(M) = M'$ là giao điểm của phẳng qua M có phương là $\overrightarrow{\beta}$ với phẳng α. Ta gọi M' là hình chiếu của M lên phẳng α theo phương $\overrightarrow{\beta}$ và f là phép chiếu song song không gian afin $\mathbf{A}$ lên phẳng α theo phương $\overrightarrow{\beta}$ (Hình 1.4).



Hình 1.4

Định lý 1.2.1.3. *Phép chiếu song song là ánh xạ afin.*

Chứng minh. Giả sử $f : \mathbf{A} \to \alpha$ là phép chiếu song song không gian afin $\mathbf{A}$ lên phẳng α theo phương $\overrightarrow{\beta}$. Xét ánh xạ $\phi : \overrightarrow{\mathbf{A}} = \overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta} \to$

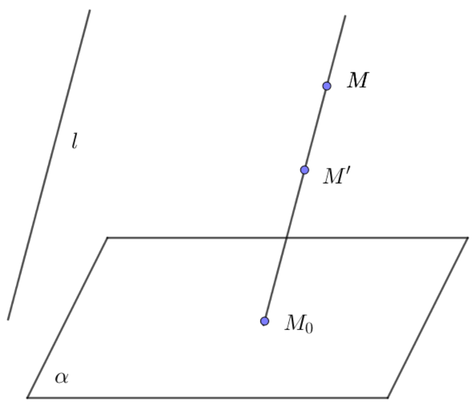
$\overrightarrow{\alpha}, \vec{x} = \vec{u} + \vec{v} \mapsto \vec{u}$. Dễ thấy rằng φ là ánh xạ tuyến tính. Giả sử M, N là hai điểm bất kỳ của không gian $\mathbf{A}$ có ảnh qua f là M', N'. Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{N'N}$ với $\overrightarrow{M'N'} \in \overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{N'N} \in \overrightarrow{\beta}$ Do đó $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{f(M)f(N)}$. Vậy f là ánh xạ afin liên kết với ánh xạ tuyến tính φ. $\square$

6) Phép thấu xạ: Cho α là một siêu phẳng trong không gian afin $\mathbf{A}$ và $\overrightarrow{l}$ là không gian vectơ một chiều không nằm trong phương của α, k là một số khác 0 . Xét ánh xạ $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ xác định như sau:

+ Nếu điểm $M \in \alpha$ thì $f(M) = M$.

+ Nếu $M \notin \alpha$ thì đường thẳng qua M có phương $\overrightarrow{l}$ cắt α tại một điểm duy nhất M_0. Gọi M' là điểm được xác định bởi điều kiện $(M'MM_0) = k$.

Đặt $f(M) = M'$. Khi đó f được gọi là phép thấu xạ afin tỉ số k, siêu phẳng α được gọi là nền thấu xạ và l được gọi là phương thấu xạ (Hình 1.5).



Hình 1.5

Phép thấu xạ với nền α, phương $\overrightarrow{l}$, tỉ số thấu xạ $k = -1$ còn được gọi là phép đối xứng xiên qua α theo phương $\overrightarrow{l}$.

Định lý 1.2.1.4. *Phép thấu xạ là ánh xạ afin.*

Chứng minh. Giả sử f là phép thấu xạ có nền là siêu phẳng α, phương $\overrightarrow{l}$ và tỉ số thấu xạ k. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned}\phi : \overrightarrow{\mathbf{A}} = \overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{l} &\to \overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{l}. \\ \vec{u} + \vec{v} &\mapsto \vec{u} + k\vec{v}\end{aligned}$$

Dễ dàng thấy rằng ϕ là ánh xạ tuyến tính. Ta chứng minh f là ánh xạ afin nhận ϕ là ánh xạ tuyến tính liên kết. Thật vậy,

- Nếu $\forall M, N$ không thuộc α, có ảnh M', N' và giả sử M_0, N_0 là giao điểm của MM' và NN' với α, ta có

$$\begin{aligned}\phi(\overrightarrow{MN}) &= \phi\left(\overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0N_0} + \overrightarrow{N_0N}\right) = k\overrightarrow{MM_0} + k\overrightarrow{N_0N} + \overrightarrow{M_0N_0} \\ &= \overrightarrow{M'M_0} + \overrightarrow{N_0N'} + \overrightarrow{M_0N_0} = \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{f(M)f(N)}.\end{aligned}$$

- Nếu $M, N \in \alpha$ thì $f(M) = M, f(N) = N$, do đó $\phi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{f(M)f(N)}$.

- Nếu chỉ một điểm thuộc α, giả sử $M \in \alpha, N \notin \alpha$. Gọi N_0 là giao điểm của NN' với α, ta có $f(N) = N'$ với $(N'NN_0) = k$. Từ đó $\phi(\overrightarrow{MN}) = \phi(\overrightarrow{MN_0} + \overrightarrow{N_0N}) = \overrightarrow{MN_0} + k\overrightarrow{N_0N} = \overrightarrow{MN_0} + \overrightarrow{N_0N'} = \overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{f(M)f(N)}$. □

Tính chất 1.2.1.5. *i) Mỗi ánh xạ afin chỉ có một ánh xạ tuyến tính liên kết duy nhất.*

ii) Cho ánh xạ tuyến tính $\phi : \overrightarrow{\mathbf{A}} \to \overrightarrow{\mathbf{A}'}$ *và cặp điểm* $I \in \mathbf{A}, I' \in \mathbf{A}'$. *Khi đó có duy nhất ánh xạ afin* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ *nhận* ϕ *là ánh xạ liên kết và* $f(I) = I'$.

iii) Ánh xạ afin $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ *biến một* $m-$*phẳng trong* $\mathbf{A}$ *thành một* $l-$*phẳng trong* $\mathbf{A}'$ *và* $l \leq m$.

iv) Ánh xạ afin bảo toàn tỷ số đơn của ba điểm thẳng hàng A, B, C *khi tỷ số đơn của ba điểm ảnh* A', B', C' *tồn tại, tức là khi* $(A'B'C')$ *tồn tại, ta có*

$$(ABC) = (A'B'C').$$

v) Ánh xạ afin biến tâm tỉ cự của một hệ điểm tương ứng với một họ hệ số thành tâm tỉ cự của họ điểm ảnh tương ứng với cùng họ hệ số. Đặc biệt, ánh xạ afin biến trọng tâm thành trọng tâm.

vi) Tích $g \circ f$ của hai ánh xạ afin $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ và $g : \mathbf{A}' \to \mathbf{A}''$ là ánh xạ afin nhận ánh xạ liên kết là $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$, tức là $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

Chứng minh. i) Giả sử ϕ, ϕ' là các ánh xạ tuyến tính liên kết của ánh xạ afin $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$. Với $\vec{x} \in \overrightarrow{\mathbf{A}}, \vec{x} = \overrightarrow{MN}$, ta có $\phi(\vec{x}) = \phi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)} = \phi'(\overrightarrow{MN}) = \phi'(\overrightarrow{x})$. Vậy $\phi \equiv \phi'$

ii) Ánh xạ $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ biến mỗi điểm M thành điểm $f(M)$, xác định bởi điều kiện $\overrightarrow{I'f(M)} = \phi(\overrightarrow{IM})$. Hơn nữa, theo cách xác định này ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(M)f(N)} &= \overrightarrow{I'f(N)} - \overrightarrow{I'f(M)} = \phi(\overrightarrow{IN}) - \phi(\overrightarrow{IM}) \\ &= \phi(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM}) = \phi(\overrightarrow{MN}).\end{aligned}$$

Do đó f là ánh xạ afin nhận ϕ là ánh xạ tuyến tính liên kết.

Nếu có ánh xạ afin f' nhận ϕ là ánh xạ tuyến tính liên kết và $f'(I) = I'$ thì $\overrightarrow{I'f'(M)} = \phi(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{I'f(M)}$. Từ đó $f(M) = f'(M)$ với mọi M, tức $f \equiv f'$.

Các tính chất iii); iv); v); vi) xem như bài tập. □

Định lý 1.2.1.6 (Về sự xác định ánh xạ afin)**.** *Cho $n+1$ điểm độc lập $M_0, M_1, \ldots, M_n$ trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}$ và $n+1$ điểm $M_0', M_1', \ldots, M_n'$ trong không gian afin $\mathbf{A}'$. Khi đó có duy nhất một ánh xạ afin $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ sao cho $f(M_i) = M_i', i = 0, 1, \ldots, n$.*

Chứng minh. Gọi $\phi : \overrightarrow{\mathbf{A}} \to \overrightarrow{\mathbf{A}'}$ là ánh xạ tuyến tính duy nhất biến các vectơ của cơ sở $\left\{\overrightarrow{M_0M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_n}\right\}$ tương ứng thành hệ vectơ $\left\{\overrightarrow{M_0'M_1'}, \ldots, \overrightarrow{M_0'M_n'}\right\}$. Khi đó theo Tình chất 1.2.1.5, có ánh xạ afin duy nhất nhận ϕ là ánh xạ liên kết và $f(M_0) = M_0'$. Ta có $\overrightarrow{M_0'M_i'} = \phi\left(\overrightarrow{M_0M_i}\right) = \overrightarrow{f(M_0)f(M_i)} = \overrightarrow{M_0'f(M_i)}$. Do đó $f(M_i) = M_i', i = 1, 2, \ldots, n$.

Nếu f' là ánh xạ afin sao cho $f'(M_i) = M'_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Dễ thấy rằng ánh xạ tuyến tính liên kết của f' biến các vectơ của cơ sở $\left\{\overrightarrow{M_0M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_n}\right\}$ tương ứng thành hệ vectơ $\left\{\overrightarrow{M'_0M'_1}, \ldots, \overrightarrow{M'_0M'_n}\right\}$, tức ánh xạ đó trùng với ϕ. Do đó f' trùng f. $\square$

1.2.2 *Biến đổi afin*

Định nghĩa 1.2.2.1. Ánh xa afin $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ và là song ánh được gọi là đẳng cấu afin.

Đẳng cấu afin $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ được gọi là biến đổi afin hay phép afin.

Khi có đẳng cấu afin $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ ta nói hai không gian $\mathbf{A}$ và $\mathbf{A}'$ là đẳng cấu afin với nhau.

Ví dụ 1.2.2.2. Phép đồng nhất, phép vị tự, phép tịnh tiến là các phép biến đổi afin. Phép chiếu song song $\mathbf{A}^n$ lên $m-$phẳng $(m < n)$ không là đẳng cấu afin.

Tính chất 1.2.2.3. *i) Ánh xạ afin là đẳng cấu afin khi và chỉ khi ánh xạ tuyến tính liên kết là đẳng cấu tuyến tính.*

ii) Hai không gian afin là đẳng cấu khi và chỉ khi chúng có cùng số chiều.

iii) Cho hai hệ $n+1$ điểm độc lập $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ và M'_1, M'_2, ..., M'_{n+1} trong hai không gian afin $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ có chiều n. Khi đó có duy nhất đẳng cấu afin $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ sao cho $f(M_i) = M'_i, i = 1, 2, \ldots, n+1$.

iv) Đẳng cấu afin biến một $m-$phẳng thành một $m-$phẳng.

v) Ánh xạ ngược của đẳng cấu afin là đẳng cấu afin.

Các tính chất trên xem như bài tập.

Định lý 1.2.2.4 (Định lý cơ bản của ánh xạ afin)**.** [1] *Cho $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ là các không gian afin n chiều $(n \geq 2)$, $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ là một song ánh*

[1]Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Hoàng Xuân Sính (1988), *Đại số tuyến tính và hình học.* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

bảo toàn tích chất thẳng hàng của các hệ ba điểm. Khi đó f là một ánh xạ afin.

Dưới đây là kết quả yếu hơn về đặc trưng của ánh xạ afin giữa các không gian afin trên trường $\mathbf{K}$ bất kỳ có đặc số khác 2.

Định lý 1.2.2.5 (Định lý cơ bản của ánh xạ afin)**.** *Cho $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ là một song ánh từ $\mathbf{K}-$không gian afin $\mathbf{A}$ lên $\mathbf{K}-$không gian afin $\mathbf{A}'$ ($\mathbf{K}$ là một trường có đặc số khác 2) bảo toàn tính chất thẳng hàng của các điểm và bảo toàn tỉ số đơn của các hệ ba điểm thẳng hàng. Khi đó f là một ánh xạ afin.*

Chứng minh. Lấy $I \in \mathbf{A}$ và một đẳng cấu afin $g : \mathbf{A}' \to \mathbf{A}$ biến $f(I)$ thành I thì $h = g \circ f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ là một biến đổi của $\mathbf{A}$ giữ bất động I và cũng có tính chất nếu trong giả thiết định lý về f. Chỉ cần chứng minh rằng h là một ánh xạ afin (vì khi đó $f = g^{-1} \circ h$ là tích hai ánh xạ afin).

Xét ánh xạ $\phi : \overrightarrow{\mathbf{A}} \to \overrightarrow{\mathbf{A}}$ xác định bởi $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{Ih(M)}, \forall M \in \mathbf{A}$ và chỉ cần chứng minh ϕ là một ánh xạ tuyến tính. Ta có:

1) $\phi(\lambda\vec{x}) = \lambda\phi(\vec{x})$ với mọi $\lambda \in \mathbf{K}, \vec{x} \in \overrightarrow{\mathbf{A}}$. Thật vậy, điều đó là rõ ràng khi $\lambda = 0$ hay $\vec{x} = \vec{0}$ (vì $h(I) = I$). Xét $\lambda \neq 0, \vec{x} \neq \vec{0}$, có thể coi $\lambda \neq 1$. Lấy $\overrightarrow{IM} = \vec{x}, \overrightarrow{IN} = \lambda\vec{x}$ thì I' M, N phân biệt, thẳng hàng, $(NMI) = \lambda$. Vậy $h(I), h(M), h(N)$ phân biệt, thẳng hàng và $(h(N)h(M)h(I)) = \lambda$, tức $\overrightarrow{Ih(N)} = \lambda\overrightarrow{Ih(M)}$, do đó $\phi(\lambda\vec{x}) = \lambda\phi(\vec{x})$

2) $\phi(\vec{x}+\vec{y}) = \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y})$, với mọi $\vec{x}, \vec{y} \in \overrightarrow{\mathbf{A}}$. Thật vậy, có thể giả sử $\vec{x}, \vec{y}$ độc lập tuyến tính (vì nếu $\vec{x}, \vec{y}$ phụ thuộc tuyến tính, đẳng thức cần chứng minh suy ra dễ dàng từ 1). Lấy $\overrightarrow{IM} = \vec{x}, \overrightarrow{IN} = \vec{y}$. Gọi P là trung điểm của đoạn MN, tức $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})$ (do trường $\mathbf{K}$ có đặc số khác 2 nên tồn tại nghịch đảo của 2 là $2^{-1} = \frac{1}{2}$) thì $(MNP) = -1$, do đó $(h(M)h(N)h(P)) = -1$. Vậy $h(P)$ là trung điểm của đoạn $h(M)h(N)$, tức $\overrightarrow{Ih(P)} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Ih(M)} + \overrightarrow{Ih(N)})$ và ta được $\phi\left(\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})\right) = \frac{1}{2}(\phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y}))$, nhưng $\phi\left(\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})\right) = \frac{1}{2}\phi(\vec{x} + \vec{y})$ nên $\phi(\vec{x} + \vec{y}) = \phi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$. $\square$

1.2.3 *Biểu thức tọa độ của ánh xạ afin*

Cho ánh xạ afin $f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$. Giả sử trong $\mathbf{A}^n$ đã cho mục tiêu $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, $O' = f(O)$ có tọa độ đối với mục tiêu là $(b_1, \ldots, b_n)$, $\overrightarrow{f}$ biến cơ sở $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ biến thành hệ vectơ $\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n\}$ và

$$\begin{cases} \vec{e'}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \ldots + a_{1n}\vec{e}_n \\ \vec{e'}_2 = a_{21}\vec{e}_1 + \ldots + a_{2n}\vec{e}_n \\ \vec{e'}_n = a_{n1}\vec{e}_1 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n \end{cases}.$$

Giả sử X là một điểm bất kỳ trong $\mathbf{A}^n$, gọi $X' = f(X)$. Giả sử đối với mục tiêu đã cho $X\,(x_1, \ldots, x_n)\,, X'\,(x', \ldots, x'_n)$. Ta tìm mối liên hệ giữa $(x_1, \ldots, x_n)$ và $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX'} = \textstyle\sum_{i=1}^n x'_i\vec{e}_i = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X'} &= \textstyle\sum_{i=1}^n b_i\vec{e}_i + \sum_{j=1}^n x_j\vec{e'}_j \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n b_i\vec{e}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j a_{ij}\vec{e}_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n (b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)\vec{e}_i. \end{aligned}$$

Suy ra $x'_i = b_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j,\ i = 1, \ldots, n$. Do đó

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Ký hiệu gọn là

$$[x'] = A[x] + [b],$$

trong đó

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ sang hệ vectơ $\{\vec{e'}_1, \ldots \vec{e'}_n\}$. Khi f là biến đổi afin, hệ $\{\vec{e'}_1, \ldots \vec{e'}_n\}$ cũng là cơ sở nên ma trận A không suy biến. Công thức trên được goi là biểu thức tọa độ (hay phương trình) của ánh xạ afin f đối với mục tiêu đã cho. Ma trận A trong biểu thức trên là ma trận vuông và A không suy biến khi f là biến đổi afin.

Ngược lại, đối với một mục tiêu cho trước, một phương trình có dạng trên là phương trình của một ánh xạ afin nào đó $f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ và f là biến đổi afin nếu A là không suy biến (việc chứng minh xem như bài tập).

Nhận xét 1.2.3.1. Nếu $[x'] = A[x] + [b]$ là phương trình của ánh xạ afin f đối với mục tiêu $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ thì phương trình của ánh xạ tuyến tính liên kết $\overrightarrow{f}$ đối với cơ sở $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ là $[x'] = A[x]$.

Ví dụ 1.2.3.2. Cho A, B, C là 3 điểm độc lập trong không gian afin $\mathbf{A}^2$. Gọi $f : \mathbf{A}^2 \to \mathbf{A}^2$ là phép afin thỏa mãn $f(A) = B, f(B) = C, f(C) = A$. Lập phương trình của f đối với mục tiêu $\{A; B, C\}$.

Giải. Cơ sở liên kết với mục tiêu $\{A; B, C\}$ là $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$. Gọi $\overrightarrow{f}$ là ánh xạ liên kết của f, ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AC}) &= \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Do đó ma trận chuyển từ cơ sở $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\}$ sang ảnh của nó qua ánh xạ tuyến tính liên kết là

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tọa độ của điểm $B = f(A)$ đối với mục tiêu $\{A; B, C\}$ là $(1, 0)$. Vậy phương trình của phép afin là

$$[x'] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [x] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

hay

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 - x_2 + 1, \\ x'_2 = x_1. \end{cases}$$

Ví dụ 1.2.3.3. Trong không gian afin $\mathbf{A}^2$ với mục tiêu cho trước, cho các điểm $A(1, 2), B(2, 1), C(3, 1), A'(-1, 0), B'(-2, 2), C'(1, -3)$.

Chứng minh rằng tồn tại duy nhất phép afin f biến A, B, C tương ứng thành A', B', C'.

Lập phương trình phép afin f đối với mục tiêu đã cho.

Giải. Ta có $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ là hệ độc lập tuyến tính nên $\{A, B, C\}$ là hệ điểm độc lập, do đó có duy nhất ánh xạ afin trên $\mathbf{A}^2$ biến A, B, C tương ứng thành A', B', C'.

Giả sử $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ là mục tiêu đã cho. Ta có $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \overrightarrow{AC} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\overrightarrow{A'B'} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\overrightarrow{A'C'} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$.

Vì phép afin f biến A, B, C tương ứng thành A', B', C' nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{A'B'},\\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AC}) &= \overrightarrow{A'C'}.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) &= -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2;\\ \overrightarrow{f}(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) &= 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2.\end{aligned}$$

Ta có hệ

$$\begin{cases} \overrightarrow{f}(\vec{e}_1) - \overrightarrow{f}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2,\\ 2\overrightarrow{f}(\vec{e}_1) - \overrightarrow{f}(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2.\end{cases}$$

Từ đó ta có $\begin{cases} \vec{f}(\vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2,\\ \vec{f}(\vec{e}_2) = 4\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2.\end{cases}$

Ma trận chuyển từ cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ sang cơ sở $\left\{\overrightarrow{f}(\vec{e}_1), \overrightarrow{f}(\vec{e}_2)\right\}$ là $A = \begin{bmatrix} 3 & 4\\ -5 & -7\end{bmatrix}$. Do đó phương trình của f đối với mục tiêu đã cho có dạng

$$[x'] = \begin{bmatrix} 3 & 4\\ -5 & -7\end{bmatrix}[x] + \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\end{bmatrix}.$$

Thay tọa độ cặp điểm tương ứng A, A' qua f vào phương trình ta có

$$\begin{bmatrix} -1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4\\ -5 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\ 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\end{bmatrix}.$$

Ta có $\begin{cases} -1 = 11 + b_1\\ 0 = -19 + b_2\end{cases} \Rightarrow b_1 = -12, b_2 = 19.$

Do đó phương trình của f là $[x'] = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -7 \end{bmatrix} [x] + \begin{bmatrix} -12 \\ 19 \end{bmatrix}$, hay

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 + 4x_2 - 12, \\ x'_2 = -5x_1 - 7x_2 + 19. \end{cases}$$

Vì $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ nên f là một đẳng cấu afin.

1.2.4 *Hình học của một nhóm các phép biến đổi, Hình học afin*

a) Nhóm các phép biến đổi của một không gian

Ta gọi một tập khác rỗng **X** là một không gian và mỗi phần tử của nó được gọi là một điểm, mỗi tập con của không gian **X** được gọi là một hình.

Mỗi song ánh $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ được gọi là một phép biến đổi của không gian **X**. Tập hợp các phép biến đổi của **X** lập thành một nhóm với phép hợp thành các song ánh, mỗi nhóm con của nhóm đó được gọi là một nhóm biến đổi của không gian **X**.

Ví dụ 1.2.4.1. Xét **V** là một không gian vectơ, ta có nhóm biến đổi bao gồm các phép biến đổi tuyến tính trên **V**. Xét **A** là không gian afin, ta có nhóm biến đổi bao gồm các phép biến đổi afin trên **A** (nhóm afin trên **A**).

Trong không gian afin, ta có tập gồm một điểm, một hệ điểm, một $m-$đơn hình, một $m-$hộp; một $m-$phẳng, ..., là các hình.

b) Hai hình tương đương đối với nhóm biến đổi

Cho một không gian **X** và **G** là một nhóm biến đổi trên **X**. Hai hình là ảnh của nhau qua một phép biến đổi của nhóm **G** được gọi là tương đương với nhau (đối với nhóm **G**). Trong không gian afin, hai hình là tương đương với nhau đối với nhóm các phép biến đổi afin còn được gọi là tương đương afin. Ví dụ: hai hệ m điểm độc lập là tương đương afin; hai $m-$đơn hình là tương đương afin; hai $m-$hộp là tương đương afin.

c) Bất biến đối với nhóm biến đổi

Ta gọi một tính chất là bất biến đối với nhóm biến đổi $\mathbf{G}$ trên không gian $\mathbf{X}$ nếu tính chất đó có trên một hình $\mathbf{H}$ thì có trên mọi hình $\mathbf{H}'$ tương đương (đối với nhóm $\mathbf{G}$) với hình $\mathbf{H}$. Bất biến đối với nhóm biến đổi afin còn gọi là bất biến afin. Khái niệm được xây dựng từ các bất biến afin gọi là khái niệm afin.

Ta có các bất biến afin sau: tính độc lập, phụ thuộc của một hệ điểm; tính đồng quy của các đường thẳng; tính thẳng hàng của các điểm; tính cắt nhau, song song, chéo nhau của hai phẳng.

Tỷ số đơn của 3 điểm, đặc biệt tính chất là trung điểm của đoạn thẳng, là các bất biến afin.

Điểm; $m-$phẳng; hệ điểm độc lập, hệ điểm phụ thuộc; tỷ số đơn; tâm tỉ cự; ... là các khái niệm afin.

d) Hình học của một nhóm phép biến đổi. Hình học afin

Môn học nghiên cứu các bất biến đối với nhóm biến đổi $\mathbf{G}$ của không gian $\mathbf{X}$ gọi là hình học của nhóm $\mathbf{G}$ trên không gian $\mathbf{X}$. Hình học afin n chiều là hình học của nhóm biến đổi afin trên không gian afin n chiều, nghĩa là nghiên cứu các bất biến afin trong không gian afin n chiều. Như vậy, hình học afin nghiên cứu tính độc lập, phụ thuộc của hệ điểm; các phẳng; quan hệ giữa các phẳng (song song, cắt nhau, chéo nhau), $m-$đơn hình, $m-$hộp, tỷ số đơn, tính đồng quy của các đường thẳng, tính thẳng hàng của hệ điểm, ...

1.3 Siêu mặt bậc hai

1.3.1 *Khái niệm siêu mặt bậc hai*

Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu afin $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ cho trước, xét phương trình bậc hai:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0, \qquad (1.5)$$

trong đó các hệ số a_{ij}, a_i, a_0 là các số thực, các a_{ij} không đồng thời bằng 0 và $a_{ij} = a_{ji}$. Tập hợp tất cả những điểm X thuộc $\mathbf{A}^n$ sao cho tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của nó thỏa mãn phương trình (1.5) được gọi là một siêu mặt bậc hai xác định bởi phương trình đó.

Nếu $(\mathcal{S})$ là siêu mặt bậc hai xác định bởi phương trình (1.5) thì phương trình (1.5) được gọi là phương trình của $(\mathcal{S})$ đối với mục tiêu đã cho.

Với $n = 2$ và $n = 3$ thì các siêu mặt bậc hai lần lượt được gọi là đường bậc hai và mặt bậc hai.

Ký hiệu $A = [a_{ij}]$, vì $a_{ij} = a_{ji}$ nên A là ma trận đối xứng $\big(A = A^T\big)$ và $A \neq 0$.

Ký hiệu $[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, [a] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$. Khi đó, phương trình (1.5) được viết dưới dạng

$$[x]^T A[x] + 2[a]^T[x] + a_0 = 0. \tag{1.6}$$

Ma trận $A = [a_{ij}]$ được gọi là ma trận bé, ma trận

$$B = \begin{bmatrix} a_0 & a^T \\ a & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

được gọi là ma trận lớn của siêu mặt bậc hai (nếu đặt $X = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$ thì (1.6) $\Leftrightarrow X^T BX = 0$).

Một siêu mặt bậc hai được gọi là không suy biến nếu ma trận lớn không suy biến ($\det B \neq 0$).

Dựa vào các tính chất đặc trưng, người ta gọi một siêu mặt bậc hai suy biến với hạng của ma trận lớn bằng hạng của ma trận bé là siêu nón bậc hai, một siêu mặt bậc hai suy biến với hạng của ma trận lớn khác hạng của ma trận bé là siêu trụ bậc hai.

Nhận xét 1.3.1.1. Khái niệm siêu mặt bậc hai không phụ thuộc vào việc chọn mục tiêu trong $\mathbf{A}^n$.

Thật vậy, giả sử ta có phép đổi mục tiêu

$$[x] = C\,[x'] + [b].$$

Thay giá trị của $[x]$ vào (1.6) ta được

$$\begin{aligned} &[x]^T A[x] + 2[a]^T[x] + a_0 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (C\,[x'] + [b])^T A\,(C\,[x'] + [b]) + 2[a]^T\,(C\,[x'] + [b]) + a_0 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left([x']^T\,C^T + [b]^T\right) A\,(C\,[x'] + [b]) \\ & +2[a]^T\,(C\,[x'] + [b]) + a_0 = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Ta có (1.7) tương đương với phương trình sau:

$$\begin{aligned} [x']^T\,C^T AC\,[x'] + \left([x']^T\,C^T A[b] + [b]^T AC\,[x'] + 2[a]^T C\,[x']\right) \\ +[a]^T[b] + a_0 = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Do $[x']^T\,C^T A[b]$ và $[b]^T AC\,[x']$ là các ma trận vuông cấp 1 nên

$$\left([x']^T\,C^T A[b]\right)^T = [b]^T A^T C\,[x'] = [x']^T\,C^T A[b].$$

Do đó (1.8) trở thành

$$[x']^T\,C^T AC\,[x'] + 2\left([b]^T AC + [a]^T C\right)[x'] + [a]^T[b] + a_0 = 0. \tag{1.9}$$

tức là cũng có dạng (1.5).

Ví dụ 1.3.1.2. Trong không gian afin $\mathbf{A}^2$ với mục tiêu cho trước, cho siêu mặt bậc hai có phương trình $x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2+2x_1-4x_2+1=0$.

Ta có $a_{11} = 1, a_{12} = a_{21} = 1, a_{22} = 3, a_1 = 1, a_2 = -2, a_0 = 1$.

Ma trận bé $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Ma trận lớn $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ không suy biến nên siêu mặt bậc hai là không suy biến.

Định lý 1.3.1.3. *Qua phép biến đổi afin, một siêu mặt bậc hai biến thành một siêu mặt bậc hai.*

Chứng minh. Giả sử ta có siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình (xem (1.5)):

$$[x]^T A[x] + 2[a]^T[x] + a_0 = 0, \tag{1.10}$$

và một phép biến đổi afin f có phương trình

$$[x] = B\,[x'] + [b] \text{ (với } \det B \neq 0). \tag{1.11}$$

Thay (1.11) vào (1.10) ta có:

$$(B\,[x'] + [b])^T A\,(B\,[x'] + [b]) + 2[a]^T\,(B\,[x'] + [b]) + a_0 = 0.$$

Khai triển phương trình trên với chú ý rằng:

$$[x']^T\,B^T A[b] = [b]^T AB\,[x']$$

(vì 2 vế của đẳng thức là các ma trận vuông cấp 1 nên chuyển vị của nó bằng chính nó), ta có:

$$[x']^T\,B^T AB\,[x'] + 2\left(B^T(A[b] + [a])\right)^T[x'] + [b]^T A[b] + 2[a]^T[b] + a_0 = 0. \tag{1.12}$$

Ta có $B^T AB = \left(B^T AB\right)^T$ và hạng của $B^T AB$ bằng hạng của A vì $\det\,B \neq 0$. Do đó $B^T AB \neq 0$.

Vậy (1.12) cũng là phương trình của một siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S}')$, đó chính là ảnh của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ qua ánh xạ afin f. □

1.3.2 *Giao của siêu mặt bậc hai với đường thẳng*

Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình:

$$[x]^T A[x] + 2[a]^T[x] + a_0 = 0 \tag{1.13}$$

và đường thẳng (d) đi qua điểm $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ có không gian phương sinh bởi vectơ $\vec{c}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Khi đó phương trình của (d) có thể viết dưới dạng:

$$[x] = \lambda[c] + [b], \tag{1.14}$$

trong đó $[c], [b]$ là các ma trận cột

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad [b] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Khi đó giao điểm của (d) với $(\mathcal{S})$ có tọa độ là nghiệm của hệ (1.13) và (1.14). Thay (1.14) vào (1.13) ta được:

$$(\lambda[c] + [b])^T A(\lambda[c] + [b]) + 2[a]^T(\lambda[c] + [b]) + a_0 = 0, \tag{1.15}$$

hay

$$\left([c]^T A[c]\right) \lambda^2 + 2P\lambda + Q = 0, \tag{1.16}$$

trong đó

$$P = [b]^T A[c] + [a]^T[c] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_i c_j + \sum_{i=1}^{n} a_i c_i, \tag{1.17}$$

$$Q = [b]^T A[b] + 2[a]^T[b] + a_0. \tag{1.18}$$

Nếu λ là nghiệm của (1.16), bằng cách thay vào (1.14) ta tìm được tọa độ giao điểm. Ta có các trường hợp sau:

+ Nếu $[c]^T A[c] = 0$ và $P \neq 0$ thì phương trình (1.16) có nghiệm duy nhất, tức là (d) cắt $(\mathcal{S})$ tại một điểm duy nhất.

+ Nếu $[c]^T A[c] = 0$ và $P = 0, Q \neq 0$ thì phương trình (1.16) vô nghiệm, tức là (d) không cắt $(\mathcal{S})$.

+ Nếu $[c]^T A[c] = 0$ và $P = 0, Q = 0$ thì phương trình (1.16) có nghiệm với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$, tức (d) chứa trong $(\mathcal{S})$.

1.3.3 *Tâm, điểm kỳ dị của siêu mặt bậc hai*

Định nghĩa 1.3.3.1. Tâm của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ là điểm mà khi ta chọn làm gốc mục tiêu thì phương trình của $(\mathcal{S})$ có dạng:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + a_0 = 0,$$

hay viết dưới dạng ma trận là

$$[x]^T A[x] + a_0 = 0 \text{ với } A = [a_{ij}]\,.$$

Từ định nghĩa trên ta suy ra nếu điểm M thuộc siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ và $(\mathcal{S})$ có tâm I thì điểm M' đối xứng với M qua tâm I cũng thuộc $(\mathcal{S})$. Vậy nếu $(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ thì tâm của nó cũng chính là tâm đối xứng của tập $(\mathcal{S})$.

Cho siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình đối với một mục tiêu là

$$[x]^T A[x] + 2[a]^T[x] + a_0 = 0.$$

Ta tìm điều kiện để điểm I là tâm của $(\mathcal{S})$. Đổi mục tiêu theo công thức $[x] = [x'] + [I], I$ là gốc của mục tiêu mới với hệ tọa độ (x'). Trong mục tiêu mới, phương trình của (S) là

$$\left([x']^T + [I]^T\right) A\left([x'] + [I]\right) + 2[a]^T\left([x'] + [I]\right) + a_0 = 0,$$

hay

$$[x]^T A[x] + 2\left([I]^T A + [a]^T\right)[x'] + [I]^T A[I] + a_0 = 0.$$

Từ định nghĩa của tâm, suy ra

$$[I]^T A + [a]^T = 0 \text{ hay } A[I] + [a] = 0.$$

Do đó tâm I của $(\mathcal{S})$ có tọa độ thỏa mãn phương trình

$$A[x] + [a] = 0.$$

Ví dụ 1.3.3.2. Cho đường bậc hai $(\mathcal{S})$ trong $\mathbf{A}^2$ có phương trình

$$x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 - 3 = 0.$$

Ta có $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $[a] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Tâm có tọa độ là nghiệm của phương trình

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} [x] + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

hay là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 1 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2 = 0 \end{cases}.$$

Nghiệm của hệ là $x_1 = -\dfrac{4}{7}, x_2 = \dfrac{1}{7}$. Vậy tâm của $(\mathcal{S})$ là điểm $I = \left(-\dfrac{4}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$.

Định nghĩa 1.3.3.3. Điểm I trong không gian afin $\mathbf{A}$ được gọi là điểm kì dị của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ nếu $I \in (\mathcal{S})$ và I là tâm của $(\mathcal{S})$.

Nếu cho siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình

$$[x]^T A[x] + 2[a]^T[x] + a_0 = 0,$$

thì điểm kì dị có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} [x]^T A[x] + 2[a]^T[x] + a_0 = 0 \\ A[x] + [a] = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left([x]^T A + [a]\right)[x] + [a]^T[x] + a_0 = 0 \\ A[x] + [a] = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} [a]^T[x] + a_0 = 0 \\ A[x] + [a] = 0 \end{cases}.$$

1.3.4 *Phương tiệm cận và đường tiệm cận của siêu mặt bậc hai*

Định nghĩa 1.3.4.1. Vectơ $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ được gọi là phương tiệm cận của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ với phương trình (1.5) nếu $\vec{c} \neq \vec{0}$

và

$$[c]^T A[c] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_i c_j = 0. \tag{1.19}$$

Đối với siêu mặt bậc hai có tâm duy nhất, một đường thẳng đi qua tâm được gọi là đường tiệm cận của siêu mặt bậc hai nếu phương của nó là phương tiệm cận và nó không cắt siêu mặt bậc hai.

Ví dụ 1.3.4.2. Trong không gian afin 2 chiều ta có:

+ Elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ không có phương tiệm cận.

+ Hypebol $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ có hai phương tiệm cận là $\vec{c}_1 = (a, b)$ và $\vec{c}_2 = (a, -b)$. Các đường tiệm cận tương ứng là

$$y = \frac{b}{a}x \text{ và } y = -\frac{b}{a}x.$$

+ Parabol $y^2 = 2px$ có một phương tiệm cận là $\vec{c} = (0, 1)$ nhưng không có đường tiệm cận vì không có tâm.

+ Đường bậc hai $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ có tâm là gốc tọa độ và các phương tiệm cận là $\vec{c}_1 = (a, b)$ và $\vec{c}_2 = (a, -b)$ nhưng không có đường tiệm cận.

+ Đường bậc hai $y^2 = 1$ trong hệ tọa độ (x, y) có vô số tâm (các điểm thuộc đường thẳng $y = 0$) nên không có đường tiệm cận.

1.3.5 *Siêu phẳng kính của siêu mặt bậc hai*

Định lý 1.3.5.1. *Cho hai điểm M_1, M_2 thay đổi của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ sao cho đường thẳng M_1M_2 có phương cố định $\vec{c} \neq \vec{0}$ (mà không phải là phương tiệm cận). Khi đó tập hợp các trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2 nằm trên một siêu phẳng và siêu phẳng đó đi qua tâm (nếu có) của $(\mathcal{S})$.*

Siêu phẳng đó được gọi là siêu phẳng kính của $(\mathcal{S})$ liên hợp với phương $\vec{c}$, hoặc $\vec{c}$ là phương liên hợp với siêu phẳng kính đó.

Chứng minh. Giả sử trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu đã chọn, siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình:

$$[x]^T A[x] + 2[a]^T[x] + a_0 = 0. \tag{1.20}$$

Giả sử $M_1, M_2 \in (\mathcal{S})$ và $I\,(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ là trung điểm đoạn thẳng M_1M_2. Phương trình đường thẳng qua M_1, M_2 có dạng:

$$[x] = [b] + [c]\lambda$$
$$(x_i = b_i + c_i\lambda, \quad i = 1, 2, \ldots, n)$$

trong đó $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ là tọa độ của vectơ $\vec{c}$. Để tìm tọa độ M_1, M_2 ta giải phương trình sau (trong đó P, Q được xác định bởi (1.17) và (1.18)):

$$\left([c]^T A[c]\right)\lambda^2 + 2P\lambda + Q = 0. \tag{1.21}$$

Giả sử λ_1, λ_2 là nghiệm của phương trình (1.21) ứng với các giao điểm M_1, M_2. Ta có

$$\overrightarrow{M_1I} = (x_I) - (x_{M_1}) = [b] - ([b] + [c]\lambda_1) = -[c]\lambda_1,$$
$$\overrightarrow{M_2I} = (x_I) - (x_{M_2}) = [b] - ([b] + [c]\lambda_2) = -[c]\lambda_2.$$

Mặt khác, $\overrightarrow{M_1I} + \overrightarrow{M_2I} = \vec{0}$ nên suy ra $[c]\lambda_1 + [c]\lambda_2 = 0$ hay

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \text{ (do } \vec{c} \neq \vec{0}).$$

Vậy $P = 0$ hay

$$P = [b]^T A[c] + [a]^T[c] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_i c_j + \sum_{i=1}^{n} a_i c_i = 0.$$

hay

$$[c]^T(A[b] + [a]) = 0.$$

Như vậy tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng M_1M_2 thỏa mãn phương trình

$$[c]^T(A[x] + [a]) = 0. \tag{1.22}$$

Trong phương trình (1.22) ta có $[c]^T A \neq 0$, vì nếu $[c]^T A = 0$ thì $[c]^T A[c] = 0$, tức $\vec{c}$ là phương tiệm cận. Vậy phương trình trên là phương trình của một siêu phẳng.

Vì tâm của $(\mathcal{S})$ có tọa độ thỏa mãn phương trình $Ax + a = 0$ nên cũng thỏa mãn phương trình (1.22). Vậy nếu siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có tâm thì siêu phẳng kính liên hợp với phương nào đó chứa mọi tâm của $(\mathcal{S})$. □

Ví dụ 1.3.5.2. Trong không gian afin 2 chiều ta có:

1) Đường kính liên hợp với phương $\vec{c} = (c_1, c_2)$ của elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ là đường thẳng có phương trình $\dfrac{c_1}{a^2}x + \dfrac{c_2}{b^2}y = 0$.

2) Đường kính liên hợp với phương $\vec{c} = (c_1, c_2)$ của hypebol $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ là đường thẳng có phương trình $\dfrac{c_1}{a^2}x - \dfrac{c_2}{b^2}y = 0$.

3) Đường kính liên hợp với phương $\vec{c} = (c_1, c_2), (c_2 \neq 0)$ của parabol $y^2 = 2px$ là đường thẳng có phương trình $y = p \cdot \dfrac{c_1}{c_2}$.

1.3.6 *Tiếp tuyến và siêu tiếp diện của siêu mặt bậc hai*

Định nghĩa 1.3.6.1. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$. Đường thẳng (d) được gọi là một tiếp tuyến của $(\mathcal{S})$ nếu:

+ Hoặc phương của (d) không phải là phương tiệm cận của $(\mathcal{S})$ và (d) cắt $(\mathcal{S})$ tại đúng một điểm (điểm này được gọi là tiếp điểm). Ta nói (d) tiếp xúc với $(\mathcal{S})$ tại điểm đó.

+ Hoặc phương của (d) là phương tiệm cận và (d) nằm trên $(\mathcal{S})$.

Định lý 1.3.6.2. *Nếu siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình*

$$[x]^T A[x] + 2[a]^T[x] + a_0 = 0$$

và điểm $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nằm trên $(\mathcal{S})$ thì đường thẳng (d) đi qua B có phương $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ là tiếp tuyến của $(\mathcal{S})$ khi và chỉ khi

$$[b]^T A[c] + [a]^T[c] = 0. \tag{1.23}$$

Chứng minh. Thật vậy, để tìm giao của (d) và $(\mathcal{S})$ ta đi đến giải phương trình

$$[c]^T A[c]\lambda^2 + 2P\lambda + Q = 0.$$

Trong trường hợp này $Q = [b]^T A[b] + 2[a]^T[b] + a_0 = 0$ vì $B \in (S)$. Vậy phương trình trên tương đương với phương trình

$$[c]^T A[c]\lambda^2 + 2P\lambda = 0, \tag{1.24}$$

hay

$$\lambda\left([c]^T A[c]\lambda + 2P\right) = 0.$$

+ Nếu $[c]^T A[c] \neq 0$, tức $\vec{c}$ không phải là phương tiệm cận, để đường thẳng (d) là tiếp tuyến của $(\mathcal{S})$ thì điều kiện cần và đủ là (d) cắt $(\mathcal{S})$ tại một điểm duy nhất. Điều này tương đương với $P = 0$ hay $[b]^T A[c] + [a]^T[c] = 0$.

+ Nếu $[c]^T A[c] = 0$, khi đó $\vec{c}$ là phương tiệm cận của $(\mathcal{S})$, để đường thẳng (d) là tiếp tuyến của $(\mathcal{S})$ thì điều kiện cần và đủ là (d) nằm trên $(\mathcal{S})$, tức là phương trình (1.24) nhận mọi giá trị của λ là nghiệm. Điều này cũng tương đương với $P = 0$ hay $[b]^T A[c] + [a]^T[c] = 0$. □

Hệ quả 1.3.6.3. *Nếu B là một điểm kì dị của $(\mathcal{S})$ thì mọi đường thẳng qua B đều là tiếp tuyến của $(\mathcal{S})$.*

Chứng minh. Thật vậy, nếu $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ là điểm kì dị của $(\mathcal{S})$ thì B là tâm của $(\mathcal{S})$ nên tọa độ của nó thỏa mãn phương trình $A[b] + [a] = 0$ hay $[b]^T A + [a]^T = 0$, suy ra $[b]^T A[c] + [a]^T[c] = 0$, ở đây $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ là phương của đường thẳng qua B. Theo Định lý 1.3.6.2 đường thẳng đi qua B là tiếp tuyến của $(\mathcal{S})$, Hệ quả được chứng minh. □

Định lý 1.3.6.4. *Nếu B thuộc $(\mathcal{S})$ và B là không là điểm kì dị thì các tiếp tuyến của $(\mathcal{S})$ tại B tạo thành một siêu phẳng. Siêu phẳng đó được gọi là siêu tiếp diện của $(\mathcal{S})$ tại B.*

Chứng minh. Giả sử $B(b_1, b_2, \dots, b_n) \in (\mathcal{S})$ và $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq B$ thì M nằm trên tiếp tuyến của $(\mathcal{S})$ có phương $\vec{c}$ tại tiếp điểm B

khi và chỉ khi $\overrightarrow{BM} = \lambda\vec{c}, \lambda \neq 0$. Điều này tương đương với tọa độ vectơ $\overrightarrow{BM}$ thỏa mãn phương trình (1.23), tức là:

$$[b]^T A([x] - [b]) + [a]^T([x] - [b]) = 0$$

hay

$$\left([b]^T A + [a]^T\right)([x] - [b]) = 0. \tag{1.25}$$

Do B không phải là điểm kì dị nên

$$[b]^T A + [a]^T = (A[b] + [a])^T \neq 0.$$

Do đó phương trình (1.25) là phương trình của một siêu phẳng. □

Trong không gian afin 2 chiều, siêu tiếp diện của một đường bậc hai chính là tiếp tuyến của nó.

Ví dụ 1.3.6.5. Trong không gian afin 2 chiều ta có:

1) Tiếp tuyến tại điểm $B\,(b_1, b_2)$ của elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ là đường thẳng có phương trình $\dfrac{b_1x}{a^2} + \dfrac{b_2y}{b^2} = 1$.

2) Tiếp tuyến tại điểm $B\,(b_1, b_2)$ của hypebol $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ là đường thẳng có phương trình $\dfrac{b_1x}{a^2} - \dfrac{b_2y}{b^2} = 1$.

3) Tiếp tuyến tại điểm $B\,(b_1, b_2)$ của parabol $y^2 = 2px$ là đường thẳng có phương trình $b_2y = p\,(x + b_1)$.

1.3.7 *Dạng chuẩn tắc của siêu mặt bậc hai*

Kết quả sau đây cho dạng đơn giản nhất phương trình của một siêu mặt bậc hai trong không gian afin đối với một mục tiêu thích hợp.

Định lý 1.3.7.1. *Cho $(\mathcal{S})$ là một siêu mặt bậc hai trong không gian afin $\mathbf{A}^n$. Khi đó tồn tại mục tiêu afin để phương trình của $(\mathcal{S})$ đối* *với mục tiêu có một trong các dạng sau:*

$$-x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_r^2 = 1, \qquad 0 \le k \le r, 1 \le r \le n, \tag{I}$$

$$-x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_r^2 = 0, \qquad 0 \le k \le \left[\frac{r}{2}\right], 1 \le r \le n, \tag{II}$$

$$-x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_r^2 = x_{r+1}, \quad 0 \le k \le \left[\frac{r}{2}\right], 1 \le r < n. \tag{III}$$

Ta gọi các phương trình trên là phương trình dạng chuẩn tắc của siêu mặt bậc hai.

Chứng minh. Xét dạng toàn phương $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i^2 x_j^2$. Ta biết rằng có thể tìm được một cơ sở $\epsilon' = \{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n\}$ sao cho dạng toàn phương đối với cơ sở đó trở thành chuẩn tắc, tức là có dạng

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i'^2 \text{ với } \epsilon_i = \pm 1 \text{ hoặc } \epsilon_i = 0. \tag{1.26}$$

Khi đó đối với mục tiêu afin $\{O; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n\}$ phương trình của $\mathcal{S}$ có dạng

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i'^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i' x_i' + a_0' = 0. \tag{1.27}$$

Vì a_{ij} không đồng thời bằng 0 nên phải có những $\epsilon_i \neq 0$. Ta có thể giả sử

$$\epsilon_i \neq 0 \text{ với } i = 1, 2, \ldots, r, 1 \le r \le n; \tag{1.28}$$

$$\epsilon_j = 0 \text{ với } i = r+1, 2, \ldots, n. \tag{1.29}$$

Dùng phép đổi mục tiêu

$$\begin{cases} X_i = x_i' + \epsilon_i a_i', i = 1, 2, \ldots, r; \\ X_i = x_i', i = r+1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{1.30}$$

ta đưa phương trình (1.27) trở nên:

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i X_i^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} a_i' X_i + a_0'' = 0. \tag{1.31}$$

- Nếu trong (1.31) có $a'_{r+1} = a'_{r+2} = \ldots = a'_n$ và $a''_0 = 0$ ta được phương trình của $\mathcal{S}$ là

$$\sum_{i=1}^{r} \epsilon_i X_i^2 = 0, \epsilon_i = \pm 1, 1 \leq r \leq n. \tag{1.32}$$

- Nếu trong (1.31) có $a'_{r+1} = a'_{r+2} = \ldots = a'_n$ và $a''_0 \neq 0$, thì bằng cách đặt $\lambda_i = -\dfrac{\epsilon_i}{a''_0}, i = 1, 2, \ldots, r$, ta được dạng (I)

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i^2 = 1.$$

Sau đó dùng phép đổi mục tiêu

$$\begin{cases} X'_i = \sqrt{\lambda_i} & \text{nếu} \quad \lambda_i > 0; \\ X'_i = \sqrt{-\lambda_i} & \text{nếu} \quad \lambda_i < 0; \\ X'_k = X_k & \text{nếu} \quad r < k < n. \end{cases} \tag{1.33}$$

Khi đó phương trình (1.33) sẽ được đưa về dạng (II)

$$\sum_{i=1}^{r} \epsilon_i X_i'^2 = 1, 1 \leq r \leq n.$$

- Nếu trong (1.31) có ít nhất một hệ số $a'_j \neq 0$ chẳng hạn $a'_{r+1} \neq 0$, ta dùng phép đổi mục tiêu

$$\begin{cases} X'_{r+1} = \sum_{j=r+1}^{n} a'_j X_j - \dfrac{b}{2}; \\ X'_i = X_i, i \neq r+1; \end{cases} \tag{1.34}$$

ta đưa phương trình (1.33) về dạng (III)

$$\sum_{i=1}^{r} \epsilon_i X_i^2 = 2X_{r+1}, \epsilon_i = \pm 1, 1 \leq r \leq n-1.$$

Vậy ta đã chứng minh được rằng bằng cách chọn mục tiêu thích hợp, mọi siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}$ trong $\mathbf{A}^n$ đều có phương trình thuộc một trong các dạng trên. $\square$

Nhận xét 1.3.7.2. i) Nếu phương trình của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có dạng (I) thì $(\mathcal{S})$ có tâm và tâm không thuộc $(\mathcal{S})$.

ii) Nếu phương trình của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có dạng (II) thì $(\mathcal{S})$ có tâm và tâm thuộc $(\mathcal{S})$.

iii) Nếu phương trình của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có dạng (III) thì $(\mathcal{S})$ không có tâm.

iv) Mỗi siêu mặt bậc hai, phương trình dạng chuẩn tắc của nó chỉ thuộc một trong 3 dạng trên và ứng với một cặp chỉ số (k, r) xác định. Điều này suy từ $1, 2, 3)$ ở trên và sự bất biến qua phép đổi tọa độ của chỉ số k và hạng r của ma trận các hệ số bậc hai trong phương trình của siêu mặt.

Từ nhận xét trên ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.3.7.3. Hai siêu mặt bậc hai trong không gian afin thực $\mathbf{A}^n$ được gọi là cùng loại nếu phương trình chuẩn tắc của chúng có cùng dạng (I) hoặc (II) hoặc (III) với giá trị của k và r giống nhau.

Định lý 1.3.7.4. *i) Phép afin biến một siêu mặt bậc hai thành siêu mặt bậc hai cùng loại.*

ii) Hai siêu mặt bậc hai cùng loại là tương đương afin.

Chứng minh. i) Ta nhận thấy rằng phép biến đổi afin biến mục tiêu thành mục tiêu và tọa độ của một điểm đối với một mục tiêu cũng chính là tọa độ của điểm ảnh đối với mục tiêu ảnh. Vì vậy phương trình của một siêu mặt bậc hai cũng chính là phương trình của siêu mặt bậc hai ảnh đối với mục tiêu ảnh. Do đó siêu mặc bậc hai và ảnh của nó có cùng loại.

ii) Giả sử hai siêu mặt bậc hai cùng loại $(\mathcal{S}_1), (\mathcal{S}_2)$ có dạng chuẩn tắc là như nhau đối với các mục tiêu $\{O; E_1, \ldots, E_n\}$ và $\{O'; E'_1, \ldots, E'_n\}$ tương ứng. Xét phép afin f biến các điểm O, E_1, $\ldots$, E_n tương ứng thành các điểm O', E'_1, $\ldots$, E'_n. Khi đó ảnh của $(\mathcal{S}_1)$ qua f là siêu mặt bậc hai có phương trình như $(\mathcal{S}_1)$ đối với mục tiêu $\{O'; E'_1, \ldots, E'_n\}$, do đó trùng với $(\mathcal{S}_2)$. Vậy $(\mathcal{S}_1), (\mathcal{S}_2)$ là tương đương afin. $\square$

1.3.8 *Phân loại các đường bậc hai trong mặt phẳng*

Dựa vào định lý về phương trình dạng chuẩn tắc của siêu mặt bậc hai ở trên (Định lý 1.3.7.1), trong không gian afin $\mathbf{A}^2$ có tất cả 9 loại đường bậc hai (siêu mặt bậc hai) sau:

1. $x_1^2 + x_2^2 = 1$	đường elip.
2. $-x_1^2 + x_2^2 = 1$	đường hypebol.
3. $-x_1^2 - x_2^2 = 1$	đường elip ảo.
4. $x_1^2 + x_2^2 = 0$	cặp đường thẳng ảo cắt nhau.
5. $-x_1^2 + x_2^2 = 0$	cặp đường thẳng cắt nhau.
6. $x_1^2 = x_2$	parabol.
7. $x_1^2 = 1$	cặp đường thẳng song song.
8. $-x_1^2 = 1$	cặp đường thẳng ảo song song.
9. $x_1^2 = 0$	cặp đường thẳng trùng nhau.

Ta nhận thấy các đường bậc hai không suy biến, khác rỗng chỉ thuộc 1 trong 3 loại: elip, hypebol, parabol, ta còn gọi chúng là các đường conic.

Ví dụ 1.3.8.1. Xác định loại của đường bậc hai sau trong mặt phẳng $\mathbf{A}^2$:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0.$$

Giải. Biến đổi vế trái phương trình, ta có

$$(x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0.$$

Đổi tọa độ theo công thức $\left\{\begin{array}{lcl} x'_1 & = & x_1 + x_2 \\ x'_2 & = & x_2 \end{array}\right.$, phương trình trên có dạng

$$x_1'^2 + 2x_2'^2 + 2x'_1 - 6x'_2 + 1 = 0.$$

Biến đổi vế trái, ta có

$$(x'_1 + 1)^2 + 2\left(x'_1 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} = 0.$$

Tiếp tục đổi tọa độ

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{\sqrt{2}}{3}x'_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ x''_2 = \dfrac{2}{3}x'_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Ta có phương trình của đường bậc hai trong hệ tọa độ mới là

$$x''^2_1 + x''^2_2 = 1.$$

Do đó đường bậc hai là một elip.

1.3.9 *Phân loại các mặt bậc hai trong không gian 3 chiều*

Cũng theo cách phân loại dựa trên phương trình chuẩn tắc của siêu mặt bậc hai, trong không gian afin 3 chiều ta có tất cả 17 loại mặt bậc hai, đó là các mặt cùng với tên gọi sau đây

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$	elipxoit.
2. $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$	hypeboloit một tầng.
3. $-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1$	hypeboloit hai tầng.
4. $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$	elipxoit ảo.
5. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	mặt nón ảo.
6. $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	mặt nón.
7. $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$	paraboloit eliptic.
8. $-x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$	paraboloit hypebolic (mặt yên ngựa).
9. $x_1^2 + x_2^2 = 1$	trụ eliptic.
10. $-x_1^2 + x_2^2 = 1$	trụ hypebolic.
11. $-x_1^2 - x_2^2 = 1$	trụ eliptic ảo.
12. $x_1^2 + x_2^2 = 0$	cặp mặt phẳng ảo cắt nhau.
13. $-x_1^2 + x_2^2 = 0$	cặp mặt phẳng cắt nhau.
14. $-x_1^2 = 2x_2$	trụ parabolic.
15. $x_1^2 = 1$	cặp mặt phẳng song song.
16. $-x_1^2 = 1$	cặp mặt phẳng ảo song song.
17. $x_1^2 = 0$	cặp mặt phẳng trùng nhau.

1.4 Một số kết quả về đa thức bậc hai trên không gian afin (bài đọc thêm)

Trong phần này chúng tôi giới thiệu một số kết quả gần đây, một số bài toán mở và một vài hướng nghiên cứu mới liên quan tới hình học tuyến tính, hy vọng rằng các kiến thức mới này sẽ là tiền đề cho các sinh viên yêu thích nghiên cứu khoa học khám phá ra được các tính chất mới, góp phần làm phong phú thêm kiến thức cho môn học này.

Như chúng ta đã học ở các phần trước, một siêu mặt bậc hai chính là tập nghiệm của một đa thức bậc hai, tức là tập nghiệm của phương trình có dạng sau:

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c_0 = 0. \tag{1.35}$$

Một câu hỏi đặt ra là điều kiện để phương trình trên có nghiệm. Dễ thấy, với $n = 1$ thì phương trình (1.35) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = b_1^2 - a_1 c_0 \geq 0$. Với $n > 1$ thì phương trình (1.35) có nghiệm khi và chỉ khi hoặc ma trận $\bar{A}$ có các giá trị riêng trái dấu hoặc ma trận $\bar{A}$ có các giá trị riêng cùng dấu và nếu $f(x^*) \neq 0$ thì $f(x^*)$ phải có dấu ngược với dấu của các giá trị riêng của $\bar{A}$, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \ \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \dots & b_n & c_0 \end{pmatrix}$$

và x^* là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $Ax + b = 0$.

Câu hỏi sẽ trở nên khó hơn nếu chúng ta xét sự có nghiệm của hệ hai hay nhiều phương trình, bất phương trình bậc hai nhiều biến. Sau đây chúng tôi giới thiệu một vài kết quả về câu hỏi này. Để thuận tiện cho việc trình bày, trong suốt mục này ta ký hiệu $\{f * \alpha\} = \{x \in \mathbf{A}^n : f(x) * \alpha\}$ trong đó $*$ thuộc tập các dấu $=, \leq, <, \geq, >$. Chúng ta dùng các ký hiệu $A \succeq 0, A \succ 0, A \preceq 0, A \prec 0$ để chỉ A là ma trận nửa xác định dương (tức là ma trận đối xứng có các giá trị riêng không âm), ma trận xác định dương (tức là ma trận đối xứng có các giá trị riêng dương), ma trận nửa xác định âm (tức $-A \succeq 0$), ma trận xác định âm tương ứng (tức $-A \succ 0$).

Định lý 1.4.0.1. [1] *Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu cho trước, cho các đa thức $f(x) = x^T Ax + 2a^T x + a_0, g(x) = x^T Bx + 2b^T a + b_0$ thỏa mãn điều kiện $\{x \in \mathbf{A}^n : g(x) < 0\} \neq \emptyset$. Khi đó hệ $\{f(x) < 0, g(x) \leq 0\}$ vô nghiệm khi và chỉ khi tồn tại số thực $\lambda \geq 0$ sao cho $f(x) + \lambda g(x) \geq 0$ mới mọi $x \in \mathbf{A}^n$.*

Định lý 1.4.0.2. [2] *Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu cho trước, cho các đa thức $f_i(x) = x^T Ax + 2b_i^T x + c_i, i = 0, \ldots, m$, trong đó $A \succ 0$, $m < n$ và các tập $\{x \in \mathbf{A}^n : f_1(x) < 0\}, \ldots, \{x \in \mathbf{A}^n : f_m(x) < 0\}$ đều khác rỗng. Khi đó hệ $\{f_0(x) < 0, f_1(x) \leq 0, f_m(x) \leq 0\}$ vô nghiệm khi và chỉ khi tồn tại các số thực $\lambda_i \geq 0$ sao cho $f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x) \geq 0$ mới mọi $x \in \mathbf{A}^n$.*

Định lý 1.4.0.3. [3] *Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu cho trước, xét các đa thức $f(x) = x^T Ax + 2a^T x + a_0, g(x) = x^T Bx + 2b^T x + b_0$ trong đó các tập $\{x \in \mathbf{A}^n : g(x) < 0\}, \{x \in \mathbf{A}^n : g(x) > 0\}$ đều khác rỗng. Khi đó hệ $\{f(x) < 0, g(x) = 0\}$ vô nghiệm khi và chỉ khi tồn tại số thực λ sao cho $f(x) + \lambda g(x) \geq 0$ mới mọi $x \in \mathbf{A}^n$ trừ trường hợp sau: A có duy nhất một giá trị riêng âm, $B = 0, b \neq 0$ và*

$$\begin{bmatrix} V^T AV & V^T (Ax_0 + a) \\ \left(x_0^T A + a^T\right) V & f(x_0) \end{bmatrix} \succeq 0,$$

trong đó $x_0 = -\frac{d}{2b^T b} b, V \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ là ma trận cơ sở của $\mathcal{N}(b)$, ở đây $\mathcal{N}(b) = \{x \in \mathbf{A}^n : b^T x = 0\}$.

---

[1] V. A. Yakubovich (1971), *S-procedure in nolinear control theory.* Vestnik Leninggradskogo Universiteta, Ser. Matematika, 62–77.

[2] A. Beck (2007), *On the convexity of a class of quadratic mappings and its application to the problem of finding the smallest ball enclosing a given intersection of balls.* Journal of Global Optimization, 39, 113–126.

[3] Y. Xia, S. Wang and R. L. Sheu (2016), *S-lemma with equality and its applications.* Mathematical Programming, 156, 513–547.

Để đạt được các kết quả nêu trên, các tác giả dùng khá nhiều kiến thức hiện đại thuộc nhiều chuyên ngành khác nhau của Toán học. Gần đây có phương pháp tiếp cận khác, phát triển các kiến thức mới thuộc Hình học tuyến tính, theo đó các kết quả nổi bật ở trên và rất nhiều kết quả khác được chứng minh một cách ngắn ngọn, dễ hiểu và dễ tiếp cận hơn. Ở phần tiếp theo chúng tôi sẽ giới thiệu phương pháp tiếp cận mới này và đồng thời giới thiệu một số kết quả nổi bật gần đây.

1.4.1 *Sắp xếp các tập mức của đa thức bậc hai*

Trong mục này chúng ta luôn giả thiết $f(x), g(x)$ là các đa thức lần lượt có dạng $f(x) = x^T Ax + 2a^T x + a_0, g(x) = x^T Bx + 2b^T x + b_0$.

Định nghĩa 1.4.1.1. [1] Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu cho trước, cho các đa thức $f(x), g(x)$, tập $\{f * 0\}$ được gọi là tách được bởi g tại 0 nếu tồn tại 2 tập khác rỗng L^+ và L^- sao cho $\{f * 0\} = L^+ \cup L^-$ và $g(x)g(y) < 0$ với mọi $x \in L^+, y \in L^-$.

Nhận xét 1.4.1.2. Từ định nghĩa trên ta suy ra rằng nếu tập $\{f*0\}$ tách được bởi g tại 0 thì:

i) Tập $\{f * 0\}$ được chia thành 2 phần, một phần nằm trong $\{g < 0\}$ phần còn lại nằm trong $\{g > 0\}$.

ii) $\{f * 0\} \cap \{g = 0\} = \emptyset$, tức $g(x) = 0$ không có nghiệm trong tập $\{f * 0\}$.

Định lý 1.4.1.3. [1] *Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu cho trước, cho đa thức $f(x) = x^T Aa + 2a^T x + a_0$, khi đó tập $\{f < 0\}$ không liên thông khi và chỉ khi tồn tại một mục tiêu để đối với mục tiêu mới $f(x)$ có dạng sau*

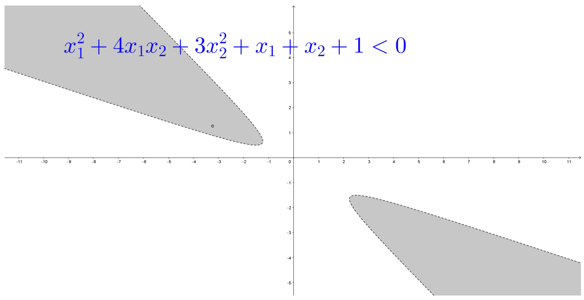
$$-x_1^2 + \delta(x_2^2 + \ldots + x_m^2) + \gamma, \tag{1.36}$$

trong đó $\delta, \gamma \in \{0, 1\}$.

[1] H. Q. Nguyen and R. L. Sheu (2019), *Geometric properties for level sets of quadratic functions.* Journal of Global Optimization, 73, 349–369.

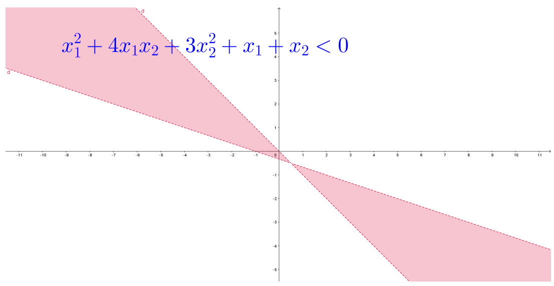
Ví dụ 1.4.1.4. Trong $\mathbf{A}^2$ cho đa thức bậc hai $f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 + x_2 + \alpha$.

- Với $\alpha = 1$ thì tập $\{f < 0\}$ là không liên thông (Hình 1.6).



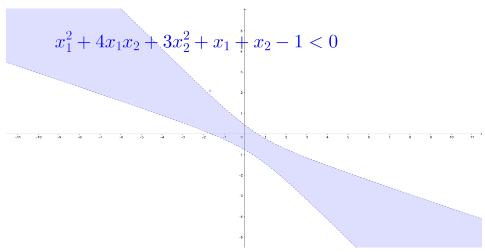
Hình 1.6: $\{f < 0\}$ không liên thông.

- Với $\alpha = 0$ thì tập $\{f < 0\}$ là không liên thông (Hình 1.7).



Hình 1.7: $\{f < 0\}$ không liên thông.

- Với $\alpha = -1$ thì tập $\{f < 0\}$ là liên thông (Hình 1.8).



Hình 1.8: $\{f < 0\}$ liên thông.

Hệ quả 1.4.1.5. [1] *Trong không gian afin* $\mathbf{A}^n$ *với mục tiêu cho trước, cho đa thức* $f(x) = x^T Ax + 2a^T x + a_0$, *khi đó tập* $\{f \leq 0\}$ *không liên thông khi và chỉ khi tồn tại một mục tiêu để đối với mục tiêu mới* $f(x)$ *có dạng sau*

$$-x_1^2 + \delta(x_2^2 + \ldots + x_m^2) + \gamma, \tag{1.37}$$

trong đó $\delta \in \{0, 1\}, \gamma = 1$.

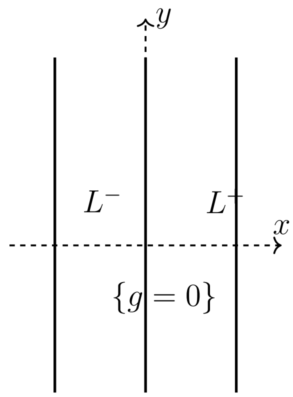
Định lý 1.4.1.6. [1]*H. Q. Nguyen and R. L. Sheu (2019),* Geometric properties for level sets of quadratic functions. *Journal of Global Optimization, 73, 349–369. Trong không gian afin* $\mathbf{A}^n$ *với mục tiêu cho trước, cho các đa thức* $f(x) = x^T Ax + a^T a + a_0, g(x) = x^T Bx + b^T x + b_0$. *Khi đó tập* $\{f < 0\}$ *được tách bởi g tại 0 nếu và chỉ nếu tồn tại một mục tiêu sao cho đối với mục tiêu này*

(*i*) $f(x)$ *có dạng* $-x_1^2 + \delta(x_2^2 + \ldots + x_m^2) + \theta$,

(*ii*) $g(x)$ *có dạng* $b_1x_1 + \delta(b_2x_2 + \ldots + b_mx_m) + b_0, b_1 \neq 0$,

(*iii*) $f|_{\{g=0\}}(x) = -(\delta\frac{b_2}{b_1}x_2 + \ldots + \delta\frac{b_m}{b_1}x_m + \frac{b_0}{b_1})^2 + \delta(x_2^2 + \ldots + x_m^2) + \theta \geq 0,\ \forall(x_2, \ldots, x_n)$,
trong đó $\delta, \theta \in \{0, 1\}$.

Đặc biệt, nếu $B \neq 0$ *thì* $\{f < 0\}$ *không thể tách được bởi g tại 0.*



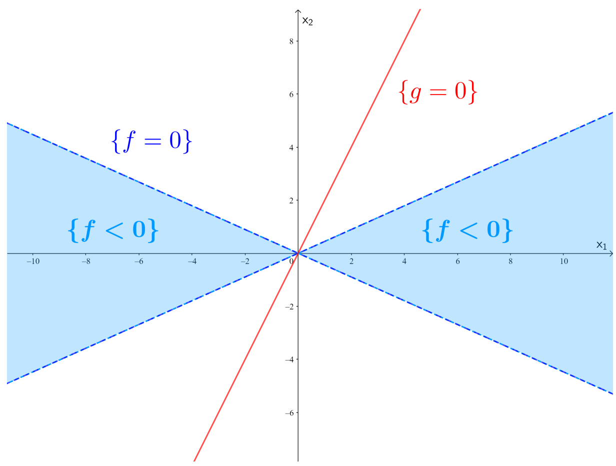
Hình 1.9

[1]H. Q. Nguyen and R. L. Sheu (2019), *Geometric properties for level sets of quadratic functions.* Journal of Global Optimization, 73, 349–369.

Ví dụ 1.4.1.7. Trong không gian afin $\mathbf{A}^2$ cho $f(x) = x_1^2 - 1, g(x) = x_1$ khi đó tập mức $\{f = 0\}$ gồm 2 đường thẳng lần lượt có phương trình $x_1 = -1$ và $x_1 = 1$. Đặt $L^- = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{A}^2 : x_1 = -1\}$, $L^+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{A}^2 : x_1 = 1\}$, dễ thấy rằng $L^- \cup L^+ = \{f = 0\}$ và $g(x)g(y) < 0$ với mọi $x \in L^-, y \in L^+$ (Hình 1.9).

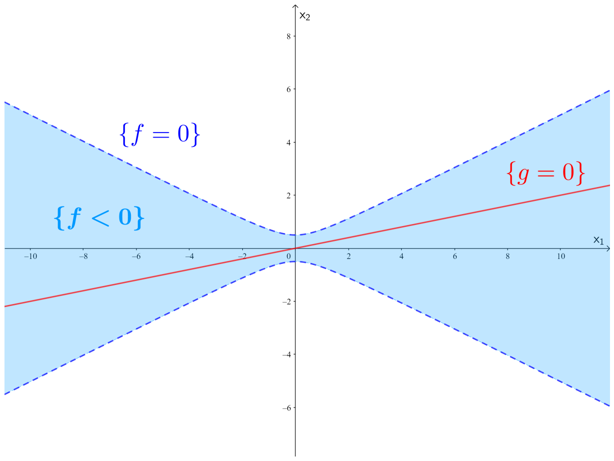
Định lý 1.4.1.8. [1] *Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu cho trước, cho các đa thức $f(x) = x^TAx + a^Ta + a_0, g(x) = x^TBx + b^Tx + b_0$, khi đó tập mức $\{f = 0\}$ được tách bởi g tại 0 khi và chỉ khi tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $B = \lambda A$ và tập mức $\{f = 0\}$ được tách bởi $-\lambda f + g$ tại 0.*

Sau đây là các ví dụ minh họa cho tính tách được của các tập mức:

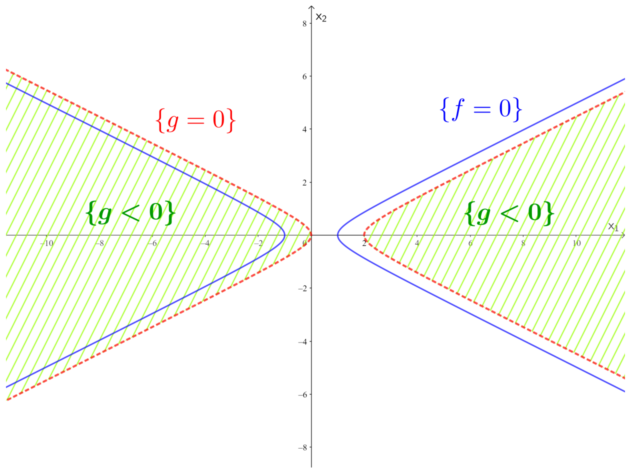


Hình 1.10: Với $f(x, y) = -x^2 + 4y^2$ và $g(x, y) = 2x - y$ thì tập $\{f < 0\}$ được tách bởi g tại 0, trong khi đó $\{f = 0\}$ không thể được tách bởi g tại 0.

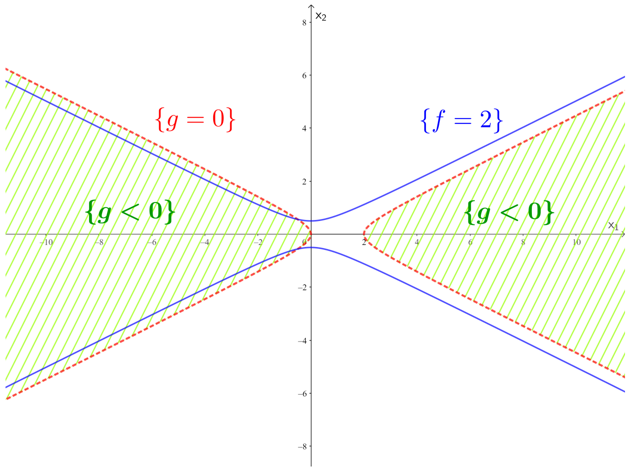
[1] H. Q. Nguyen and R. L. Sheu (2020), *Separation properties of quadratic functions*. Available from: `https://doi.org/10.13140/RG.2.2.18518.88647`.



Hình 1.11: Với $f(x, y) = -x^2 + 4y^2 - 1$ và $g(x, y) = x - 5y$ thì tập $\{f = 0\}$ được tách bởi g tại 0 trong khi đó $\{f < 0\}$ không thể được tách bởi g tại 0.



Hình 1.12: Tập $\{f = 0\}$ được tách bởi g tại 0 vì một nhánh của $\{f = 0\}$ nằm trong $\{g < 0\}$ và một nhánh khác nằm trong $\{g > 0\}$.



Hình 1.13: Vì $\{g = 0\} \cap \{f = 2\} \neq \emptyset$, $\{g = 0\}$ không thể được tách bởi $f - 2$ tại 0 và $\{f = 2\}$ không thể được tách bởi g tại 0.

Bổ đề 1.4.1.9. [1] *Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu cho trước, cho các đa thức $f(x) = x^T Ax + 2a^T a + a_0$, $h(x) = c^T x + c_0$, khi đó $\{f = 0\}$ được tách bởi h tại 0 nếu và chỉ nếu hoặc $\left(\bar{f}, \bar{A}, \bar{a}\right) = (f, A, a)$ hoặc $\left(\bar{f}, \bar{A}, \bar{a}\right) = (-f, -A, -a)$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) $\bar{A}$ *có duy nhất một giá trị riêng âm,* $\bar{a} \in \mathcal{R}(\bar{A}) = \{\bar{A}x : x \in \mathbb{R}^n\}$,

ii) $c \in \mathcal{R}(\bar{A})$, $c \neq 0$,

iii) $V^T \bar{A} V \succeq 0$, $\bar{w} \in \mathcal{R}(V^T \bar{A} V)$, *và* $\bar{f}(x_0) - \bar{w}^T (V^T \bar{A} V^T)^\dagger \bar{w} > 0$,

trong đó $\bar{w} = V^T(\bar{A}x_0 + \bar{a})$, $x_0 = \dfrac{-c_0}{c^T c} c$, *và* $V \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ *là ma trận cơ sở của* $\mathcal{N}(c^T)$.

Chúng ta có thể quan sát rằng, sự tách xảy ra với các tập $\{g = 0\}$ và $\{f = 0\}$, như hình 1.12, thì các thành phần liên thông của các tập này này được sắp xếp xen kẽ. Bổ đề sau đây khẳng định quan sát này là đúng.

[1] H. Q. Nguyen, Ya Chi and R. L. Sheu (2022), *Two quadratic mappings have a convex joint range when their level sets do not mutually separate.* Journal of Industrial and Management Optimization, 18, 575–592.

Bổ đề 1.4.1.10. [1] *Giả sử rằng f và g là các đa thức bậc hai, khi đó nếu $\{g = 0\}$ được tách bởi f tại 0, thì $\{f = 0\}$ cũng được tách bởi g tại 0.*

Mệnh đề sau đây chỉ ra rằng tính chất tách có thể được giữ nguyên bởi một tổ hợp tuyến tính thích hợp của f và g.

Mệnh đề 1.4.1.11. [1] *Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu cho trước, xét các đa thức $f(x) = x^T Ax + 2a^T x + a_0$, $g(x) = x^T Bx + 2b^T x + b_0$. Khi đó nếu $\{f = 0\}$ được tách bởi g tại 0, thì $\{\sigma f = 0\}$ được tách bởi $\eta f + \theta g$ tại 0 đối với $\forall \eta \in \mathbb{R}, \forall \theta, \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Mệnh đề sau được xem như mệnh đề đảo của Mệnh đề 1.4.1.11.

Mệnh đề 1.4.1.12. [1] *Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu cho trước, xét các đa thức $f(x) = x^T Ax + 2a^T x + a_0$, $g(x) = x^T Bx + 2b^T x + b_0$. Giả sử $\{\eta f + \theta g = 0\}$ được tách bởi $\sigma f + \tau g$ tại 0 với $\eta, \theta, \sigma, \tau$ nào đó thỏa mãn $\sigma\theta - \tau\eta \neq 0$. Khi đó:*

i) Nếu $A \neq 0, B \neq 0$ thì tập $\{f = 0\}$ được tách bởi g tại 0 và tập $\{g = 0\}$ được tách bởi f tại 0;

ii) Nếu $A \neq 0, B = 0$ thì tập $\{f * 0\}$ được tách bởi g tại 0.

1.4.2 *Ứng dụng*

Trong mục này chúng ta luôn giả thiết $f(x), g(x)$ là các đa thức lần lượt có dạng $f(x) = x^T Ax + 2a^T x + a_0, g(x) = x^T Bx + 2b^T x + b_0$.

a) Bài toán về sự có nghiệm của hệ phương trình bậc hai

Sau đây chúng tôi dùng các kết quả trên để đưa ra một điều kiện cần và đủ để hệ $\{f(x) < 0, g(x) \leq 0\}$ vô nghiệm. Chú ý rằng nếu $g(x)$ luôn không âm thì tập $\{g \leq 0\}$ là một cái phẳng hoặc là tập rỗng, nếu $g(x)$ luôn không dương thì tập $\{g \geq 0\}$ là một cái phẳng hoặc là tập rỗng, khi đó hệ $\{f(x) < 0, g(x) \leq 0\}$ trở nên tầm thường. Do

[1] H. Q. Nguyen and R. L. Sheu (2020), *Separation properties of quadratic functions.* Available from: `https://doi.org/10.13140/RG.2.2.18518.88647`.

đó đối với bài toán xét tính có nghiệm của hệ $\{f(x) < 0, g(x) = 0\}$, chúng ta luôn giả thiết rằng $g(x)$ nhận đồng thời giá trị âm và giá trị dương trên $\mathbf{A}^n$. Tương tự đối với bài toán xét tính có nghiệm của hệ $\{f(x) < 0, g(x) \leq 0\}$ ta luôn giả thiết rằng tồn tại $x^* \in \mathbf{A}^n$ để $g(x^*) < 0$, tức tập $\{g < 0\} \neq \emptyset$.

Định lý 1.4.2.1. [1] *Giả sử $\{g < 0\} \neq \emptyset$ thì hệ $\{f(x) < 0, g(x) \leq 0\}$ vô nghiệm khi và chỉ khi tồn tại $\lambda \geq 0$ để $f(x) + \lambda g(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbf{A}^n$.*

Định lý 1.4.2.2. [2] *Giả sử $g(x)$ nhận giá trị âm và dương trong $\mathbf{A}^n$ thì hệ $\{f(x) < 0, g(x) = 0\}$ vô nghiệm nhưng không tồn tại λ để $f(x) + \lambda g(x) \geq 0$ với mọi x nếu và chỉ nếu $\{f < 0\}$ được tách bởi g tại 0.*

Hệ quả 1.4.2.3. [2] *Giả sử $g(x)$ nhận giá trị âm và dương trên $\mathbf{A}^n$ thì hệ $\{f(x) < 0, g(x) = 0\}$ vô nghiệm nhưng không tồn tại λ để $f(x) + \lambda g(x) \geq 0$ với mọi x khi và chỉ khi tồn tại một mục tiêu để đối với mục tiêu này*

$$\begin{cases} f(x) \text{ có dạng } -x_1^2 + \delta(x_2^2 + \ldots + x_m^2) + \theta, \\ g(x) \text{ có dạng bậc nhất } b_1x_1 + \delta(b_2x_2 + \ldots + b_mx_m) + b_0, b_1 \neq 0, \\ f|_{\{g=0\}}(x) = -(\delta\dfrac{b_2}{b_1}x_2 + \ldots + \delta\dfrac{b_m}{b_1}x_m + \dfrac{b_0}{b_1})^2 + \delta(x_2^2 + \ldots + x_m^2) + \\ +\theta \geq 0, \forall(x_2, \ldots, x_n), \text{trong đó } \delta, \theta \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Định lý 1.4.2.4. [2] *Giả sử $g(x)$ nhận đồng thời giá trị âm và dương trên $\mathbf{A}^n$ và hệ $f(x) < 0, g(x) = 0$ vô nghiệm. Khi đó*

i) nếu $B \neq 0$ thì tồn tại λ để $f(x) + \lambda g(x) \geq 0$ với mọi x,

ii) nếu $B = 0$ thì tồn tại λ để $f(x) + \lambda g(x) \geq 0$ với mọi x khi và chỉ khi $\{f < 0\}$ là liên thông,

[1] V. A. Yakubovich (1971), *S-procedure in nolinear control theory.* Vestnik Leninggradskogo Universiteta, Ser. Matematika, 62–77.

[2] H. Q. Nguyen and R. L. Sheu (2019), *Geometric properties for level sets of quadratic functions.* Journal of Global Optimization, 73, 349–369.

iii) nếu $\{f < 0\}$ là liên thông thì tồn tại λ để $f(x) + \lambda g(x) \geq 0$ với mọi x,

iv) nếu $\{f < 0\}$ là không liên thông thì tồn tại λ để $f(x)+\lambda g(x) \geq 0$ với mọi x khi và chỉ khi $B \neq 0$.

b) Bài toán về tính chất của tập ảnh của các ánh xạ đa thức bậc hai

Ở phần đầu của mục này chúng tôi giới thiệu tính chất ảnh của tập $\{f < 0\}$ qua ánh xạ g:

$$g(\{f < 0\}) = \{s \in \mathbb{R} |\ \exists\ x \in \{f < 0\} \text{ sao cho } g(x) = s\}. \quad (1.38)$$

Nhận xét 1.4.2.5. Nếu $\{f < 0\}$ là liên thông thì $g(\{f < 0\})$ cũng là liên thông do đó $g(\{f < 0\})$ là một khoảng trong $\mathbb{R}$, biên của nó là inf và sup của g trên tập $\{f < 0\}$, do đó tính chất của tập $g(\{f < 0\})$ là khá đơn giản. Trường hợp còn lại nếu $\{f < 0\}$ không liên thông thì tính chất của $g(\{f < 0\})$ phức tạp hơn, tuy nhiên hiện nay chúng có thể được nghiên cứu bằng các sử dụng các tính chất của sự sắp xếp các tập mức của các đa thức bậc hai.

Bổ đề 1.4.2.6. [1] *Nếu tồn tại $\eta < \gamma < \beta$ trong $g(\mathbf{A}^n)$ sao cho $\{g = \eta\} \cap \{f < 0\} \neq \emptyset$, $\{g = \beta\} \cap \{f < 0\} \neq \emptyset$ nhưng $\{g = \gamma\} \cap \{f < 0\} = \emptyset$ (suy ra $g(\{f < 0\})$ không liên thông) thì $\{f < 0\}$ được tách bởi $g - \gamma$ tại 0.*

Định lý 1.4.2.7. [1] *Tập $g(\{f < 0\})$ là không liên thông nếu và chỉ nếu tồn tại $\gamma \in g(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\{f < 0\}$ được tách bởi $g - \gamma$ tại 0. Đặc biệt nếu $B \neq 0$ thì $g(\{f < 0\})$ là liên thông (nó là một khoảng trong $\mathbb{R}$).*

Định lý 1.4.2.8. [1] *Tập $g(\{f < 0\})$ là không liên thông nếu và chỉ nếu nó có dạng $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$ trong đó $[\alpha, \beta]$ có thể tính toán được bằng một công thức tường minh.*

[1] H. Q. Nguyen and R. L. Sheu (2019), *Geometric properties for level sets of quadratic functions.* Journal of Global Optimization, 73, 349–369.

Sau đây là ví dụ về xác định tập $g(\{f < 0\})$ khi nó là tập không liên thông.

Ví dụ 1.4.2.9. Giả sử $g(x,y) = x-y,\ f(x,y) = -x^2+3y^2+2z^2+4$.

Ta có $\{g = 0\} \cap \{f < 0\} = \emptyset$ và

$$\begin{aligned}
(g(\{f < 0\}))^C &= \{t \in \mathbb{R} |\ \{g = t\} \cap \{f < 0\} = \emptyset\} \\
&= \{t \in \mathbb{R} | -(t+y)^2 + (3y^2 + 2z^2) + 4 \geq 0,\ \forall y, z\} \\
&= \left\{ t \in \mathbb{R} | \begin{pmatrix} 2 & 0 & -t \\ 0 & 2 & 0 \\ -t & 0 & 4-t^2 \end{pmatrix} \succeq 0 \right\} \\
&= \left\{ t \in \mathbb{R} |\ 4 - \frac{3t^2}{2} \geq 0 \right\} = \Big[-\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}} \Big].
\end{aligned}$$

Do đó $g(\{f < 0\}) = (-\infty, -\sqrt{\frac{8}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{8}{3}}, +\infty)$, và $g(\{f \leq 0\}) = (-\infty, -\sqrt{\frac{8}{3}}] \cup [\sqrt{\frac{8}{3}}, +\infty)$.

Phần tiếp theo chúng ta dành cho việc giới thiệu các kết quả gần đây về tập ảnh $F(\mathbf{A}^n)$ qua ánh xạ bậc hai $F(x) = (f(x), g(x))$.

Mặc dù vấn đề về tính chất của tập ảnh của các ánh xạ bậc 2 là một hướng nghiên cứu cổ điển nhưng vì tầm quan trọng của nó trong cả lý thuyết và ứng dụng nên chúng vẫn được quan tâm bởi rất nhiều nhà toán học. Dines [1] là tác giả đầu tiên đã chứng minh được rằng ảnh của ánh xạ thuần nhất bậc hai từ $\mathbf{A}^n$ vào $\mathbb{R}^2$ là một tập lồi. Năm 1961, Brickman [2] đã chứng minh rằng ảnh của hình cầu đơn vị qua ánh xạ thuần nhất bậc hai từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^2$, tức là tập $\{(x^TAx, x^TBx) : x \in \mathbf{A}^n, ||x|| = 1\}$, là một tập lồi nếu $n \geq 3$. Năm 1998, bằng việc áp dụng khéo léo kết quả của Brickman, Polyak [3] chứng minh được rằng nếu $n \geq 2$, $f_1(x) = x^TAx + 2a^Tx + a_0$ và $f_2(x) = x^TBx + 2b^Tx + b_0$ là

[1] L. L. Dines (1941), *On the mapping of quadratic forms.* Bulletin of the American Mathematical Society, 47, 494–498.

[2] L. Brickmen (1941), *On the Field of Values of a Matrix.* Proceedings of the American Mathematical Society, 12, 61–66.

[3] B. T. Polyak (1998), *Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization,* Journal of Optimization Theory and Applications. 99, 553–583.

các đa thức trên $\mathbf{A}^n$, hơn nữa nếu tồn tại cặp s, t sao cho $sA+tB \succ 0$ thì $(f_1, f_2)(\mathbf{A}^n)$ là một tập lồi. Đồng thời Polyak cũng chứng minh được rằng nếu $n \geq 3$, $f_1(x) = x^T Ax, f_2(x) = x^T Bx$ và $f_3(x) = x^T Cx$ là các đa thức bậc hai thuần nhất, hơn nữa nếu tồn tại s, t, w sao cho $sA + tB + wC \succ 0$ thì $(f_1, f_2, f_3)(\mathbf{A}^n)$ là một tập lồi. Năm 2007, Beck [1] chứng minh được rằng nếu $m \leq n-1$, $f_1(x)$ là đa thức bậc hai với ma trận liên kết xác định dương (tức là các giá trị riêng của A đều dương), $f_i(x)$ là các đa thức bậc nhất với mọi $m \geq i \geq$ thì $(f_1, f_2, \ldots, f_m)(\mathbf{A}^n)$ là một tập lồi. Năm 2016, Fabianet và cộng sự [2], năm 2022, Nguyễn Hữu Quang và cộng sự [3] đưa ra và chứng minh được các điều kiện cần và đủ để $(f_1, f_2)(\mathbf{A}^n)$ là một tập lồi, trong đó $f_1(x) = x^T Ax + 2a^T x + a_0$ và $f_2(x) = x^T Bx + 2b^T x + b_0$.

Theo hướng nghiên cứu này, các bài toán về tính lồi của tập ảnh của ánh xạ bậc 2 nói chung vẫn còn là các bài toán mở, nó cũng đặt ra nhiều hướng nghiên cứu tiếp theo.

Sau đây chúng tôi giới thiệu một kết quả mới, việc chứng minh khá ngắn gọn bằng các sử dụng các tính chất mới về sự sắp xếp các tập mức.

Định lý 1.4.2.10. [4] *Tập $F(\mathbf{A}^n)$ là không lồi nếu và chỉ nếu tồn tại $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho $\{f = \alpha\}$ được tách bởi $g - \beta$ tại 0 hoặc $\{g = \beta\}$ được tách bởi $f - \alpha$ tại 0.*

---

[1] A. Beck (2007), *On the convexity of a class of quadratic mappings and its application to the problem of finding the smallest ball enclosing a given intersection of balls.* Journal of Global Optimization, 39, 113–126.

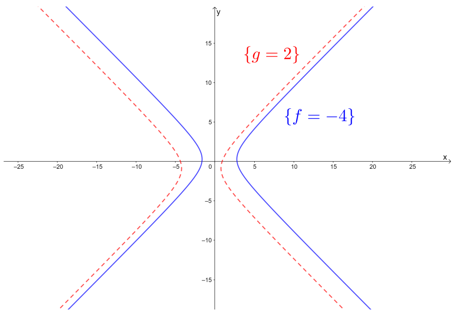
[2] F.B. Fabián and F. Opazo (2016), *Characterizing the convexity of joint-range for a pair of inhomogeneous quadratic functions and strong duality.* Minimax Theory Appl, 1, 257–290.

[3] H. Q. Nguyen and R. L. Sheu (2019), *Geometric properties for level sets of quadratic functions.* Journal of Global Optimization, 73, 349–369.

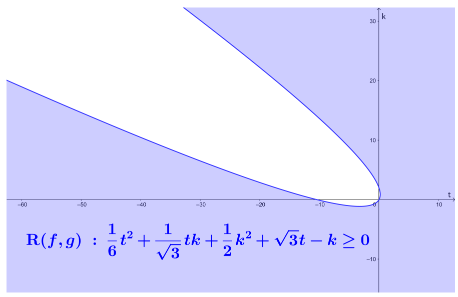
[4] H. Q. Nguyen, Ya Chi and R. L. Sheu (2022), *Two quadratic mappings have a convex joint range when their level sets do not mutually separate.* Journal of Industrial and Management Optimization, 18, 575–592.

Ví dụ 1.4.2.11. Cho 2 đa thức bậc hai $f,\ g$ như sau

$$f(x,y) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y^2 + x - \frac{1}{2}y$$
$$g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y.$$



(a) Tập mức $\{f = -4\}$ được tách bởi $g - 2$ tại 0 và như hình vẽ, dễ thấy tập mức $\{g-2 = 0\}$ được tách bởi $f + 4$ tại 0.



(b) Tập $F(\mathbf{A}^n) = (f,g)(\mathbf{A}^n)$ là không lồi.

Hình 1.14: Hình vẽ này minh họa cho Định lý 1.4.2.10, trong đó $f(x,y) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y^2 + x - \frac{1}{2}y$ và $g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$.

Phần tiếp theo chúng tôi giới thiệu một thuật toán để kiểm tra tính lồi của tập $F(\mathbf{A}^n) = (f,g)(\mathbf{A}^n)$. Dễ thấy rằng nếu cả hai ma trận A và B đều bằng 0 thì F là một ánh xạ afin và hiển nhiên $F(\mathbf{A}^n)$ luôn lồi. Do đó trong phần này ta luôn giả thiết có ít nhất một trong hai ma trận A và B là khác 0, ta giả sử rằng $A \neq 0$. Khi đó, Định lý 1.4.2.10 nói rằng $F(\mathbf{A}^n)$ là không liên thông khi và chỉ khi tồn tại $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\{f - \alpha = 0\} \text{ được tách bởi } g - \beta \text{ tại } 0. \tag{1.39}$$

Hơn nữa Định lý 1.4.1.8 khẳng định rằng (1.39) luôn có thể đơn giản hóa, với một tổ hợp tuyến tính thích hợp của f và g, thành trường hợp một tập mức được tách bởi một đa thức bậc nhất tại 0. Cụ thể hơn, (1.39) đạt được khi và chỉ khi các ma trận liên kết của $g - \beta$

và $f-\alpha$ là phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là $B=\lambda A$, và tập mức $\{f-\alpha=0\}$ được tách bởi $-\lambda(f-\alpha)+(g-\beta)$ tại 0. Do đó, chúng ta có hệ quả của Định lý 1.4.2.10 như sau.

Hệ quả 1.4.2.12. [1] *Giả sử rằng $A\neq 0$. Tập $F(\mathbf{A}^n)$ là không lồi khi và chỉ khi $B=\lambda A$ với $\lambda\in\mathbb{R}$ nào đó và tập mức $\{f=\alpha\}$ được tách bởi $-\lambda f+g-\gamma$ tại 0 với $\alpha,\gamma\in\mathbb{R}$ nào đó.*

Chúng ta nhận thấy rằng 3 hằng số trong Hệ quả 1.4.2.12, λ, γ, α, có thể xác định được một cách khá đơn giản. Thật vậy, điều kiện "$B=\lambda A$ với $\lambda\in\mathbb{R}$ nào đó" là rất dễ kiểm tra. Nếu $B\neq\lambda A$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $(f,g)(\mathbf{A}^n)$ là lồi. Ngược lại, $(f,g)(\mathbf{A}^n)$ là không lồi khi và chỉ khi tồn tại γ, α sao cho tập $\{f=\alpha\}$ được tách bởi siêu phẳng $\{-\lambda f+g=\gamma\}$. Bởi Bổ đề 1.4.1.9, một cặp như thế γ,α, nếu tồn tại, phải thỏa mãn điều kiện sau: hoặc $\left(\bar{f}_\alpha,\bar{A},\bar{a}\right)=(f-\alpha,A,a)$ hoặc $\left(\bar{f}_\alpha,\bar{A},\bar{a}\right)=(-\left(f-\alpha\right),-A,-a)$ thỏa mãn

i) $\bar{A}$ có duy nhất một giá trị riêng âm, $\bar{a}\in\mathcal{R}(\bar{A})$

ii) $c=-\lambda a+b\in\mathcal{R}(\bar{A})$, $c\neq 0$

iii) $V^T\bar{A}V\succeq 0$, $\bar{w}_\gamma\in\mathcal{R}(V^T\bar{A}V)$, và $\bar{f}_\alpha(x_\gamma)-\bar{w}_\gamma^T(V^T\bar{A}V^T)^\dagger\bar{w}_\gamma>0$,

trong đó $\bar{w}_\gamma=V^T(\bar{A}x_\gamma+\bar{a})$, $x_\gamma=\frac{-(-\lambda a_0+b_0-\gamma)}{c^Tc}c$, và $V\in\mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ là ma trận cơ sở của $\mathcal{N}(c^T)$.

Tuy nhiên, với các điều kiện i)-iii), chúng ta thấy rằng α, γ chỉ xuất hiện trong

$$\bar{w}_\gamma\in\mathcal{R}(V^T\bar{A}V),\ \bar{w}_\gamma=V^T(\bar{A}x_\gamma+\bar{a}),\ x_\gamma=\frac{-(-\lambda a_0+b_0-\gamma)}{c^Tc}c \tag{1.40}$$

$$\bar{f}_\alpha(x_\gamma)-\bar{w}_\gamma^T(V^TAV^T)^\dagger\bar{w}_\gamma>0. \tag{1.41}$$

trong đó $\left(\bar{f}_\alpha,\bar{A},\bar{a}\right)=(f-\alpha,A,a)$ hoặc $\left(\bar{f}_\alpha,\bar{A},\bar{a}\right)=(-(f-\alpha),-A,-a)$. Hơn nữa, chúng ta nhận thấy rằng (1.41) phụ thuộc vào (1.40).

[1] H. Q. Nguyen, Ya Chi and R. L. Sheu (2022), *Two quadratic mappings have a convex joint range when their level sets do not mutually separate.* Journal of Industrial and Management Optimization, 18, 575–592.

Do đó sự tồn tại γ sao cho (1.40) đạt được, chúng ta có thể chọn α đủ nhỏ (khi $\bar{f}_\alpha = f - \alpha$) hoặc đủ lớp (khi $\bar{f}_\alpha = -(f - \alpha)$) sao cho (1.41) được thỏa mãn. Trong bổ đề sau, chúng tôi cho thấy rằng sự tồn tại của γ để thỏa mãn (1.40) có thể được đảm bảo bởi "$\bar{a} \in \mathcal{R}(\bar{A})$" trong i), và do đó vấn đề sự tồn tại của α, γ có thể được rút gọn thành việc kiểm tra các điều kiện (B1)-(B3) dưới đây.

Bổ đề 1.4.2.13. [1] *Nếu $h(x)$ có dạng $c^T x + c_0$ và $f(x)$ có dạng $x^T A x + 2a^T x + a_0$ thì các điều kiện sau là tương đương:*

i) Tập mức $\{f = \alpha\}$ được tách bởi $h - \gamma$ tại 0 với $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ nào đó.

ii) Ma trận $\bar{A} = A$ or $\bar{A} = -A$ thỏa mãn 3 điều kiện sau:

(B1) $\bar{A}$ có duy nhất một giá trị riêng âm, $a \in \mathcal{R}(A)$;

(B2) $c \in \mathcal{R}(A)$, $c \neq 0$;

(B3) $V^T \bar{A} V \succeq 0$,

trong đó $V \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ là một ma trận cơ sở của $\mathcal{N}(c^T)$.

Kết hợp Hệ quả 1.4.2.12 và Bổ đề 1.4.2.13 với nhau, chúng ta thấy rằng, nếu $A \neq 0$, tập $(f, g)(\mathbf{A}^n)$ là không lồi khi và chỉ khi các điều kiện sau được thỏa mãn

- A và B là phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là $B = \lambda A$;
- Hai hằng số α, γ có thể chọn sao cho $\{f = \alpha\}$ được tách bởi $-\lambda f + g - \gamma$ tại 0, điều kiện này có thể được kiểm tra bởi (B1)-(B3),

Chúng ta tổng kết lại các nhận xét trên bằng định lý sau, nó khẳng định rằng việc kiểm tra tính lồi của $(f, g)(\mathbf{A}^n)$ có thể thực hiện được một cách đơn giản.

[1] H. Q. Nguyen, Ya Chi and R. L. Sheu (2022), *Two quadratic mappings have a convex joint range when their level sets do not mutually separate.* Journal of Industrial and Management Optimization, 18, 575–592.

Định lý 1.4.2.14. [1] *Cho trước hai đa thức* $f(x) = x^T Ax + 2a^T x + a_0$ *và* $g(x) = x^T Bx + 2b^T x + b_0$ *với* $A \neq 0$*, khi đó tập* $(f, g)(\mathbf{A}^n)$ *là không lồi nếu và chỉ nếu ma trận* $\bar{A} = A$ *hoặc* $\bar{A} = -A$ *thỏa mãn 4 điều kiện sau*

(C0) $B = \lambda A$ *với* λ *nào đó.*

(C1) $\bar{A}$ *có duy nhất một giá trị riêng âm,* $a \in \mathcal{R}(A)$

(C2) $-\lambda a + b \in \mathcal{R}(A)$, $-\lambda a + b \neq 0$

(C3) $V^T \bar{A} V \succeq 0$

trong đó $V \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ *là một ma trận cơ sở của* $\mathcal{N}((-\lambda a + b)^T)$.

Quá trình kiểm tra tính lồi của $(f, g)(\mathbf{A}^n)$ được thực hiện bởi một số bước cụ thể sau

Cho trước các ma trận A, B, a, và b.

Bước 0 Kiểm tra liệu rằng $A = B = 0$ hoặc $a = b = 0$.

- Nếu đúng, thì $(f, g)(\mathbf{A}^n)$ là lồi.

- Nếu không đúng, ta qua bước tiếp sau (không mất tính tổng quát, giả sử rằng trong các bước tiếp theo $A \neq 0$).

Bước 1 Kiểm tra liệu rằng $B = \lambda A$ với λ nào đó trong $\mathbb{R}$.

- Nếu đúng, đặt $c = -\lambda a + b$ và sang bước tiếp theo.

- Nếu không đúng, thì $\mathbf{R}(f, g)$ là lồi.

Bước 2 Kiểm tra liệu rằng $c \neq 0$ và kiểm tra liệu rằng hai hệ phương trình tuyến tính $Ay_1 = a$ và $Ay_2 = c$ có nghiệm.

- Nếu đúng, đặt $V \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ là ma trận cơ sở của $\mathcal{N}(c^T)$ và sang bước tiếp theo.

- Nếu không đúng, thì $(f, g)(\mathbf{A}^n)$ là lồi.

[1] H. Q. Nguyen, Ya Chi and R. L. Sheu (2022), *Two quadratic mappings have a convex joint range when their level sets do not mutually separate.* Journal of Industrial and Management Optimization, 18, 575–592.

Bước 3 Kiểm tra liệu rằng một trong các trường hợp sau xảy ra:

(a) A có duy nhất một giá trị riêng âm và $V^TAV \succeq 0$;

(b) A có duy nhất một giá trị riêng âm và $V^TAV \preceq 0$.

- Nếu một trong hai (a) và (b) đạt được, thì $(f,g)(\mathbf{A}^n)$ là không lồi.

- Ngược lại, $(f,g)(\mathbf{A}^n)$ là lồi.

Do đó ta có thuật toán sau:

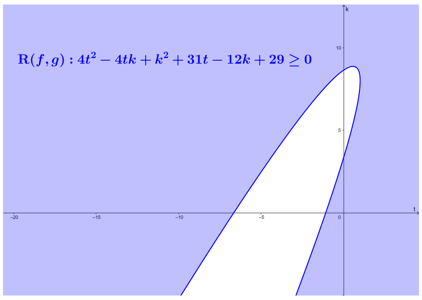
```
input  : Các ma trận A, B, a, b
output: Tính lồi của tập R(f, g)

if A = B = 0  or  a = b = 0 then
  | return lồi ;
else if A = 0  and  B ≠ 0 then
  | A ← B ;                          /* Luôn gán A là ma trận khác 0 */
  | B ← 0 ;
end

if B = λA với λ ∈ ℝ nào đó then
  | c ← −λa + b;
  | if c ≠ 0 then
  |   | if Các hệ tuyến tinh Ay₁ = a và Ay₂ = c đều có nghiệm then
  |   |   | V ← ma trận cơ sở cho hạt nhân của c^T ;
  |   |   | /* V là một ma trận cỡ n × (n − 1)                        */
  |   |   | if A có duy nhất một giá trị riêng âm and V^T AV ⪰ 0 then
  |   |   |   | return không lồi;
  |   |   | else if A có duy nhất một giá trị riêng dương and V^T AV ⪯ 0
  |   |   |   then
  |   |   |   | return không lồi;
  |   |   | end
  |   | end
  | end
end

return lồi;
```

Algorithm 1: Thuật toán để kiểm tra tính lồi của $\mathbf{R}(f,g)$

Ví dụ 1.4.2.15. Giả sử $f(x) = x^T Ax + 2a^T x$ và $g(x) = x^T Bx + 2b^T x$ là các hàm đa thức trên $\mathbf{A}^n$ với

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2a = \left(2, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}\right)^T, 2b = \left(5, \frac{3}{\sqrt{2}}, 8, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^T$$



Hình 1.15: Tập $(f, g)(\mathbf{A}^4)$ trong ví dụ 1.4.2.15.

Bước 0 Dễ thấy $A \neq 0, B \neq 0$, $a \neq 0$ và $b \neq 0$.

Bước 1 Ta có $B = \lambda A$ với $\lambda = 2$. Đặt

$$c^T = -\lambda a + b = \left(1, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 4, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

Bước 2 Rõ ràng $c \neq 0$. Cả hai hệ phương trình tuyến tính $Ay_1 = a$ và $Ay_2 = c$ đều có nghiệm:

$$y_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad y_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Bước 3 Các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Do đó, A có duy nhất một giá trị riêng âm. Ta chọn $V \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$

là ma trận cơ sở của $\mathcal{N}(c^T)$ sao cho

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -4 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } V^TAV = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 8 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ma trận V^TAV có các giá trị riêng đều không âm: $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = \frac{9-\sqrt{53}}{2}$, $\eta_3 = \frac{9+\sqrt{53}}{2}$ do đó, V^TAV là nửa xác định dương. Vậy ta đi đến kết luận rằng $(f, g)(\mathbf{A}^4)$ không là một tập lồi.

Hình 1.15 là minh họa cho tập $(f, g)(\mathbf{A}^4)$ trong ví dụ này.

TÓM TẮT CHƯƠNG 1

Nội dung chính của chương này bao gồm:

1. Khái niệm và các tính chất của không gian afin, các khái niệm và tính chất của: hệ điểm độc lập, hệ điểm phụ thuộc; phẳng; mục tiêu và tọa độ afin; đơn hình m chiều; hình hộp m chiều.

2. Khái niệm và tính chất của ánh xạ afin, biến đổi afin; khái niệm hình học afin.

3. Khái niệm siêu mặt bậc hai và các khái niệm liên quan: tâm, phương tiệm cận, siêu phẳng kính. Phân loại các siêu mặt bậc hai.

TÀI LIỆU ĐỌC THÊM CHƯƠNG 1

[1] Văn Như Cương-Tạ Mân (1988), *Hình học afin và Hình học Euclid*, Nxb ĐHQG Hà Nội (Chương 1, 2, 3).

[2] Nguyễn Mộng Hy (1999), *Hình học cao cấp*, Nxb Giáo dục, Hà Nội (Chương 1).

[3] M. Audin (2002), *Geometry*, Springer Science - Business Media (Chương 1).

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 1

1. Thế nào là không gian vectơ liên kết với không gian afin?

2. Hệ điểm độc lập là gì? Mục tiêu afin là gì?

3. Thế nào là tọa độ của một điểm đối với một mục tiêu afin?

4. $m-$phẳng là gì, siêu phẳng là gì?

5. Có thể xác định một $m-$phẳng trong không gian afin bằng cách nào?

6. Có các quan hệ nào giữa hai phẳng trong không gian afin?

7. Tâm tỉ cự và trọng tâm của một hệ điểm là gì?

8. Giải thích tại sao lại nói rằng đoạn thẳng, tam giác, hình bình hành là các trường hợp riêng của khái niệm đơn hình, hình hộp tổng quát.

9. Hãy định nghĩa đoạn thẳng bằng các cách khác nhau.

10. Mối quan hệ giữa ánh xạ afin và ánh xạ tuyến tính liên kết là gì?

11. Điều kiện để xác định một ánh xạ afin, đẳng cấu afin là gì?

12. Thế nào là tương đương afin, bất biến afin, hình học afin?

13. Siêu mặt bậc hai; mặt bậc hai; đường bậc hai là gì?

14. Hai siêu mặt bậc hai được gọi là có cùng loại khi nào? Tại sao nói các

đường elip, hypebol, parabol có loại khác nhau?

15. Tâm của siêu mặt bậc hai là gì? Siêu phẳng kính của siêu mặt bậc hai là gì?

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Không gian afin

1.1. Chứng minh rằng có thể xem trường số phức $\mathbb{C}$ là một không gian afin thực 2 chiều.

1.2. Cho không gian afin n chiều $(\mathbf{A}, \varphi, \overrightarrow{\mathbf{A}})$ và một tập hợp $\mathbf{B} \neq \emptyset$ tùy ý. Chứng minh rằng nếu có song ánh $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ thì có thể xây dựng $\mathbf{B}$ trở thành một không gian afin n chiều (chuyển cấu trúc afin từ $\mathbf{A}$ sang $\mathbf{B}$ nhờ song ánh f).

1.3. Cho $(\mathbf{A}, \varphi, \overrightarrow{\mathbf{A}})$, $\left(\mathbf{A}', \varphi', \overrightarrow{\mathbf{A}'}\right)$ là hai không gian afin. Xét ánh xạ:

$$\Phi : (\mathbf{A} \times \mathbf{A}') \times (\mathbf{A} \times \mathbf{A}') \to \overrightarrow{\mathbf{A}} \times \overrightarrow{\mathbf{A}'}.$$
$$((M, M'), (N, N')) \mapsto (\varphi(M, N), \varphi'(M', N'))$$

Chứng minh rằng $\left((\mathbf{A} \times \mathbf{A}'), \Phi, \overrightarrow{\mathbf{A}} \times \overrightarrow{\mathbf{A}'}\right)$ là một không gian afin (được gọi là tích trực tiếp của hai không gian $\mathbf{A}$ và $\mathbf{A}'$).

1.4. Cho không gian afin $(\mathbf{A}, \varphi, \overrightarrow{\mathbf{A}})$, $\overrightarrow{\alpha}$ là một không gian vectơ con của $\overrightarrow{\mathbf{A}}$. Hai điểm $M, N \in \mathbf{A}$ được gọi là tương đương nếu $\overrightarrow{MN} \in \overrightarrow{\alpha}$.

a) Chứng minh rằng quan hệ trong định nghĩa trên là một quan hệ tương đương.

b) Lớp tương đương chứa M ký hiệu là $[M]$. Tập các lớp tương đương ký hiệu là $\mathbf{A}/\overrightarrow{\alpha}$. Gọi $\overrightarrow{\mathbf{A}}/\overrightarrow{\alpha}$ là không gian vectơ thương của $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ trên $\overrightarrow{\alpha}$. Xét ánh xạ

$$\Phi : \mathbf{A}/\overrightarrow{\alpha} \times \mathbf{A}/\overrightarrow{\alpha} \to \overrightarrow{\mathbf{A}}/\overrightarrow{\alpha}$$

$$([M][N]) \mapsto [\overrightarrow{MN}]$$

Chứng minh rằng $(\mathbf{A}/\overrightarrow{\alpha}, \Phi, \overrightarrow{\mathbf{A}}/\overrightarrow{\alpha})$ là một không gian afin.

1.5. Cho $\mathbf{A}$ là không gian afin và O là một điểm của $\mathbf{A}$. Khi đó ánh xạ biến điểm $M \in \mathbf{A}$ thành vectơ $\overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\mathbf{A}}$ là một song ánh. Nhờ song ánh này có thể chuyển cấu trúc không gian vectơ từ $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ lên $\mathbf{A}$.

Hãy xây dựng các phép toán cụ thể trên $\mathbf{A}$ để $\mathbf{A}$ là một không gian vectơ.

1.6. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$, chứng minh rằng hệ $m+1$ điểm $\{A_0, A_1, \ldots, A_m\}$ là độc lập khi và chỉ khi với mọi điểm O, từ hai đẳng thức

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0} \text{ và } \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0 \, (\lambda_i \in \mathbf{K}) \, ,$$

suy ra $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

1.7. Chứng minh rằng nếu $M_0, M_1, \ldots, M_m$ là $m+1$ điểm độc lập thì điều kiện cần và đủ để $m+2$ điểm $M_0, M_1, \ldots, M_m, M_{m+1}$ không độc lập là với điểm O tùy ý ta có:

$$\overrightarrow{OM_{m+1}} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OM_i} \text{ với } \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1.$$

1.8. Trong $\mathbf{A}^3$ cho mục tiêu afin $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Lấy điểm $E \in \mathbf{A}^3$ sao cho

$$\overrightarrow{OE} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Chứng tỏ rằng $\{E; \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_3 + \vec{e}_1\}$ cũng là mục tiêu afin. Viết công thức đổi mục tiêu từ mục tiêu thứ nhất sang mục tiêu thứ hai.

1.9. Trong $\mathbf{A}^3$ với mục tiêu afin $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (1) cho các điểm

$$A_0(1,1,1), A_1(2,0,0), A_2(1,0,0), A_3(1,1,0),$$
$$A'_0(0,0,0), A'_1(1,1,0), A'_2(2,0,1), A'_3(1,0,1).$$

a) Chứng minh rằng $\left\{A_0; \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}\right\}$ (2) và $\left\{A'_0; \overrightarrow{A'_0A'_1}, \overrightarrow{A'_0A'_2}, \overrightarrow{A'_0A'_3}\right\}$ (3) là các mục tiêu afin của $\mathbf{A}^3$.

b) Tìm các công thức đổi mục tiêu từ mục tiêu (1) sang mục tiêu (2) và từ mục tiêu (2) sang mục tiêu (3).

1.10. Chứng tỏ rằng mỗi công thức $[x'] = A[x] + [a]$, trong đó A là ma trận cấp n không suy biến đều ứng với một phép đổi mục tiêu trong không gian afin $\mathbf{A}^n$.

1.11. Chứng minh rằng luôn tồn tại hệ $m+1$ điểm độc lập trong một $m-$phẳng.

1.12. Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ với mục tiêu cho trước, cho các điểm $M(1,2,3)$, $N(0,-1,2)$, $P(2,1,2)$.

a) Lập phương trình của phẳng α bé nhất đi qua M, N, P.

b) Lập phương trình của mặt phẳng đi qua $Q(-2,1,1)$ và song song với α.

1.13. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$, chứng minh rằng nếu phẳng $\alpha \subset \mathbf{A}^n$ có phương trình đối với mục tiêu $\{O; \vec{e}_i\}$ là

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + b_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

thì phương trình của phương $\overrightarrow{\alpha}$ đối với cơ sở $\{\vec{e}_i\}$ là

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

1.14. Trong không gian $\mathbf{A}^4$ với mục tiêu cho trước cho phẳng α có phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 1 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

và điểm $M(2,2,-1,0)$. Lập phương trình của mặt phẳng qua M và song song với α.

1.15. Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ với mục tiêu cho trước, cho các điểm $M(1,2,1)$, $N(0,1,-1)$ và phẳng α có phương trình:

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0.$$

a) Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng MN và α.

b) Viết phương trình mặt phẳng qua M và song song với α.

1.16. Trong không gian $\mathbf{A}^4$ với mục tiêu cho trước, viết phương trình tổng quát của phẳng có số chiều bé nhất cho các trường hợp sau:

1. Đi qua điểm $A(1,2,3,4)$ và phương chứa hai vectơ $\vec{a}(-1,2,0,3)$ và $\vec{b}(2,0,-4,1)$

2. Đi qua điểm $A(1, 2, 3, 4)$ và phương chứa ba vectơ $\vec{a}(-2, 2, 5, -1)$, $\vec{b}(2, 0, -2, 0)$ và $\vec{c}(0, 2, 3, -1)$.

3. Đi qua hai điểm $A(1, 1, 1, 1), B(2, 3, 1, 0)$ và phương chứa hai vectơ $\vec{a}(-2, 2, 5, -1)$ và $\vec{b}(0, 0, -2, 0)$.

4. Đi qua ba điểm $A(2, 1, 2, 1), B(1, 1, 1, 1), C(2, 0, 2, 0)$.

1.17. Trong không gian afin $\mathbf{A}^4$ với mục tiêu cho trước, cho các điểm $M(3, 1, 1, 2)$, $N(0, 1, 0, 0)$, $P(3, 2, 3, 2)$, $Q(1, 0, 0, 1)$.

a) Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng MN và PQ.

b) Tìm giao điểm của đường thẳng PQ với các siêu phẳng tọa độ (siêu phẳng đi qua các điểm của mục tiêu trừ một đỉnh).

1.18. Chứng minh rằng nếu các phẳng α và β đều song song với phẳng γ thì giao $\alpha \cap \beta$ (nếu có) là phẳng song song với γ.

1.19. Cho hai siêu phẳng α và β cắt nhau. Nếu siêu phẳng γ song song với $\alpha \cap \beta$ thì các giao $\gamma \cap \alpha$ và $\gamma \cap \beta$ (nếu có) song song với nhau.

1.20. Trong $\mathbf{A}^n (n \geq 1)$ cho hai siêu phẳng song song phân biệt α và α', $m-$ phẳng β không thuộc α. Chứng minh rằng nếu β cắt α thì β cũng cắt α'.

1.21. Cho hai phẳng α và β song song với nhau có số chiều lần lượt là m và l . Số chiều của $\alpha + \beta$ là bao nhiêu?

1.22. Trong $\mathbf{A}^n$ cho G là tâm tỉ cự của hệ k điểm $M_1, M_2, \ldots, M_k$ gắn với họ hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0\right)$, G' là tâm tỉ cự của hệ $m-k$ điểm $M_{k+1}, M_{k+2}, \ldots, M_m$ gắn với họ các hệ số $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m$ với $\sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i \neq 0$). Gọi G'' là tâm tỉ cự của hệ điểm $M_1, M_2, \ldots, M_m$ gắn với họ hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ($\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \neq 0$). Chứng tỏ rằng khi đó G'' là tâm tỉ cự của G, G' gắn với họ hệ số $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ và $\lambda' = \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i$.

1.23. Chứng minh các tính chất sau đây của trọng tâm:

a) Trọng tâm của hệ hai điểm là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

b) Trọng tâm của hệ ba điểm không thẳng hàng là giao điểm của ba đường trung tuyến.

c) Trọng tâm của hệ bốn điểm không đồng phẳng là giao điểm của đường thẳng nối mỗi điểm với trọng tâm của ba điểm còn lại.

1.24. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho $m-$đơn hình với các đỉnh $P_0, P_1, \dots, P_m$.

a) Chứng minh rằng bao afin của hai biên đối diện là chéo nhau (bao afin của một tập con trong không gian afin là phẳng bé nhất chứa tập đó).

b) Xét các đường thẳng nối một đỉnh với trọng tâm của biên đối diện. Chứng minh rằng các đường thẳng này đồng quy tại một điểm G. Xét các trường hợp đặc biệt $m = 2, 3$.

c) Gọi G', G'' là trọng tâm của một cặp biên đối diện. Hãy tính $(G'G''G)$. Xét các trường hợp đặc biệt $m = 2, 3$.

1.25. Sử dụng khái niệm trọng tâm, giải bài toán sau: "Trong không gian thông thường cho hình tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng ba đường thẳng sau đồng quy: 2 đường thẳng nối trung điểm của cặp cạnh đối diện, đường thẳng nối trung điểm của hai đường chéo".

1.26. (Định lý Thales). Trong $\mathbf{A}^n$ cho ba $m-$phẳng song song phân biệt. Hai đường thẳng d và d' cắt ba $m-$phẳng đó lần lượt tại bộ ba điểm A, B, C và A', B', C'. Chứng minh rằng

$$(ABC) = (A'B'C').$$

1.27. Cho ba siêu phẳng α, β, γ trong không gian A^n cùng đi qua một $(n-2)-$phẳng. Chứng minh rằng nếu α, β, γ cắt hai đường thẳng song song l_1, l_2 lần lượt tại A_1, B_1, C_1 và A_2, B_2, C_2 thì $(A_1B_1C_1) = (A_2, B_2, C_2)$.

1.28. Trong $\mathbf{A}^n (n \geq 1)$ cho mục tiêu $\{O; E_1, \dots, E_n\}$ và điểm M có tọa độ (x_i). Gọi α_i là siêu phẳng đi qua hệ điểm $O; E_1, \dots, E_n$ trừ điểm E_i, α là siêu phẳng đi qua M và song song với α_i. Khi đó có điểm $M_i = OE_i \times \alpha$. Chứng minh rằng $(M_iE_iO) = x_i$.

1.29. (Định lý Pappus). Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O. Gọi A, B, C là 3 điểm phân biệt thuộc

d không trùng với O, A', B', C' là 3 điểm phân biệt thuộc d' không trùng với O. Giả sử $B'C$ cắt BC' tại M, CA' cắt $C'A$ tại $N, A'B$ cắt AB' tại P. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

1.30. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu cho trước, chứng minh rằng tập tất cả các điểm có tọa độ thỏa mãn một hệ phương trình và bất phương trình tuyến tính là một tập lồi.

1.31. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$, chứng minh rằng: $m-$phẳng; đoạn thẳng (đóng, mở, nửa đóng); $m-$đơn hình; $m-$hộp là những tập lồi.

Ánh xạ afin

1.32. Cho ánh xạ afin $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$. Chứng minh rằng:

a) f là đơn ánh khi và chỉ khi $\dim f(\mathbf{A}) = \dim \mathbf{A}$.

b) f là toàn ánh khi và chỉ khi $\dim f(\mathbf{A}) = \dim \mathbf{A}'$.

c) f là song ánh khi và chỉ khi $\dim f(\mathbf{A}) = \dim \mathbf{A} = \dim \mathbf{A}'$.

1.33. Ánh xạ afin, phép biến đổi afin giữ nguyên quan hệ nào giữa hai cái phẳng trong số các quan hệ sau: song song; cắt nhau; chéo nhau.

1.34. Hãy mở rộng khái niệm phép thấu xạ với nền là một $m-$phẳng.

1.35. Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ với một mục tiêu đã chọn (*) cho các điểm $A(1,0), B(0,2)$, $C(-3,0), A'(2,3), B'(-1,4), C(-2,-1)$.

a) Chứng minh rằng $\{A; B, C\}$ là một mục tiêu afin.

b) Chứng minh rằng có phép afin f của $\mathbf{A}^2$ sao cho $f(A) = A', f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

c) Lập phương trình của f (nói trong câu b) đối với:

- Mục tiêu $(*)$;
- Mục tiêu $\{A; B, C\}$.

1.36. Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ cho ánh xạ afin f có phương trình đối với một mục tiêu là:

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 2x_2 - 2 \\ x_2' = 2x_1 + 2x_2 - 1 \end{cases}.$$

a) Chứng minh rằng f là phép biến đổi afin của $\mathbf{A}^2$. Tìm f^{-1}.

b) Tìm ảnh và tạo ảnh của điểm $M(1,2)$.

c) Tìm ảnh và tạo ảnh của đường thẳng d có phương trình là

$$3x_1 + 2x_2 + 6 = 0.$$

1.37. Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ cho ánh xạ afin f có phương trình đối với một mục tiêu là:

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 6x_2 + 3 \\ x_2' = 4x_1 + 9x_2 + 1 \end{cases}.$$

a) Hãy tìm các đường thẳng có phương bất biến đối với f.

b) Hãy tìm điểm kép của f (tức là điểm mà ảnh của nó qua f cũng là chính nó).

1.38. Chứng minh rằng qua phép afin:

a) Ảnh và tạo ảnh của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

b) Ảnh và tạo ảnh của tập lồi là tập lồi.

1.39. Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ cho tam giác ABC. Xét các phép biến đổi afin f, g của $\mathbf{A}^2$ xác định bởi

$$f(A) = B, f(B) = C, f(C) = A;$$
$$g(A) = A, g(B) = C, g(C) = B.$$

a) Tìm các điểm kép của f và g.

b) Xác định tích $g \circ f$.

1.40. Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ với mục tiêu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ cho các điểm:

$$A_0(1,1,1), A_1(2,0,0), A_2(1,1,0), A_3(1,1,0)$$
$$A_0'(0,0,0), A_1'(0,1,0), A_2'(2,0,1), A_3'(1,0,1).$$

a) Chứng minh rằng $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ và $\{A'_0, A'_1, A'_2, A'_3\}$ là các hệ điểm độc lập.

b) Lập phương trình của phép biến đổi afin $f : \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^3$ sao cho $A_i \mapsto A'_i, i = 0, 1, 2, 3$ đối với:

+ Mục tiêu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$;

+ Mục tiêu $\{A_0; A_1, A_2, A_3\}$.

1.41. Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ cho tứ diện $ABCD$. Hãy lập phương trình của phép biến đổi afin của $\mathbf{A}^3$ đối với mục tiêu $\{A; B, C, D\}$ sao cho $A \mapsto B, B \mapsto A, C \mapsto C, D \mapsto D$.

1.42. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho mục tiêu $\{O; \vec{e}_i\}$, xét ánh xạ $f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ xác định như sau: nếu $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thì $f(X) = (0, x_2, \dots, x_n)$. Chứng minh f là ánh xạ afin. Tìm ảnh của f.

1.43. Chứng minh rằng nếu phép biến đổi afin f của $\mathbf{A}^n$ có $n + 1$ điểm kép độc lập thì f là phép đồng nhất.

1.44. Cho ánh xạ afin $f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ $(n \geq 1)$. Chứng minh rằng f là phép chiếu song song khi và chỉ khi $f \circ f = f$.

1.45. Cho f là phép afin của $\mathbf{A}^n$ có điểm kép I. Chứng minh rằng có đường thẳng hoặc mặt phẳng là bất biến đối với f (nghĩa là ảnh của đường thẳng hoặc mặt phẳng là chính nó).

1.46. Chứng minh rằng:

a) Tích của hai phép tịnh tiến là phép tịnh tiến.

b) Tích của phép tịnh tiến và phép vị tự với tỉ số khác 1 là phép vị tự.

c) Tích của hai phép vị tự là một phép tịnh tiến hoặc một phép vị tự.

1.47. Cho phép afin của không gian afin $\mathbf{A}^n (n \geq 2)$, biết rằng f biến đường thẳng thành đường thẳng song song với nó. Chứng minh rằng f là phép tịnh tiến hoặc phép vị tự.

1.48. Tìm điều kiện để hai tập gồm các hệ ba điểm là tương đương afin.

1.49. Trong không gian afin hai hình bình hành bất kỳ có tương đương afin không? Hai hình thang không là hình bình hành có tương đương afin không? Khi nào thì chúng tương đương afin?

Siêu mặt bậc hai

1.50. Chứng minh rằng số các tâm của một siêu mặt bậc hai chỉ có thể là 0, 1 hoặc vô hạn.

1.51. Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$. Tìm giao điểm của mặt bậc hai $\mathcal{S}$ với đường thẳng d có phương trình lần lượt là:

$$\mathcal{S} : x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_3^2 + x_1x_3 - x_1 - x_2 = 0$$
$$d : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

1.52. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho $m-$phẳng α và siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}$ cắt nhau. Chứng minh rằng giao β của $\mathcal{S}$ và α:

a) hoặc là siêu mặt bậc hai trong α;

b) hoặc là siêu phẳng trong α;

c) hoặc là α.

1.53. Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$, tìm tâm và điểm kì dị của mỗi siêu mặt bậc hai có phương trình sau đây:

a) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_1 - 2x_2 + 1 = 0$.

b) $2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3 - x_1x_3 + x_1 - 2x_2 = 0$.

c) $2x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1 - 4x_2 - 1 = 0$.

1.54. Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ cho mặt bậc hai $\mathcal{S}$ có phương trình đối với mục tiêu đã chọn là:

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 14x_1 - 14x_2 + 14x_3 - 11 = 0.$$

và $\vec{e} = (1, 2, 3)$.

a) Chứng tỏ rằng $\vec{e}$ không phải là phương tiệm cận của $\mathcal{S}$. Viết phương trình siêu phẳng kính của $\mathcal{S}$ liên hợp với phương $\vec{e}$.

b) Cho điểm $M(1,-1,2) \in \mathcal{S}$. Chứng tỏ rằng M không phải là điểm kì dị. Viết phương trình siêu tiếp diện của $\mathcal{S}$ tại M.

1.55. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho siêu mặt bậc hai có phương trình:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_0 = 0.$$

Ký hiệu ma trận

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_0 \end{bmatrix}.$$

Chứng minh rằng nếu $\mathcal{S}$ có điểm kì dị thì $\det\bar{\mathrm{A}} = 0$. Điều ngược lại có đúng không?

1.56. Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ hãy đưa phương trình các mặt bậc hai sau về dạng chuẩn tắc:

a) $4x_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3 - 5 = 0$;

b) $x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3 + 2 = 0$.

CHƯƠNG 2

HÌNH HỌC EUCLID

Mục tiêu chương

Học xong chương này, sinh viên có thể:

. Nhận biết được các đặc điểm của không gian vectơ Euclid, hệ vectơ trực giao, hệ vectơ trực chuẩn, cơ sở trực chuẩn của không gian vectơ Euclid, sự trực giao của các không gian vectơ con.

. Mô tả được không gian Euclid, mục tiêu trực chuẩn trong không gian Euclid. Xác định được quan hệ trực giao, bù trực giao của các phẳng.

. Tính được khoảng cách giữa hai phẳng, thể tích của đơn hình m chiều, hình hộp m chiều.

. Giải được các bài toán về quan hệ trực giao, bù trực giao của các phẳng.

. Xác định được dạng chính tắc của siêu mặt bậc hai trong không gian Euclid, siêu cầu trong không gian Euclid.

. Vận dụng được khái niệm và tính chất của ánh xạ đẳng cự, biến đổi đẳng cự để giải các bài toán liên quan.

. Giải thích được các khái niệm hình học Euclid, hình học đồng dạng.

2.1 Không gian vectơ Euclid

2.1.1 *Định nghĩa không gian vectơ Euclid*

Định nghĩa 2.1.1.1. Cho $\mathbf{V}$ là không gian vectơ trên trường số thực $\mathbb{R}$, một ánh xạ $\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ đặt tương ứng mỗi $(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ với một số thực xác định, ký hiệu là $\varphi(\vec{a}, \vec{b})$ hay $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được gọi là tích vô hướng trên $\mathbf{V}$ nếu nó thỏa mãn 4 tiên đề sau:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

3) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

4) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, với mọi $\vec{a} \in \mathbf{V}$, dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a} = \vec{0}$;

với mọi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}$, mọi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được gọi là tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Không gian vectơ $\mathbf{V}$ cùng với một tích vô hướng trên nó được gọi là không gian vectơ Euclid.

Nhận xét 2.1.1.2. Tích vô hướng φ nói trên thực chất là một dạng song tuyến tính đối xứng, xác định dương trên không gian vectơ $\mathbf{V}$.

Ví dụ 2.1.1.3. 1) Không gian các vectơ thông thường trong mặt phẳng (hay trong không gian 3 chiều) là một không gian vectơ Euclid với tích vô hướng thông thường $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$, trong đó $\|\vec{a}\|, \|\vec{b}\|$ là độ dài của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.

2) Xét không gian vectơ thực $\mathbb{R}^n$, khi đó $\mathbb{R}^n$ là không gian vectơ Euclid với tích vô hướng chính tắc:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Tính chất 2.1.1.4. *Trong không gian vectơ Euclid n chiều ta có:*

i) $\vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{a} \cdot \vec{x} - \vec{a} \cdot \vec{y}$, *với mọi* $\vec{a}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$.

ii) $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$ *với mọi* $\vec{a} \in \mathbf{V}$.

iii) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$ *với mọi* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}$ *(Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz).*

Chứng minh. i) và ii) là hiển nhiên.

iii) Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại số $k \in \mathbb{R}$ sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$ hoặc $\vec{b} = k\vec{a}$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $\vec{a} = k\vec{b}$. Khi đó $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (k\vec{b} \cdot \vec{b})^2 = k^2 \left(\vec{b}^2\right)^2$, $\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 = (k\vec{b})^2 \cdot \vec{b}^2 = k^2 \left(\vec{b}^2\right)^2$.

Suy ra

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2. \tag{2.1}$$

Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ độc lập tuyến tính thì $\vec{a} + k\vec{b} \neq \vec{0}$ với mọi $k \in \mathbb{R}$, hay

$$\begin{aligned}
(\vec{a} + k\vec{b})^2 > 0, \forall k \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{b}^2 k^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot k + \vec{a}^2 > 0, \forall k \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{b}^2 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 < \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Từ (2.1) và (2.2) ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét 2.1.1.5. Trên không gian vectơ Euclid $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc, bất đẳng thức Cauchy - Schwarz có dạng

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right) \cdot \left(y_1^2 + \ldots + y_n^2\right).$$

Định nghĩa 2.1.1.6. Cho vectơ $\vec{a}$ trong không gian vectơ Euclid $\mathbf{V}$, mô-đun (hay độ dài) của vectơ $\vec{a}$, ký hiệu $\|\vec{a}\|$, là một số xác định bởi: $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$. Nếu $\|\vec{a}\| = 1$, ta nói $\vec{a}$ là vectơ đơn vị.

Nhận xét 2.1.1.7. i) $\|\vec{a}\| \geq 0, \forall \vec{a} \in \mathbf{V}, \|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

ii) $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\|\vec{a}\|$, với mọi $\vec{a} \in \mathbf{V}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

iii) $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\overrightarrow{b}\|$ với mọi $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}$.

iv) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$, với mọi $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}$ (bất đẳng thức tam giác).

Định nghĩa 2.1.1.8. Cho $\vec{a}, \vec{b}$ là 2 vectơ khác 0 trong không gian vectơ Euclid $\mathbf{V}$. Góc giữa 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là một số θ với $0 \leq \theta \leq \pi$ sao cho

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Nếu $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, ta nói $\vec{a}$ vuông góc (hay trực giao) với $\vec{b}$, ký hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$. Rõ ràng $\vec{0} \perp \vec{a}$, với mọi $\vec{a} \in \mathbf{V}$.

Nhận xét 2.1.1.9. i) $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$;

ii) $\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$, với $k > 0$;

iii) $\theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$, với $k < 0$;

iv) $\theta = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

2.1.2 *Hệ vectơ trực giao, trực chuẩn*

Định nghĩa 2.1.2.1. Cho $\mathbf{V}$ là không gian vectơ Euclid n chiều, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbf{V}$. Khi đó

+ Hệ vectơ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ được gọi là hệ trực giao nếu $\vec{a}_i \perp \vec{a}_j, \forall 1 \leq i \neq j \leq k$.

+ Hệ vectơ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ được gọi là hệ trực chuẩn nếu nó là hệ trực giao và $\|\vec{a}_i\| = 1, \forall i = 1, \ldots, k$.

+ Hệ vectơ $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k\}$ được gọi là có sở trực giao nếu nó là hệ trực giao và là cơ sở của $\mathbf{V}$.

+ Hệ vectơ $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k\}$ được gọi là cơ sở trực chuẩn nếu nó là hệ trực chuẩn và là cơ sở của $\mathbf{V}$.

Tọa độ của một vectơ đối với cơ sở trực chuẩn được gọi là tọa độ trực chuẩn.

Nhận xét 2.1.2.2. i) Hệ vectơ $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k\}$ là hệ trực chuẩn khi và chỉ khi

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ khi } i \neq j \\ 1 \text{ khi } i = j \end{cases}.$$

ii) Nếu $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ là tọa độ trực chuẩn của các vectơ $\vec{x}, \vec{y}$ thì $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Định lý 2.1.2.3. *Mọi hệ trực giao gồm các vectơ khác vectơ không trong không gian vectơ Euclid là độc lập tuyến tính.*

Chứng minh. Cho $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ là hệ vectơ trực giao và $\vec{a}_i \neq \vec{0}, \forall i = 1, \ldots, k$. Giả sử

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0}.$$

Lần lượt nhân hai vế của đẳng thức trên với $\vec{a}_i, \forall i = 1, \ldots, k$, ta được:

$$\begin{aligned}
&\vec{a}_i\left(\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k\right) = \vec{0}\\
&\Leftrightarrow \lambda_i\left(\vec{a}_i\right)^2 = 0\\
&\Leftrightarrow \lambda_i = 0.
\end{aligned}$$

Vậy hệ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ là độc lập tuyến tính. □

Hệ quả 2.1.2.4. *i) Hệ trực chuẩn là hệ độc lập tuyến tính.*

ii) Hệ n vectơ $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ trong không gian vectơ Euclid n chiều là cơ sở trực chuẩn khi và chỉ khi $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & khi\ i = j \\ 0 & khi\ i \neq j \end{cases}$.

Định lý 2.1.2.5. *Trong không gian vectơ Euclid n chiều $\mathbf{V}$ cho hệ vectơ trực chuẩn $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ $(k < n)$. Khi đó có thể bổ sung $(n-k)$ vectơ vào hệ trên để được một cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{V}$.*

Chứng minh. Giả sử $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ $(k < n)$ là hệ vectơ trực chuẩn trong không gian vectơ Euclid n chiều $\mathbf{V}$. Khi đó tồn tại vectơ $\vec{r} \in \mathbf{V}$ và $\vec{r} \notin \langle\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k\rangle$ (không gian sinh bởi hệ vectơ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$).

Xét

$$\vec{a} = \vec{r} - \sum_{i=1}^{k}\left(\vec{r} \cdot \vec{e}_i\right) \cdot \vec{e}_i.$$

Ta có $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{e}_j =$

$$= \left[\vec{r} - \sum_{i=1}^{k}\left(\vec{r} \cdot \vec{e}_i\right) \cdot \vec{e}_i\right] \cdot \vec{e}_j = \vec{r} \cdot \vec{e}_j - \left(\vec{r} \cdot \vec{e}_j\right) \cdot \vec{e}_j \cdot \vec{e}_j = 0, \forall j = 1, \ldots, k,$$

tức là $\vec{a} \perp \vec{e}_j$ với $\forall j = 1, \ldots, k$. Đặt $\vec{e}_{k+1} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, ta có

$$\|\vec{e}_{k+1}\| = 1; \vec{e}_{k+1} \cdot \vec{e}_i = 0, \forall i = 1, \ldots, k.$$

Do đó hệ vectơ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}$ là hệ trực chuẩn.

Tiếp tục quá trình trên để nhận được các vectơ $\vec{e}_{k+2}, \ldots, \vec{e}_n$ sao cho $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ là cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{V}$. □

Bởi vì trong không gian vectơ khác $\{\vec{0}\}$ luôn có vectơ đơn vị, nên từ định lý trên ta có:

Hệ quả 2.1.2.6. *Trong không gian vectơ Euclid n chiều, $n > 0$, luôn có cơ sở trực chuẩn.*

Trong không gian vectơ Euclid, ma trận chuyển giữa các cơ cở trực chuẩn là ma trận đặc biệt, đó là ma trận vuông A mà $A \cdot A^T = I$ (ma trận đơn vị), một ma trận như thế được gọi là ma trận trực giao. Cụ thể ta có:

Định lý 2.1.2.7. *Trong không gian vectơ Euclid $\mathbf{V}^n$, cho cơ sở trực chuẩn $\varepsilon = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ và cơ sở $\varepsilon' = \left\{\vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_n\right\}$. Giả sử A là ma trận chuyển từ ε sang ε'. Thế thì A là ma trận trực giao khi và chỉ khi ε' là cơ sở trực chuẩn.*

Chứng minh. Biểu thị cơ sở ε' qua cơ sở ε,

$$\vec{e'}_i = a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + \ldots + a_{ni}\vec{e}_n, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Khi đó ma trận chuyển từ ε sang ε' là $A = [a_{ij}]$.

Cơ sở $\left\{\vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_n\right\}$ là trực chuẩn khi và chỉ khi $\vec{e'}_i \cdot \vec{e'}_j = \delta_{ij}$, tức $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \ldots, n$. Điều này tương đương với $A \cdot A^T = I$, tức A là ma trận trực giao. □

2.1.3 *Không gian con trực giao, bù trực giao*

Định nghĩa 2.1.3.1. Cho $\mathbf{P}, \mathbb{Q}$ là các không gian con trong không gian vectơ Euclid $\mathbf{V}$. Khi đó

+ $\mathbf{P}$ được gọi là trực giao (hay vuông góc) với $\mathbb{Q}$ nếu với mọi $\vec{x} \in \mathbf{P}, \vec{y} \in \mathbb{Q}$ thì $\vec{x} \perp \vec{y}$, ký hiệu $\mathbf{P} \perp \mathbf{Q}$;

+ $\mathbf{P}$ được gọi là bù trực giao (hay bù vuông góc) với $\mathbf{Q}$ nếu $\mathbf{P} \perp \mathbf{Q}$ và $\mathbf{V} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$.

Tính chất 2.1.3.2. *i) Nếu* $\mathbf{P} \perp \mathbf{Q}$ *thì* $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} = \{\vec{0}\}$.

ii) Nếu $\mathbf{P} \perp \mathbf{Q}$ *và* $\mathbf{R}$ *bù trực giao với* $\mathbf{Q}$ *thì* $\mathbf{P} \subset \mathbf{R}$.

iii) Cho $\mathbf{P}$ *là không gian con trong không gian vectơ Euclid* n *chiều* $\mathbf{V}$. *Khi đó không gian bù trực giao của* $\mathbf{P}$ *là duy nhất, ký hiệu* $\mathbf{P}^{\perp}$.

Chứng minh. i) Thật vậy, nếu $\mathbf{P} \perp \mathbf{Q}$ và $\vec{x} \in \mathbf{P} \cap \mathbf{Q} \Rightarrow \vec{x} \perp \vec{x} \Rightarrow \vec{x}^2 = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Do đó $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} = \{\vec{0}\}$.

ii) Thật vậy, giả sử $\vec{u} \in \mathbf{P} \subset \mathbf{V} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{Q} \Rightarrow \vec{u} = \vec{r} + \vec{q}, \quad \vec{r} \in \mathbf{R}, \vec{q} \in \mathbf{Q}$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{q} = \vec{r} \cdot \vec{q} + \vec{q} \cdot \vec{q} \Rightarrow \vec{q} \cdot \vec{q} = 0 \Rightarrow \vec{q} = \vec{0}.$$

Do đó $\vec{u} = \vec{r} \in \mathbf{R}$. Vậy $\mathbf{P} \subset \mathbf{R}$.

iii) Thật vậy, từ tính chất ii) suy ra tính duy nhất của không gian con bù trực giao của $\mathbf{P}$. Để chứng minh sự tồn tại của không gian con bù trực giao của $\mathbf{P}$, lấy cơ sở trực chuẩn $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ trong P. Theo định lý về sự tồn tại cơ sở trực chuẩn, trong $\mathbf{V}$ có sở trực chuẩn $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \ldots, \vec{e}_n\}$. Xét không gian con $\mathbf{Q}$ của $\mathbf{V}$ sinh bởi hệ $\{\vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$. Khi đó, dễ thấy rằng $\mathbf{Q}$ là không gian bù trực giao của $\mathbf{P}$. □

2.1.4 *Ánh xạ trực giao, biến đổi trực giao*

Định nghĩa 2.1.4.1. Cho hai không gian vectơ Euclid $\mathbf{V}$ và $\mathbf{V}'$. Ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ được gọi là ánh xạ tuyến tính trực giao (hay ánh xạ trực giao) nếu φ bảo toàn tích vô hướng của hai vectơ bất kì, tức là: $\varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}$.

Ánh xạ trực giao $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ là song ánh được gọi là đẳng cấu trực giao.

Đẳng cấu trực giao $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ được gọi là biến đổi trực giao.

Nhận xét 2.1.4.2. i) Ánh xạ trực giao là đơn cấu tuyến tính, vì từ $\varphi(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi = \{\vec{0}\}$.

ii) Từ i) suy ra nếu $\mathbf{V}$ là hữu hạn chiều thì ánh xạ trực giao $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ là biến đổi trực giao.

Định lý 2.1.4.3. *Ánh xạ $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ giữa các không gian vectơ Euclid là ánh xạ trực giao khi và chỉ khi φ bảo toàn tích vô hướng.*

Chứng minh. Nếu φ là ánh xạ trực giao thì φ bảo toàn tích vô hướng (hiển nhiên). Ngược lại, giả sử $\varphi(\vec{x}) \cdot \varphi(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$ với mọi $\vec{x}, \vec{y}$, ta cần chứng minh $\varphi(\lambda\vec{x} + \beta\vec{y}) = \lambda\varphi(\vec{x}) + \beta\varphi(\vec{y})$ với mọi $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, tức $\vec{u} = \varphi(\lambda\vec{x} + \beta\vec{y}) - \lambda\varphi(\vec{x}) - \beta\varphi(\vec{y})$ phải bằng $\vec{0}$.

Vì với mọi vectơ $\varphi(\vec{z})$, ta có

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \varphi(\vec{z}) &= (\varphi(\lambda\vec{x} + \beta\vec{y}) - \lambda\varphi(\vec{x}) - \beta\varphi(\vec{y})) \cdot \varphi(\vec{z}) \\
&= (\lambda\vec{x} + \beta\vec{y}) \cdot \vec{z} - \lambda\vec{x} \cdot \vec{z} - \beta\vec{y} \cdot \vec{z} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

nên $\vec{u}$ trực giao với bao tuyến tính $< Im\varphi >$, nhưng rõ ràng $\vec{u}$ cũng thuộc $< Im\varphi >$ nên $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$, từ đó $\vec{u} = \vec{0}$. □

Định lý 2.1.4.4. *Cho ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ giữa các không gian vectơ Euclid. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

i) φ là ánh xạ trực giao;

ii) φ biến cơ sở trực chuẩn trong $\mathbf{V}$ thành hệ trực chuẩn trong $\mathbf{V}'$;

iii) φ bảo toàn môđun của vectơ.

Chứng minh. i) $\Rightarrow$ ii): Giả sử $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ là cơ sở trực chuẩn trong $\mathbf{V}$, ta có

$$\varphi(\vec{e}_i) \cdot \varphi(\vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}.$$

Tức $\{\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \ldots, \varphi(\vec{e}_n)\}$ là hệ trực chuẩn trong $\mathbf{V}'$.

ii) $\Rightarrow$ iii) : Giả sử $\vec{x} \in \mathbf{V}$ và $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$, trong đó $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ là cơ sở trực chuẩn trong $\mathbf{V}$, khi đó $\varphi(\vec{x}) = x_1\varphi(\vec{e}_1) +$

$x_2\varphi(\vec{e}_2) + \ldots + x_n\varphi(\vec{e}_n)$. Vì $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ và $\{\varphi(\vec{e}_1),\ \varphi(\vec{e}_2),\ \ldots,$ $\varphi(\vec{e}_n)\}$ là các hệ trực chuẩn nên $\|\varphi(\vec{x})\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \|\vec{x}\|$.

iii) $\Rightarrow$ i): Giả sử φ bảo toàn môđun các vectơ và $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$. Ta có $\|\varphi(\vec{x}+\vec{y})\| = \|\vec{x}+\vec{y}\|$ hay $\|\varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})\| = \|\vec{x}+\vec{y}\|$. Bình phương hai vế ta có $\varphi^2(\vec{x}) + 2\varphi(\vec{x})\cdot\varphi(\vec{y}) + \varphi^2(\vec{y}) = \vec{x}^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}^2$. Vì $\|\varphi(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|, \|\varphi(\vec{y})\| = \|\vec{y}\|$, suy ra $\varphi(\vec{x})\cdot\varphi(\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}$. Tức φ là ánh xạ trực giao. □

Định lý 2.1.4.5. *Cho biến đổi trực giao $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. Khi đó nếu $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ là không gian con bất biến đối với φ, tức $\varphi(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$, thì không gian $\mathbf{U}^\perp$ cũng bất biến đối với φ.*

Chứng minh. Giả thiết $\varphi(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$. Ta chứng minh $\varphi\left(\mathbf{U}^\perp\right) = \mathbf{U}^\perp$.

Lấy $\vec{x} \in \varphi\left(\mathbf{U}^\perp\right)$, ta có $\vec{x} = \varphi(\vec{y}), \vec{y} \perp \vec{u}, \forall \vec{u} \in \mathbf{U}$. Với $\forall \vec{a} \in \mathbf{U} = \varphi(\mathbf{U})$, giả sử $\vec{a} = \varphi(\vec{u}), \vec{u} \in \mathbf{U}$. Ta có

$$\vec{x}\cdot\vec{a} = \varphi(\vec{y})\cdot\varphi(\vec{u}) = \vec{y}\cdot\vec{u} = 0.$$

Do đó $\vec{x} \in \mathbf{U}^\perp \Rightarrow \varphi\left(\mathbf{U}^\perp\right) \subset \mathbf{U}^\perp$. Vì φ là biến đổi tuyến tính, điều này tương đương với $\varphi\left(\mathbf{U}^\perp\right) = \mathbf{U}^\perp$. □

Dựa vào kết quả của đại số tuyến tính về sự tồn tại không gian con 1 chiều hoặc 2 chiều bất biến đối với một biến đổi tuyến tính, từ định lý trên ta có:

Định lý 2.1.4.6. *Cho biến đổi trực giao $\varphi : \mathbf{V}^n \to \mathbf{V}^n$. Khi đó $\mathbf{V}^n$ có thể phân tích thành tổng trực tiếp của các không gian con 1 chiều hoặc 2 chiều bất biến đối với φ và đôi một trực giao với nhau.*

Từ sự phân tích thành các không gian bất biến ở trên, nếu lấy cơ sở trực chuẩn từ các vectơ thuộc các không gian con bất biến này thì ma trận của phép biến đổi trực giao sẽ có dạng đặc biệt. Cụ thể ta có

Định lý 2.1.4.7. *Cho biến đổi trực giao $\varphi : \mathbf{V}^n \to \mathbf{V}^n$. Khi đó tồn tại cơ sở trực chuẩn để ma trận của φ đối với nó có dạng*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_k & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & B_1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & B_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & B_l \end{bmatrix}$$

trong đó $A_1, \dots, A_k$ là các ma trận trực giao cấp 1 nằm trên đường chéo, tức $A_i = \pm 1$, $B_1, \dots, B_l$ là các ma trận trực giao cấp 2 nằm trên đường chéo, tức B_i có dạng

$$B_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, l.$$

A được gọi là ma trận có dạng chính tắc của φ.

Chứng minh. Theo Định lý 2.1.4.6, không gian $\mathbf{V}^n$ phân tích được thành tổng các không gian con bất biến đôi một vuông góc 1 chiều $V_1, \dots, V_k$ và 2 chiều $W_1, \dots, W_l$. Xét cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{V}^n$ lập nên từ các cơ sở trực chuẩn của các không gian $V_1, \dots, V_k, W_1, \dots, W_l$. Ma trận của φ trên V_i là ± 1. Ma trận của φ trên W_i là ma trận trực giao cấp 2, do đó có dạng B_i ở trên. Suy ra ma trận của φ đối với cơ sở được xét trên $\mathbf{V}^n$ có dạng nói trong định lý. □

2.1.5 *Tự đồng cấu đối xứng và chéo hóa trực giao*

Định nghĩa 2.1.5.1. Cho không gian vectơ Euclid $\mathbf{V}$, ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ thỏa mãn $\varphi(u) \cdot v = u \cdot \varphi(v)$ với mọi $u, v \in \mathbf{V}$ được gọi là tự đồng cấu đối xứng trên $\mathbf{V}$. Tự đồng cấu đối xứng φ trên $\mathbf{V}$ xác định dạng song tuyến tính đối xứng f trên $\mathbf{V}$ cho bởi $f(u, v) = u \cdot \varphi(v)$, được gọi là dạng song tuyến tính đối xứng liên kết với φ.

Ta thấy rằng ma trận của tự đồng cấu đối xứng đối với một cơ sở trực chuẩn là ma trận đối xứng. Ngược lại, cho trước cơ sở trực chuẩn, ta thấy mỗi ma trận đối xứng A xác định một tự đồng cấu đối xứng (và do đó xác định một dạng song tuyến tính đối xứng liên kết) nhận A là ma trận của nó đối với cơ sở đã cho.

Dễ dàng chứng minh được kết quả sau.

Định lý 2.1.5.2. *Ma trận của tự đồng cấu đối xứng và ma trận của dạng song tuyến tính liên kết đối với một cơ sở trực chuẩn là trùng nhau.*

Kết quả quan trọng sau đây nói về dạng đơn giản của ma trận của một tự đồng cấu đối xứng.

Định lý 2.1.5.3. [1] *Tồn tại cơ sở trực chuẩn để ma trận của tự đồng cấu đối xứng đối với cơ sở đó là ma trận chéo.*

Chúng ta biết rằng, nếu ma trận của một tự đồng cấu đối với một cơ sở là A, ma trận chuyển từ cơ sở này sang một cơ sở thứ hai là P thì ma trận của tự đồng cấu đối với cơ sở thứ hai là $P^{-1}AP$. Do đó, theo định lý trên, nếu A là ma trận của tự đồng cấu đối xứng đối với một cơ sở trực chuẩn thì tồn tại cơ sở trực chuẩn, có ma trận chuyển từ cơ sở ban đầu sang cơ sở mới là P để $P^{-1}AP$ là một ma trận chéo.

Khi đó ta còn nói chéo hoá trực giao A nhờ ma trận trực giao P. Từ Định lý 2.1.5.3 cũng cho thấy tự đồng cấu đối xứng trên không gian n chiều có n giá trị riêng thực (có thể trùng nhau). Dưới đây ta có thêm một đặc trưng của tự đồng cấu đối xứng.

Bổ đề 2.1.5.4. *Hai vectơ riêng tương ứng với hai giá trị riêng khác nhau của một tự đồng cấu đối xứng là trực giao.*

Chứng minh. Giả sử u, v là hai vectơ riêng tương ứng với hai giá trị riêng khác nhau k, l của toán tử đối xứng A. Ta có $ku.v = Au.v =$

[1] R. Kaye, R. Wilson (1998), *Linear Algebra.* Oxford University Press.

$u.Av = lu.v$, suy ra $(k-l)u.v = 0$. Vì $k-l$ khác 0 suy ra $u.v = 0$, tức u, v trực giao. $\square$

2.2 Không gian Euclid

2.2.1 *Định nghĩa không gian Euclid*

Định nghĩa 2.2.1.1. Không gian afin được gọi là không gian Euclid nếu không gian vectơ liên kết là không gian vectơ Euclid hữu hạn chiều.

Không gian Euclid được gọi là n chiều nếu không gian vectơ Euclid liên kết là n chiều.

Không gian Euclid thường được ký hiệu là $\mathbf{E}$, không gian vectơ Euclid liên kết với nó được ký hiệu $\mathbf{V_E}$ hoặc $\overrightarrow{\mathbf{E}}$. Đôi lúc để nhấn mạnh số chiều ta còn ký hiệu là $\mathbf{E}^n$ và $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$.

Ví dụ 2.2.1.2. 1) Mặt phẳng (không gian 2 chiều thông thường) được học ở trường phổ thông là không gian Euclid 2 chiều. Không gian vectơ liên kết của nó là không gian các vectơ tự do trong mặt phẳng với tích vô hướng thông thường.

2) Không gian 3 chiều thông thường được học ở trường phổ thông là không gian Euclid 3 chiều. Không gian vectơ liên kết của nó là không gian các vectơ tự do trong không gian với tích vô hướng thông thường.

3) Không gian vectơ Euclid $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$ là không gian Euclid n chiều liên kết với chính nó với cấu trúc afin chính tắc.

4) Xét phẳng α trong không gian $\mathbf{E}^n$. Khi đó α là không gian afin liên kết với không gian phương $\overrightarrow{\alpha}$. Vì $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\mathbf{E}^n}$ nên $\overrightarrow{\alpha}$ là không gian vectơ Euclid với tích vô hướng cảm sinh, do đó phẳng α cũng là không gian Euclid.

Nhận xét 2.2.1.3. Không gian Euclid cũng là một không gian afin nên nó có mọi tính chất của không gian afin.

2.2.2 *Mục tiêu và tọa độ trực chuẩn*

Định nghĩa 2.2.2.1. Cho $\mathbf{E}^n$ là không gian Euclid n chiều. Mục tiêu afin $\{O; \vec{e}_i\}$ của $\mathbf{E}^n$ được gọi là mục tiêu trực chuẩn nếu cơ sở nền $\{\vec{e}_i\}$ là cơ sở trực chuẩn của $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$. Tọa độ của điểm đối với mục tiêu trực chuẩn được gọi là tọa độ trực chuẩn.

Ví dụ 2.2.2.2. Xét không gian $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc và cấu trúc afin chính tắc. Mục tiêu afin $\{O; \vec{e}_i\}$ của không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ với điểm $O(0, 0, \ldots, 0)$ và $\{\vec{e}_i\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$, là mục tiêu trực chuẩn.

Nhận xét 2.2.2.3. Trong $\mathbf{E}^n$ xét công thức đổi mục tiêu từ mục tiêu trực chuẩn $\{O; \vec{e}_i\}$ sang mục tiêu trực chuẩn $\{O'; \vec{e'}_i\}$:

$$[x] = A[x'] + [a]. \tag{2.3}$$

Do A là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở trực chuẩn $\{\vec{e}_i\}$ sang cơ sở trực chuẩn $\{\vec{e'}_i\}$ nên A là ma trận trực giao.

Ngược lại, mỗi công thức dạng (2.3) với A là ma trận trực giao, là công thức đổi mục tiêu từ một mục tiêu trực chuẩn sang một mục tiêu trực chuẩn khác.

2.2.3 *Các phẳng trực giao, bù trực giao*

Định nghĩa 2.2.3.1. Trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ cho phẳng α có phương $\overrightarrow{\alpha}$ và phẳng β có phương $\overrightarrow{\beta}$. Khi đó:

+ Hai phẳng α và β được gọi là trực giao (vuông góc), ký hiệu $\alpha \perp \beta$, nếu hai không gian vectơ $\overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{\beta}$ trực giao.

+ Hai phẳng α và β được gọi là bù trực giao (bù vuông góc) nếu hai không gian vectơ $\overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{\beta}$ bù trực giao trong $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$.

Ví dụ 2.2.3.2. 1) Mỗi điểm ($0-$phẳng) trực giao với mọi phẳng trong $\mathbf{E}^n$.

2) Hai đường thẳng vuông góc trong mặt phẳng (hoặc trong không gian) trong chương trình hình học phổ thông là hai phẳng trực giao với nhau.

3) Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng trong không gian trong chương trình hình học phổ thông là hai phẳng bù trực giao.

Nhận xét 2.2.3.3. Hai phẳng α và β trong không gian $\mathbf{E}^n$ trực giao khi và chỉ khi hai không gian vectơ $\overrightarrow{\alpha}$ và $\overrightarrow{\beta}$ trực giao, nên $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \{\vec{0}\}$. Suy ra $n \geq \dim(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) = \dim\overrightarrow{\alpha} + \dim\overrightarrow{\beta} = \dim(\alpha) + \dim(\beta)$. Do đó nếu $\dim(\alpha) + \dim(\beta) > \mathrm{n}$ thì α và β không trực giao. Điều này cho thấy hai mặt phẳng trong không gian 3 chiều không trực giao với nhau.

Định lý 2.2.3.4. *Hai phẳng trực giao có không quá một điểm chung. Hai phẳng bù trực giao có một điểm chung duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử hai phẳng α và β trực giao. Nếu có hai điểm $M, N \in \alpha \cap \beta$ thì ta có $\overrightarrow{MN} \in \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}$. Suy ra $\overrightarrow{MN} \in \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{MN} \in \overrightarrow{\beta}$ do đó $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. Suy ra $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$, do đó $M \equiv N$.

Nếu α và β bù trực giao thì $\overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\mathbf{E}^n}$. Do đó nếu $\alpha \cap \beta = \emptyset$ thì theo Định lý 1.1.4.11 ta có:

$$\begin{aligned} \dim(\alpha + \beta) &= \dim\alpha + \dim\beta - \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) + 1 \\ &= \dim(\overrightarrow{\alpha}) + \dim(\overrightarrow{\beta}) + 1 = \mathrm{n} + 1. \end{aligned}$$

Điều này vô lý. Kết hợp với ý đầu suy ra α và β có điểm chung duy nhất. □

Bởi vì hai phẳng trực bù giao có giao khác rỗng, sử dụng công thức về chiều của phẳng tổng, ta có

Hệ quả 2.2.3.5. *Nếu α và β bù trực giao trong $\mathbf{E}^n$ thì $\mathbf{E}^n = \alpha + \beta$.*

Định lý 2.2.3.6. *Nếu α trực giao với β và γ bù trực giao với β thì α và γ là hai phẳng song song.*

Chứng minh. Gọi $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ lần lượt là phương của các phẳng α, β và γ. Vì $\overrightarrow{\alpha}$ trực giao với $\overrightarrow{\beta}$ và $\overrightarrow{\gamma}$ bù trực giao với $\overrightarrow{\beta}$ nên $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\gamma}$. Vậy α song song với γ. □

Hệ quả 2.2.3.7. *Hai phẳng cùng bù trực giao với phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau và có cùng số chiều.*

2.2.4 *Khoảng cách giữa các phẳng*

a) Khoảng cách và đường vuông góc chung

Định nghĩa 2.2.4.1. Cho hai điểm M, N trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$. Khoảng cách giữa hai điểm M, N, ký hiệu $d(M, N)$, được định nghĩa bởi:

$$d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2}. \tag{2.4}$$

Khoảng cách giữa hai phẳng α và β trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$, ký hiệu $d(\alpha, \beta)$, được định nghĩa bởi:

$$d(\alpha, \beta) = \inf_{\substack{M \in \alpha \\ N \in \beta}} d(M, N). \tag{2.5}$$

Nhận xét 2.2.4.2. $\inf_{\substack{M \in \alpha \\ N \in \beta}} d(M, N)$ luôn tồn tại vì tập $\{d(M, N) : M \in \alpha, N \in \beta\}$ khác rỗng và bị chặn dưới bởi 0.

Từ định nghĩa trên và từ các tính chất về độ dài của vectơ, ta có các tính chất sau.

Tính chất 2.2.4.3. *i)* $d(M, N) = d(N, M), \forall M, N \in \mathbf{E}^n$.

ii) $d(M, N) \geq 0$ *và* $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M \equiv N$.

iii) $d(M, N) + d(N, P) \geq d(M, P)$ *với ba điểm bất kì* $M, N, P \in \mathbf{E}^n$.

iv) Nếu M, N, P *là ba điểm phân biệt thì điểm* N *thuộc đoạn thẳng* MP *khi và chỉ khi* $d(M, N) + d(N, P) = d(M, P)$.

v) Nếu $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ *thì* $d(\alpha, \beta) = 0$.

Để xác định khoảng cách giữa hai phẳng chúng ta cần đến khái niệm sau.

Định nghĩa 2.2.4.4. Đường thẳng Δ được gọi là đường vuông góc chung của hai phẳng α và β nếu Δ trực giao với α và β, đồng thời Δ cắt α và β.

Định lý 2.2.4.5. *Nếu Δ là đường vuông góc chung của hai phẳng α và β, giao điểm của Δ với α và β lần lượt là I và J thì*

$$d(\alpha, \beta) = d(I, J).$$

Chứng minh. Với mọi $M \in \alpha, N \in \beta$, ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN}.$$

Suy ra

$$\|\overrightarrow{MN}\|^2 = \|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JN}\|^2 = \|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{JN}\|^2+\|\overrightarrow{IJ}\|^2+2\overrightarrow{IJ}\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{JN}).$$

Vì $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MI} = 0, \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{JN} = 0$ nên

$$\|\overrightarrow{MN}\|^2 = \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN}\|^2 + \|\overrightarrow{IJ}\|^2.$$

Hay

$$\|\overrightarrow{MN}\|^2 \geq \|\overrightarrow{IJ}\|^2.$$

Vậy $d(M, N) \geq d(I, J), \forall M \in \alpha, \forall N \in \beta$. Tức là $d(\alpha, \beta) = d(I, J)$.

□

Định lý 2.2.4.6. *Nếu $\alpha \cap \beta = \emptyset$ thì luôn tồn tại đường vuông góc chung của α và β. Đường vuông góc chung là duy nhất khi và chỉ khi $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \{\vec{0}\}$.*

Chứng minh. + Từ giả thiết $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ta suy ra $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} \neq \overrightarrow{\mathbf{E}^n}$. Thật vậy, nếu $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\mathbf{E}^n}$, khi đó với mọi $A \in \alpha, B \in \beta$ ta có:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{E}^n} \ni \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} \in \overrightarrow{\alpha}, \vec{y} \in \overrightarrow{\beta} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists M \in \alpha, \forall N \in \beta : \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NB} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists M \in \alpha, \forall N \in \beta : \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NB} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists M \in \alpha, \forall N \in \beta : \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NB} \ (M \equiv N).
\end{aligned}$$

Tức là $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ (vô lý). Vậy $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} \neq \overrightarrow{\mathbf{E}^n}$.

Vì $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} \neq \overrightarrow{\mathbf{E}^n}$ nên tồn tại duy nhất không gian vectơ con $\overrightarrow{\gamma}$ bù trực giao với $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$. Lấy $P \in \alpha, Q \in \beta$, ta có phân tích duy nhất: $\overrightarrow{PQ} = \vec{u} + \vec{v}$, với $\vec{u} \in \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}, \vec{v} \in \overrightarrow{\gamma}$. Do $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ nên tồn tại $\vec{a} \in \overrightarrow{\alpha}, \vec{b} \in \overrightarrow{\beta}$ sao cho $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$. Khi đó tồn tại duy nhất điểm $A \in \alpha, B \in \beta$ sao cho $\overrightarrow{PA} = \vec{a}, \overrightarrow{BQ} = \vec{b}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{AB} \\ &= \vec{u} + \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ $\overrightarrow{AB} = \vec{v} \in \overrightarrow{\gamma}$. Do $A \in \alpha, B \in \beta$ và $\alpha \cap \beta = \emptyset$ nên suy ra $A \neq B$. Vậy đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B là đường vuông góc chung của α và β.

$+$ Giả sử Δ' cũng là đường vuông góc chung của α và β, Δ' cắt α và β lần lượt tại I' và J'. Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'J'} + \overrightarrow{J'J} \\ &= \left(\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{J'J}\right) + \overrightarrow{I'J'} \\ \Rightarrow \|\overrightarrow{IJ}\|^2 &= \left\|\overrightarrow{I'J'}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{J'J}\right\|^2 \end{aligned}$$

(do $\left(\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{J'J}\right) \cdot \overrightarrow{I'J'} = 0$). Ta lại có $d(\alpha, \beta) = \|\overrightarrow{IJ}\|$ và $d(\alpha, \beta) = \left\|\overrightarrow{I'J'}\right\|$, do đó $\left\|\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{J'J}\right\|^2 = 0$ hay $\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{J'J} = \overrightarrow{0}$, tức là $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{JJ'}$. Suy ra $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{JJ'} \in \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}$. Vậy Δ trùng với Δ' khi và chỉ khi $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \{\vec{0}\}$. □

Từ hai định lý trên ta có các hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.4.7. *Với điểm $A \notin \alpha$, có duy nhất điểm $H \in \alpha$ sao cho đường thẳng $AH \perp \alpha$ và khi đó $d(A, H) = d(A, \alpha)$. Ta gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên α.*

Hệ quả 2.2.4.8. *Nếu α và β là hai phẳng song song và $\overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\beta}$ thì mọi đường thẳng đi qua $A \in \alpha$, trực giao với β và cắt β, là đường* *vuông góc chung của α và β. Như vậy ta có $d(\alpha,\beta) = d(A,\beta)$, với mọi $A \in \alpha$.*

b) Cách tính khoảng cách

Định nghĩa 2.2.4.9. [Định thức Gram] Trong không gian vectơ Euclid $\overrightarrow{\mathbf{E}}^n$ cho hệ vectơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$. Ký hiệu

$$\operatorname{Gr}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m) = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_m \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vec{u}_m \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_m \cdot \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_m \cdot \vec{u}_m \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

và được gọi là định thức Gram của hệ vectơ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$.

Bổ đề 2.2.4.10. *Định thức Gram của hệ vectơ luôn không âm. Định thức Gram của hệ vectơ bằng 0 khi và chỉ khi hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính.*

Chứng minh. Gọi $\mathbf{W}$ là không gian vectơ con m chiều của $\mathbf{V}^n$ và $\mathbf{W}$ chứa $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$. Gọi $\varepsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbf{W}$.

Giả sử $\vec{u}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})$ là tọa độ của $\vec{u}_i$ đối với cơ sở ε.

Ký hiệu $A = (a_{ij})\,, i, j = 1, 2, \ldots, m$. Để ý rằng $\vec{u}_i.\vec{u}_j = \sum_{r=1}^{m} a_{ri}a_{rj}$ $= (A^TA)_{ij}$ (phần tử ở hàng i, cột j của ma trận A^TA).

Do đó:

$$\begin{aligned} \operatorname{Gr}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m) &= \begin{vmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_m \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vec{u}_m \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_m \cdot \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_m \cdot \vec{u}_m \end{vmatrix} \\ &= \det\left(A^T \cdot A\right) = (\det A)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Hệ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $\det A = 0$ hay $(\det A)^2 = 0$, tức là $\operatorname{Gr}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m) = 0$. □

Định lý 2.2.4.11. *Cho các phẳng α và $\beta, \alpha \cap \beta = \emptyset$, trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$. Giả sử $M \in \alpha, N \in \beta$ và $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ là một cơ* *sở của $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$. Khi đó*

$$d(\alpha,\beta) = \sqrt{\frac{\mathrm{Gr}\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m,\overrightarrow{MN}\right)}{\mathrm{Gr}\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m\right)}}.$$

Chứng minh. Gọi AB là đường vuông góc chung của α và $\beta, A \in \alpha, B \in \beta$. Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}.$$

Do $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BN}) \perp \overrightarrow{AB}$ nên $\mathrm{Gr}\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m,\overrightarrow{MN}\right) =$
$= \mathrm{Gr}\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BN}\right) + \mathrm{Gr}\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m,\overrightarrow{AB}\right).$

Chú ý rằng $\mathrm{Gr}\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BN}\right) = 0$, nên cuối cùng ta có $\mathrm{Gr}\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m,\overrightarrow{MN}\right) =$
$= \mathrm{Gr}\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m,\overrightarrow{AB}\right) = \|\overrightarrow{AB}\|^2\mathrm{Gr}\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m\right).$
Do đó:

$$d(\alpha,\beta) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\frac{Gr\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m,\overrightarrow{MN}\right)}{Gr\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m\right)}}.$$

□

Nhận xét 2.2.4.12. Từ công thức trên suy ra:

i) Khoảng cách từ một điểm I đến $m-$phẳng α với $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m$ là cơ sở tùy ý của $\overrightarrow{\alpha}$ là

$$d(I,\alpha) = \sqrt{\frac{Gr\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m,\overrightarrow{IJ}\right)}{\mathrm{Gr}\left(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_m\right)}},$$

trong đó J là một điểm bất kỳ thuộc α.

ii) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b trong không gian 3 chiều là

$$d(a,b) = \sqrt{\frac{\mathrm{Gr}(\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{IJ})}{\mathrm{Gr}(\vec{a},\vec{b})}},$$

trong đó $\vec{a},\vec{b}$ là vectơ chỉ phương tương ứng của a, b và $I \in a, J \in b$.

Ví dụ 2.2.4.13. Trong $\mathbf{E}^3$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho các đường thẳng a, a' có phương trình

$$a : \begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = 2 + 3t \end{cases} ; \ a' : \begin{cases} x_1 = -1 + 3t \\ x_2 = 2 - t \\ x_3 = -2 + t \end{cases} .$$

Chứng minh các đường thẳng a và a' chéo nhau. Tính khoảng cách giữa a và a'.

Giải. Ta có $I(1,0,2) \in a; J = (-1,2,-2) \in a'$. Các vectơ chỉ phương của a, a' tương ứng là $\vec{u}(2,-2,3)$, $\vec{u'}(3,-1,1)$. Vì hệ 3 vectơ $\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{IJ}$ độc lập tuyến tính nên a, a' chéo nhau. Khoảng cách của a và a' là

$$d(a,a') = \sqrt{\dfrac{\begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}.\vec{u'} & \vec{u}.\overrightarrow{IJ} \\ \vec{u}.\vec{u'} & \vec{u'}^2 & \vec{u'}.\overrightarrow{IJ} \\ \vec{u}.\overrightarrow{IJ} & \vec{u'}.\overrightarrow{IJ} & \overrightarrow{IJ}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u}.\vec{u'} \\ \vec{u}.\vec{u'} & \vec{u'}^2 \end{vmatrix}}} = \sqrt{\dfrac{\begin{vmatrix} 17 & 11 & -20 \\ 11 & 11 & -12 \\ -20 & -12 & 24 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 17 & 11 \\ 11 & 11 \end{vmatrix}}} = \sqrt{\frac{8}{33}}.$$

c) Khoảng cách từ một điểm đến một siêu phẳng

Trong mục này, chúng ta xét trường hợp đặc biệt, đó là khoảng cách giữa một điểm và một siêu phẳng, ngoài cách xác định khoảng cách của hai phẳng tổng quát nói ở trên, trong trường hợp này ta có cách tính đơn giản hơn dưới đây.

Trong $\mathbf{E}^n$ cho siêu phẳng α, giả sử α có phương trình tổng quát đối với một mục tiêu trực chuẩn là:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0. \tag{2.7}$$

Khi đó dễ dàng thấy rằng $\vec{n}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là vectơ pháp tuyến của α $(\vec{n} \perp \vec{\alpha})$. Giả sử $M\,(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbf{E}^n$. Ta hãy tính $d(M, \alpha)$. Gọi H là hình chiếu của M lên α ($H \in \alpha, MH$ bù trực giao với α). Suy ra $\overrightarrow{HM} = t\vec{n}$. Ta có:

$$d(M,\alpha) = \|\overrightarrow{MH}\| = \|t\vec{n}\| = |t|\|\vec{n}\|.$$

Do $\overrightarrow{HM} = t\vec{n}$ suy ra H có tọa độ $(x_1^0 - ta_1, x_2^0 - ta_2, \dots, x_n^0 - ta_n)$. Do $H \in \alpha$ nên

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(x_i^0 - ta_i\right) + a = 0,$$

hay

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^0 + a = \sum_{i=1}^{n} t\left(a_i^2\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^0 + a = t\|\vec{n}\|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^0 + a = (t\|\vec{n}\|)\|\vec{n}\| \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^0 + a = \pm d(M,\alpha)\|\vec{n}\|.
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra:

$$d(M,\alpha) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^0 + a\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^0 + a\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.$$

Nhận xét 2.2.4.14. i) Trong $\mathbf{E}^2$ cho đường thẳng Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ và $M\left(x_0, y_0\right)$. Khi đó

$$d(M,\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

là công thức quen thuộc của hình học giải tích trong mặt phẳng.

ii) Trong $\mathbf{E}^3$ cho mặt phẳng α có phương trình $ax+by+cz+d = 0$ và $M\left(x_0, y_0, z_0\right)$. Khi đó

$$d(M,\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

là công thức quen thuộc của hình học giải tích trong không gian.

2.2.5 *Góc trong không gian Euclid*

a) Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ có các vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là số $\theta, 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, xác định bởi:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}.$$

Nhận xét 2.2.5.1. i) Định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn các vectơ chỉ phương của đường thẳng d_1 và d_2.

ii) Nếu $d_1 \parallel d_2$ thì $\theta = 0$.

iii) Nếu $d_1 \perp d_2$ thì $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

iv) Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai vectơ chỉ phương khi góc giữa hai vectơ là góc nhọn và bù với góc giữa hai vectơ chỉ phương khi góc giữa hai vectơ là góc tù.

b) Góc giữa hai siêu phẳng

Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai siêu phẳng α và β. Lấy hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt trực giao với α và β. Khi đó góc giữa hai siêu phẳng α và β được định nghĩa là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.

Nhận xét 2.2.5.2. Định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn hai đường thẳng d_1 và d_2 tương ứng trực giao với α và β.

c) Góc giữa đường thẳng và siêu phẳng

Trong $\mathbf{E}^n$ cho đường thẳng d và siêu phẳng α, lấy d' trực giao với α và xác định góc θ' giữa hai đường thẳng d và d'. Khi đó góc giữa đường thẳng d và siêu phẳng α được xác định là góc θ mà $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \theta'$. Khi đường thẳng d trực giao với siêu phẳng α ta có $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Chú ý 2.2.5.3. Nếu $\vec{u}$ là phương của d và $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của α thì:

$$\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) = \cos\theta' = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{n}\|}.$$

2.2.6 *Thể tích trong không gian Euclid*

a) Thể tích của hình hộp

Cho $m-$hộp $\mathbf{H}$ xác định bởi $m+1$ điểm độc lập $P_0, P_1, \ldots, P_m$. Đặt $\overrightarrow{P_0P_i} = \vec{u}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Thể tích của $m-$hộp $\mathbf{H}$, ký hiệu $V(\mathbf{H})$, được định nghĩa:

$$V(\mathbf{H}) = \sqrt{Gr\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right)}.$$

Khi $m = 1$, hộp $\mathbf{H}$ là đoạn thẳng P_0P_1, khi đó

$$V(\mathbf{H}) = \sqrt{Gr\left(\vec{u}_1\right)} = \|\vec{u}_1\| = \left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\| = d\left(P_0, P_1\right).$$

Trong trường hợp này thể tích đoạn thẳng còn được gọi là độ dài đoạn thẳng.

Khi $m = 2$, thể tích $2-$hộp còn được gọi là diện tích.

Cho $m-$hộp $\mathbf{H}$ xác định bởi $m+1$ điểm độc lập $P_0, P_1, \ldots, P_m$. Gọi $(m-1)-$hộp $\mathbf{H}'$ xác định bởi m điểm độc lập $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ là đáy của hộp $\mathbf{H}$ ứng với đỉnh P_m. Gọi khoảng cách từ đỉnh P_m tới $(m-1)-$hộp $\mathbf{H}'$ là chiều cao của hộp $\mathbf{H}$ ứng với đáy $\mathbf{H}'$, ký hiệu h.

Định lý 2.2.6.1. *Với ký hiệu ở trên ta có:* $V(\mathbf{H}) = V\left(\mathbf{H}'\right) \cdot h$.

Chứng minh. Gọi I là hình chiếu của P_m lên $(m-1)-$phẳng chứa $\mathbf{H}'$. Ta có

$$\vec{u}_m = \overrightarrow{P_0P_m} = \overrightarrow{P_0I} + \overrightarrow{IP}_m.$$

Do đó: $\mathrm{Gr}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\right) = \mathrm{Gr}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \overrightarrow{P_0I} + \overrightarrow{IP}_m\right) =$

$= \mathrm{Gr}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m-1}, \overrightarrow{IP}_m\right)$ (vì $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m-1}, \overrightarrow{P_0I}$ là hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính).

$$= \mathrm{Gr}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{m-1}\right) \cdot \overrightarrow{IP}_m^2 \left(\text{ vì } \overrightarrow{IP}_m \perp \vec{u}_i, \forall i = 1, 2, \ldots, m-1\right).$$

Từ đó suy ra:

$$V(\mathbf{H}) = V\left(\mathbf{H}'\right) \cdot d\left(I, P_m\right),$$

hay

$$V(\mathbf{H}) = V(\mathbf{H}') \cdot h.$$

$\square$

Nhận xét 2.2.6.2. Xét $m-$hộp $\mathbf{H}$ xác định bởi các $m+1$ điểm độc lập $P_0, P_1, \ldots, P_m$. Từ định nghĩa thể tích hình hộp và phép chứng minh của Bổ đề 2.2.4.10 ta có nhận xét sau:

+ Khi $\vec{u}_i = \overrightarrow{P_0P_i}, i = 1, \ldots, m$ là một hệ trực giao thì

$$V(\mathbf{H}) = \sqrt{\mathrm{Gr}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)} = \|\vec{u}_1\|\|\vec{u}_2\| \ldots \|\vec{u}_m\|.$$

+ Gọi A là ma trận tọa độ của hệ vectơ $\vec{u}_i = \overrightarrow{P_0P_i}, i = 1, \ldots, m$, đối với một cơ sở trực chuẩn trong không gian m chiều sinh bởi $\{\vec{u}_i, i = 1, \ldots, m\}$. Ta có

$$V(\mathbf{H}) = |\det(A)|.$$

b) Thể tích của đơn hình

Cho $m-$đơn hình $\mathcal{S}$ xác định bởi $m+1$ điểm độc lập $P_0, P_1, \ldots, P_m$. Thể tích của $m-$đơn hình $\mathcal{S}$, ký hiệu $V(\mathcal{S})$, được định nghĩa:

$$V(\mathcal{S}) = \frac{1}{m!} V(\mathbf{H}),$$

trong đó $\mathbf{H}$ là hình hộp xác định bởi $m+1$ điểm độc lập $P_0, P_1, \ldots, P_m$.

Chiều cao của đơn hình $\mathcal{S}$ từ đỉnh P_m tới đáy $\mathcal{S}'$, là $(m-1)-$đơn hình xác định bởi m điểm độc lập $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$, cũng là chiều cao của hình hộp $\mathbf{H}$ từ đỉnh P_m tới đáy. Khi đó ta có công thức

$$V(\mathcal{S}) = \frac{1}{m} V(\mathcal{S}') \cdot h.$$

Khi $m = 2, 3$ ta có các công thức quen thuộc về tính diện tích tam giác và thể tích tứ diện ở trường phổ thông.

Ví dụ 2.2.6.3. Trong không gian 3 chiều đã cho mục tiêu trực chuẩn, tính thể tích của tứ diện $ABCD$, trong đó $A = (1, 0, 1), B = (0, 2, 1), C = (3, -1, 2), D = (0, 2, 3)$.

Giải. Tứ diện là $3-$đơn hình có 4 đỉnh, là 4 điểm độc lập A, B, C, D. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0), \overrightarrow{AC} = (2, -1, 1), \overrightarrow{AD} = (-1, 2, 2)$ và $\overrightarrow{AB}^2 = 5, \overrightarrow{AC}^2 = 6, \overrightarrow{AD}^2 = 9, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -2$

$$\mathrm{Gr}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 56.$$

Thể tích của tứ diện ($3-$đơn hình) $ABCD$ là

$$V(ABCD) = \frac{1}{3!} \cdot \sqrt{Gr(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})} = \frac{1}{6}\sqrt{56}.$$

2.3 Ánh xạ đẳng cự, biến đổi đẳng cự

2.3.1 *Ánh xạ đẳng cự*

Định nghĩa 2.3.1.1. Ánh xạ $f : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ giữa các không gian Euclid $\mathbf{E}$ và $\mathbf{E}'$ được gọi là ánh xa đẳng cự nếu f là một ánh xạ afin có ánh xạ tuyến tính liên kết $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathbf{E}} \to \overrightarrow{\mathbf{E}'}$ là ánh xạ trực giao.

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra đối với mọi cặp điểm M, N thuộc $\mathbf{E}$ và ảnh của chúng $M' = f(M), N' = f(N)$ ta có $d(M, N) = d(M', N')$. Nói cách khác ánh xạ đẳng cự bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì. Ngược lại ta có:

Định lý 2.3.1.2. *Mọi ánh xạ $f : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ giữa các không gian Euclid có tính chất bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì (tức là $d(f(M), f(N)) = d(M, N)$ với mọi $M, N \in \mathbf{E}$) là ánh xạ đẳng cự.*

Chứng minh. Lấy điểm $I \in \mathbf{E}$, gọi $I' = f(I)$. Xét ánh xạ $\varphi : \overrightarrow{\mathbf{E}} \to \overrightarrow{\mathbf{E}'}$ xác định như sau: Giả sử $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathbf{E}}$ ta lấy điểm $M \in \mathbf{E}$ sao cho $\overrightarrow{IM} = \vec{u}$. Đặt $\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{I'M'}$ với $M' = f(M)$. Ta chứng minh φ bảo toàn tích vô hướng của hai vectơ bất kì. Lấy $\vec{v}$ bất kì thuộc $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ và lấy điểm $N \in \mathbf{E}$ sao cho $\overrightarrow{IN} = \vec{v}$, khi đó $\varphi(\vec{v}) = \overrightarrow{I'N}$ với $N' = f(N)$. Bởi vì

f bảo tồn khoảng cách giữa hai điểm nên $d(M,N) = d\left(M', N'\right)$. Do đó:

$$\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{M'N'}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM})^2 = \left(\overrightarrow{I'N'} - \overrightarrow{I'M'}\right)^2.$$

Cũng vì f bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm nên $\overrightarrow{IN}^2 = \overrightarrow{I'N'}^2$, $\overrightarrow{IM}^2 = \overrightarrow{I'M'}^2$ suy ra $\overrightarrow{I'N'}.\overrightarrow{I'M'} = \overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM}$ tức là $\varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$. Vì φ bảo toàn tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ bất kì, theo Định lý 2.1.4.3 ta có φ là ánh xạ trực giao và rõ ràng φ là ánh xạ liên kết của f. Vậy f là ánh xạ đẳng cự. □

Tính chất 2.3.1.3. *Ánh xạ đẳng cự bảo toàn số chiều của các phẳng, tính vuông góc của các phẳng, khoảng cách của các phẳng, góc giữa các đường thẳng.*

Việc chứng minh tính chất trên xem như bài tập.

2.3.2 *Biến đổi đẳng cự*

a) Phép đẳng cự, phép dời hình, phép phản dời hình

Định nghĩa 2.3.2.1. Ánh xạ đẳng cự $f : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ từ không gian Euclid $\mathbf{E}$ vào chính nó được gọi là phép biến đổi đẳng cự (hay phép đẳng cự) trên $\mathbf{E}$.

Nhận xét 2.3.2.2. i) Ánh xạ đẳng cự $f : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ là song ánh, do đó f là phép afin.

ii) Tập hợp các phép đẳng cự của $\mathbf{E}^n$ lập thành một nhóm, là nhóm con của nhóm các phép afin của $\mathbf{E}^n$, ký hiệu $\mathrm{Isom}\left(\mathbf{E}^n\right)$.

Trong $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, giả sử phép biến đổi afin $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ có phương trình là:

$$[x'] = A[x] + [b].$$

Khi đó A là ma trận của phép đẳng cấu tuyến tính $\overrightarrow{f}$ (liên kết với f) đối với cơ sở trực chuẩn $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$. Do đó f là phép biến đổi đẳng cự khi và chỉ khi A là ma trận trực giao, tức là $AA^T = I_n$. Vì A là ma trận trực giao nên $\det A = \pm 1$.

Định nghĩa 2.3.2.3. Giả sử A là ma trận của phép đẳng cấu tuyến tính $\overrightarrow{f}$ (liên kết với phép đẳng cự f) đối với một cơ sở trực chuẩn. Nếu $\det(A) = 1$ thì f được gọi là phép dời hình (hay phép dời). Nếu $\det(A) = -1$ thì f được gọi là phép phản dời hình (hay phép phản chiếu).

Tập hợp các phép dời hình trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ làm thành một nhóm, là nhóm con của nhóm đẳng cự, được gọi là nhóm dời hình và ký hiệu là $Isom^+(\mathbf{E}^n)$.

b) Phép đối xứng qua $m-$phẳng

Định nghĩa 2.3.2.4. Cho $m-$phẳng α có phương $\overrightarrow{\alpha}$ trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$. Với điểm $M \in \mathbf{E}^n$ ta dựng phẳng β qua M và bù vuông góc với α. Khi đó β là duy nhất, $\dim\beta = n-m$ và $\beta\cap\alpha = \{I\}$. Lấy $M' \in \mathbf{E}^n$ sao cho: $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$. Khi đó ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \mathbf{E}^n &\to \mathbf{E}^n \\ M &\mapsto f(M) = M' \end{aligned}$$

được gọi là phép đối xứng qua $m-$phẳng α.

Ví dụ. Phép đối xứng qua đường thẳng trong $\mathbf{E}^2$, phép đối xứng qua mặt phẳng trong $\mathbf{E}^3$.

Định lý 2.3.2.5. *i) Phép đối xứng là phép đẳng cự.*

ii) Phép đối xứng qua $m-$phẳng α trong $\mathbf{E}^n$ là phép dời hình nếu $n-m$ chẵn, là phép phản dời hình nếu $n-m$ lẻ.

Chứng minh. i) Xét ánh xạ $\varphi : \overrightarrow{\mathbf{E}} = \overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\alpha}^{\perp} \to \overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\alpha}^{\perp}$, $\vec{u}+\vec{v} \mapsto \vec{u}-\vec{v}$. Dễ thấy rằng φ là ánh xạ tuyến tính và bảo toàn tích vô hướng, tức φ là ánh xạ trực giao. Ta chứng minh φ là ánh xạ liên kết của phép đối xứng f qua $m-$phẳng α. Thật vậy, giả sử M, N là hai điểm bất kỳ trong không gian $\mathbf{E}$ có ảnh qua phép đối xứng f là M', N'. Gọi H, K tương ứng là trung điểm của MM' và NN' $(H, K \in \alpha)$. Ta có $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{M'N'} = \left(\overrightarrow{M'H} + \overrightarrow{KN'}\right) + \overrightarrow{HK} =$

$= \varphi(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{HK}) = \varphi(\overrightarrow{MN})$.

Tức f là ánh xạ afin nhận φ là ánh xạ liên kết. Vậy f là phép đẳng cự.

ii) Xét cơ sở trực chuẩn $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m, \vec{e}_{m+1}, \ldots, \vec{e}_n$ trong đó

$$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m \in \overrightarrow{\alpha}, \vec{e}_{m+1}, \ldots, \vec{e}_n \in \overrightarrow{\alpha}^{\perp}.$$

Khi đó ảnh qua φ của cơ sở $\vec{e}_1$, ..., $\vec{e}_m$, $\vec{e}_{m+1}$, ..., $\vec{e}_n$ là $\vec{e}_1$, ..., $\vec{e}_m$, $-\vec{e}_{m+1}$, ..., $-\vec{e}_n$. Do vậy ma trận của φ đối với cơ sở $\vec{e}_1$, ..., $\vec{e}_m$, $\vec{e}_{m+1}$, ..., $\vec{e}_n$ là ma trận chéo có dạng

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix}$$

gồm m số 1 và $n-m$ số -1 trên đường chéo. Định thức của ma trận đó dương nếu $n-m$ chẵn, là âm nếu $n-m$ lẻ, tức phép đối xứng là dời hình nếu $n-m$ chẵn và phản dời hình nếu $n-m$ lẻ. □

Nhận xét 2.3.2.6. Nếu chọn mục tiêu $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ với $O \in \alpha$ và cơ sở $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ được lấy như trong định lý trên thì phương trình của phép đối xứng qua $m-$phẳng α là:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ \vdots \\ x'_m = \quad x_m \\ x'_{m+1} = \quad -x_{m+1} \\ \vdots \\ x'_n = \quad\quad -x_n \end{cases}.$$

Nhận xét 2.3.2.7. Theo định lý trên, ta có:

i) Phép đối xứng qua đường thẳng trong mặt phẳng $\mathbf{E}^2$ là phép phản dời hình;

ii) Phép đối xứng qua 1 điểm (tức $0-$phẳng) trong $\mathbf{E}^2$ là phép dời hình;

iii) Phép đối xứng qua mặt phẳng trong không gian $\mathbf{E}^3$ là phép phản dời hình;

iv) Phép đối xứng qua siêu phẳng là phép phản dời hình.

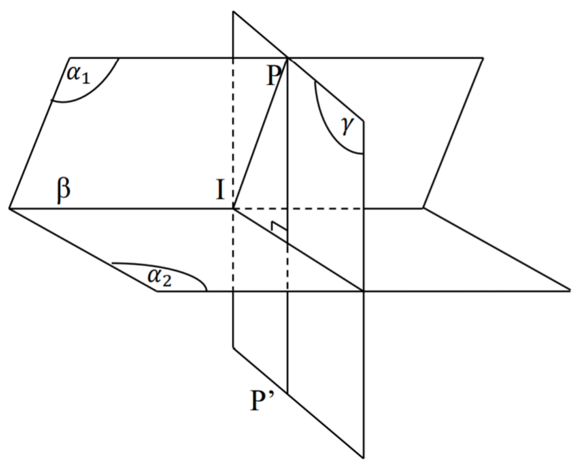
c) Phép quay quanh $(n-2)-$phẳng trong $\mathbf{E}^n$

Định nghĩa 2.3.2.8. Một phép dời trong $\mathbf{E}^n$ giữ nguyên mọi điểm của $(n-2)-$phẳng β được gọi là phép quay quanh β.

Nói riêng, trong $\mathbf{E}^2$ ta có phép quay quanh một điểm ($0-$phẳng); trong $\mathbf{E}^3$ ta có phép quay quanh một trục (phép quay quanh một đường thẳng).

Định lý 2.3.2.9. *i) Tích của hai phép đối xứng qua hai siêu phẳng cắt nhau là một phép quay.*

ii) Mỗi phép quay đều phân tích được thành tích của hai phép đối xứng qua hai siêu phẳng cắt nhau.



Hình 2.1

Chứng minh. i) Bởi vì tích của hai phép phản dời hình là phép dời hình và qua tích của hai phép đối xứng qua hai siêu phẳng, mọi điểm của $(n-2)-$phẳng giao được giữ nguyên nên tích của hai phép đối xứng qua hai siêu phẳng cắt nhau là một phép quay quanh $(n-2)-$phẳng.

ii) Giả sử f là phép quay quanh $(n-2)-$phẳng β (Hình 2.1). Lấy $P \notin \beta$ và $P' = f(P)$. Gọi α_1 là siêu phẳng đi qua β và P, α_2 là siêu phẳng trung trực của PP' (tức là α_2 là đi qua trung điểm của PP' và vuông góc với PP'). Với mọi điểm $I \in \beta$ ta có $f(I) = I$, suy ra $IP = IP'$, do đó $I \in \alpha_2$. Như vậy $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \beta$.

Goi g_1, g_2 lần lượt là các phép đối xứng qua α_1 và α_2 thì $g_2 \circ g_1$ biến mọi điểm của β thành chính nó và biến P thành P'. Gọi γ là $2-$phẳng đi qua P và trực giao với β thì $\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\beta}^{\perp}$ và các phép đẳng cự f, $g_2 \circ g_1$ đều giữ γ bất biến. Vì $f|_{\gamma}$ và $(g_2 \circ g_1)|_{\gamma}$ là phép quay trong $2-$phẳng γ quanh điểm $I = \beta \cap \gamma$ có $f(P) = g_2 \circ g_1(P) = P'$ nên $f|_{\gamma} = (g_2 \circ g_1)|_{\gamma}$. Do đó tồn tại mục tiêu trong không gian mà ảnh của chúng qua f và $g_2 \circ g_1$ là như nhau. Từ đó suy ra $f = g_2 \circ g_1$. $\square$

d) Điểm bất động và vectơ bất động của phép đẳng cự

Định nghĩa 2.3.2.10. Cho ánh xạ đẳng cự $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ có ánh xạ liên kết $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathbf{E}^n} \to \overrightarrow{\mathbf{E}^n}$. Điểm M được gọi là điểm bất động (hay điểm kép) của f nếu $f(M) = M$. Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ bất động của $\overrightarrow{f}$ nếu $\overrightarrow{f}(\vec{u}) = \vec{u}$.

Ký hiệu $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f}) = \left\{\vec{u} \in \overrightarrow{\mathbf{E}^n} \mid \overrightarrow{f}(\vec{u}) = \vec{u}\right\} = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{\mathbf{E}}^n})$.

$$\mathrm{Inv}(f) = \{M \in \mathbf{E}^n \mid f(M) = M\}.$$

Nhận xét 2.3.2.11. $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ là một không gian con của $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$.

Định lý 2.3.2.12. *Cho $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ là biến đổi đẳng cự trên không gian Euclid $\mathbf{E}^n$. Khi đó:*

i) Nếu Inv(f) $\neq \emptyset$ *thì nó là cái phẳng có phương* $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$.

ii) Nếu $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f}) = \{\vec{0}\}$ *thì f có điểm bất động duy nhất.*

iii) Nếu $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ *có số chiều bằng q thì f là phép dời hình hay phản dời hình tùy thuộc $n-q$ chẵn hay lẻ.*

Chứng minh. i) Nếu Inv(f) $\neq \emptyset$ thì có $I \in \mathbf{E}^n, f(I) = I$. Gọi α là phẳng qua I có phương là Inv($\overrightarrow{f}$). Khi đó $M \in$ Inv(f) $\Leftrightarrow$ f(M) = M $\Leftrightarrow \overrightarrow{If(M)} = \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(I)f(M)} = \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \in$ Inv($\overrightarrow{f}$) $\Leftrightarrow$ M $\in \alpha$. Vậy Inv(f) $= \alpha$.

ii) Biểu thức tọa độ của phép đẳng cự f đối với một mục tiêu có dạng

$$[x'] = A[x] + [a]$$

và $[x'] = A[x]$ là biểu thức tọa độ của $\overrightarrow{f}$ đối với cơ sở nền. Vectơ bất động có tọa độ là nghiệm của phương trình

$$(A - I)[x] = 0.$$

Vì Inv($\overrightarrow{f}$) $= \{\vec{0}\}$ nên $\det(A-I) \neq 0$, do đó điểm bất động có tọa độ là nghiệm của phương trình $(A - I)[x] = -[a]$ tồn tại và duy nhất.

iii) Vì $\overrightarrow{f}$ là biến đổi trực giao nên tồn tại cơ sở trực chuẩn để ma trận A của $\overrightarrow{f}$ có dạng chéo khối, trong đó các khối trên đường chéo là 1 hoặc -1, hoặc là các ma trận trực giao cấp 2, hơn nữa số các số 1 trên đường chéo bằng dim(Inv($\overrightarrow{f}$)) $= q$. Giả sử số các khối ma trận trực giao cấp 2 là k, ta có

$$\det A = (-1)^{n-q-2k} = (-1)^{n-q}.$$

Từ trên suy ra nếu $n - q$ chẵn, $\det A = 1$, thì f là phép dời hình và nếu $n - q$ lẻ, $\det A = -1$, thì f là phép phản dời hình. □

Tiếp theo, ta có kết quả quan trọng sau.

Định lý 2.3.2.13. *Nếu $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ là một phép biến đổi đẳng cự thì f có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng*

$$f = t_{\vec{v}} \circ g,$$

trong đó $g : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ là một phép đẳng cự có điểm bất động và $\vec{v} \in$ Inv($\overrightarrow{f}$). Ngoài ra,

$$t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}}.$$

Chứng minh. Ta đặt $\overrightarrow{\alpha} = \mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ và $\overrightarrow{\beta}$ là không gian bù trực giao của $\overrightarrow{\alpha}$, tức $\overrightarrow{\alpha} \perp \overrightarrow{\beta}$ và $\overrightarrow{E^n} = \overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta}$. Vì với mọi $\vec{x} \in \overrightarrow{\beta}$ ta có $\overrightarrow{f}(\vec{x}) \in \overrightarrow{\beta}$, do đó $\overrightarrow{f}(\vec{x}) - \vec{x} \in \overrightarrow{\beta}$, nên có ánh xạ

$$\left(\overrightarrow{f} - Id_{\mathbf{E}^n}\right)\Big|_{\overrightarrow{\beta}} : \overrightarrow{\beta} \to \overrightarrow{\beta}.$$

Ánh xạ đó là đơn cấu (từ đó suy ra đẳng cấu) vì dễ thấy rằng

$$\mathrm{Ker}\left(\overrightarrow{f} - Id_{\overrightarrow{\mathbf{E}^n}}\right)\Big|_{\overrightarrow{\beta}} = \{\vec{0}\}.$$

Điều đó có nghĩa là, với bất kỳ $\vec{v} \in \overrightarrow{\beta}$ luôn có vectơ $\vec{x} \in \overrightarrow{\beta}$ sao cho $\overrightarrow{f}(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{v}$. Bây giờ lấy một điểm tùy ý $P \in \mathbf{E}^n$ và gọi $P' = f(P)$. Ta phân tích $\overrightarrow{PP'} = \vec{v} + \vec{w}$, trong đó $\vec{v} \in \overrightarrow{\alpha}, \vec{w} \in \overrightarrow{\beta}$. Như trên đã nói, có vectơ $\vec{x} \in \overrightarrow{\beta}$ sao cho $\overrightarrow{f}(\vec{x}) - \vec{x} = -\vec{w}$. Ta lấy điểm Q sao cho $\overrightarrow{PQ} = \vec{x}$ và gọi $Q' = f(Q)$. Khi đó

$$\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PP'} - \vec{x} + \overrightarrow{f}(\vec{x}) = \vec{v} + \vec{w} - \vec{w}.$$

Bây giờ nếu xét $g = (t_{\vec{v}})^{-1} \circ f$ thì g là phép đẳng cự của $\mathbf{E}^n$ và $g(Q) = (t_{\vec{v}})^{-1} \circ f(Q) = (t_{\vec{v}})^{-1}(Q') = Q$. Khi đó $f = t_{\vec{v}} \circ g$ là cách viết cần tìm. Ta nhận thấy $g \circ t_{\vec{v}} \circ g^{-1}$ là phép tịnh tiến (vì $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{t_{\vec{v}}} \circ \overrightarrow{g^{-1}} = Id_{\overrightarrow{E^n}}$) và nó biến Q thành Q' nên

$$g \circ t_{\vec{v}} \circ g^{-1} = t_{\vec{v}} \text{ hay } g \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ g.$$

Bây giờ giả sử có hai cách phân tích

$$f = t_{\vec{v}} \circ g = t_{\vec{v}} \circ g',$$

trong đó g, g' là những phép đẳng cự có điểm bất động và $\vec{v} \in \mathrm{Inv}(\overrightarrow{g}), \vec{v'} \in \mathrm{Inv}(\overrightarrow{g}')$. Ta chú ý rằng $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{g}) = \mathrm{Inv}(\overrightarrow{g}') = \mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$. Lấy một điểm P bất động của g và gọi Q là hình chiếu vuông góc của P lên $\mathrm{Inv}(g)$. Gọi $P' = f(P)$ và Q' là điểm sao cho $\overrightarrow{QQ'} = \vec{v}'$, thì

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{v} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P'} = \vec{v}' + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Q'P'}.$$

Chú ý rằng $\vec{v}, \vec{v'} \in \overrightarrow{\alpha} = \mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$, còn $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Q'P'}$ thuộc không gian bù trực giao của $\vec{\alpha}$, suy ra $\vec{v} = \vec{v'}$, hay $t_{\vec{v}} = t_{\vec{v'}}$ và do đó $g = g'$. $\square$

e) Phân loại ánh xạ đẳng cự trong $\mathbf{E}^2$

Trong $\mathbf{E}^2$ ta đã biết các phép đẳng cự sau:

+ Phép tịnh tiến theo một vectơ: ma trận của phép tịnh tiến là ma trận đơn vị cấp 2.

+ Phép quay quanh một điểm: ma trận của phép quay đối với một mục tiêu trực chuẩn là ma trận có dạng

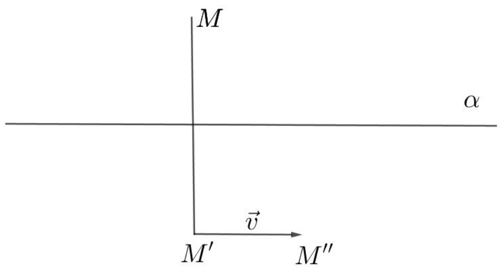
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

trong đó $0 \leq \theta \leq \pi$ là góc quay.

+ Phép đối xứng qua trục (đối xứng qua một đường thẳng).

Định nghĩa 2.3.2.14. [Phép đối xứng trượt] Trong không gian Euclid $\mathbf{E}^2$ cho phép đối xứng g đối với đường thẳng α và phép tịnh tiến $t_{\vec{v}}$, trong đó $\vec{v} \in \overrightarrow{\alpha}$. Tích $t_{\vec{v}} \circ g$ được gọi là phép đối xứng trượt (Hình 2.2).

Ta có $t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}}$. Phép đối xứng trượt là tích của phép phản dời hình và phép dời hình nên nó là phép phản dời hình. Khi $\vec{v} = \vec{0}$, phép đối xứng trượt là phép đối xứng qua đường thẳng.



Hình 2.2

Định lý 2.3.2.15. *Mỗi phép phản dời hình trong $\mathbf{E}^2$ là một phép đối xứng trượt, đặc biệt là một phép đối xứng.*

Chứng minh. Nếu $f : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ là phép phản dời hình thì số chiều của $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ bằng 1, nên trong cách phân tích $f = t_{\vec{v}} \circ g$ thì g phải là phép đẳng cự mà điểm bất động nằm trên một đường thẳng d. Vậy g là phép đối xứng qua d. Khi đó f là phép đối xứng trượt. $\square$

Định lý 2.3.2.16. *Mỗi phép dời hình trong $\mathbf{E}^2$ là một phép tịnh tiến hoặc là một phép quay.*

Chứng minh. Giả sử $f : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ là một phép dời. Khi đó số chiều của $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ bằng 2 hoặc 0. Ta có $f = t_{\vec{v}} \circ g$, trong đó g là phép đẳng cự có điểm bất động và $\vec{v} \in \mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$.

Nếu $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ có chiều bằng 2 thì g là phép đồng nhất và f là phép tịnh tiến.

Nếu $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ có chiều bằng 0 thì g có điểm bất động duy nhất I và $\vec{v} = \vec{0}$. Suy ra f là phép quay quanh I. $\square$

Các phép đẳng cự thể hiện ở Định lý 2.3.2.15 và Định lý 2.3.2.16 đó là phép đối xứng trượt, phép tịnh tiến, phép quay, chúng được gọi là các đẳng cự có dạng chính tắc trong $\mathbf{E}^2$.

Ví dụ 2.3.2.17. Cho phép đẳng cự f trong $\mathbf{E}^2$ có biểu thức tọa độ trong mục tiêu trực chuẩn là

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2 - 1 \\ x_2' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + 2 \end{cases}.$$

Hãy xác định dạng chính tắc của f.

Giải. Ma trận trực giao $A = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$ có $|A| = 1$ nên f là phép dời. Vì A khác ma trận đơn vị nên f không là phép tịnh tiến, do đó f là một phép quay. Tâm quay là điểm bất động của f nên tọa độ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2 - 1, \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + 2. \end{cases}$$

Do đó tâm quay là điểm $I = \left(-\dfrac{1}{2} - \sqrt{3}, 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Từ dạng chính tắc của ma trận trực giao A suy ra góc quay θ xác định bởi $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ hay $\theta = 60°$.

Ví dụ 2.3.2.18. Cho phép đẳng cự f trong $\mathbf{E}^2$ có biểu thức tọa độ đối với mục tiêu trực chuẩn là

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 2, \\ x_2' = x_2 + 3. \end{cases}$$

Hãy xác định dạng chính tắc của f.

Giải. Ma trận trực giao $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ có $|A| = -1$ nên f là phép phản dời hình, do đó f là phép đối xứng trượt với trục đối xứng là đường thẳng đi qua trung điểm của một cặp điểm tương ứng, có phương là $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$. Vectơ bất động có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 = -x_1, \\ x_2 = x_2. \end{cases}$$

Do đó $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f}) = \{(0, a), a \in \mathbb{R}\}$. Xét $O' = f(O) = (-2, 3)$. Trục đối xứng là đường thẳng đi qua trung điểm $I = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ của OO' và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (0, 1)$. Xét $I' = f(I) = \left(-1, \frac{9}{2}\right)$. Vectơ tịnh tiến là $\vec{v} = \overrightarrow{II'} = \left(0, \frac{7}{2}\right)$.

f) Phân loại ánh xạ đẳng cự trong $\mathbf{E}^3$

Trong $\mathbf{E}^3$ ta đã biết các phép đẳng cự sau:

1) Phép tịnh tiến;

2) Phép đối xứng qua mặt phẳng;

3) Phép quay quanh một trục (quay quanh một đường thẳng).

Từ tính chất của phép quay quanh một $(n-2)-$phẳng trong $\mathbf{E}^n$ ta có:

+ Tích của hai phép đối xứng qua hai mặt phẳng α và β cắt nhau theo đường thẳng d là phép quay quanh đường thẳng d.

+ Xét phép quay f quanh trục d. Nếu gọi γ là mặt phẳng vuông góc với d tại $I \in d$ thì $f|_\gamma$ là một phép đẳng cự của γ có điểm bất động duy nhất I nên $f|_\gamma$ là một phép quay quanh điểm I.

+ Ma trận của phép quay quanh một trục có dạng chính tắc là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

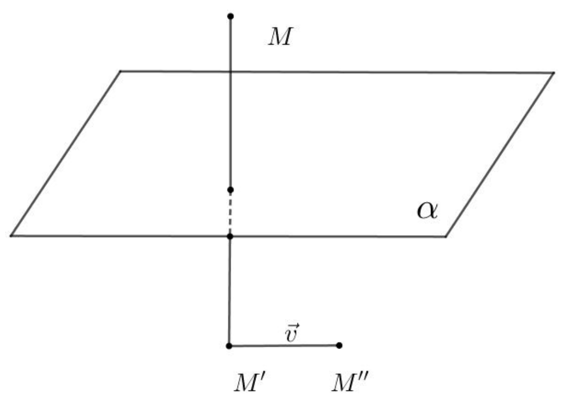
trong đó $0 \leq \theta \leq \pi$ là góc quay quanh đường thẳng.

Định nghĩa 2.3.2.19 (Phép đối xứng trượt)**.** Trong không gian Euclid $\mathbf{E}^3$ cho phép đối xứng g đối với mặt phẳng α và phép tịnh tiến $t_{\vec{v}}$, trong đó $\vec{v} \in \overrightarrow{\alpha}$. Tích $t_{\vec{v}} \circ g$, được gọi là phép đối xứng trượt (Hình 2.3).

Nhận xét 2.3.2.20. i) $t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}}$.

ii) Khi $\vec{v} = \vec{0}$, phép đối xứng trượt là phép đối xứng qua mặt phẳng.

iii) Phép đối xứng trượt là một phép phản dời hình.



Hình 2.3

Định nghĩa 2.3.2.21. [Phép đối xứng quay] Tích của phép đối xứng g qua mặt phẳng α và một phép quay q quanh đường thẳng d vuông góc với α được gọi là phép đối xứng quay (Hình 2.4 a).

Nhận xét 2.3.2.22. i) Phép đối xứng quay là phép phản dời hình.

ii) Ta có $f = q \circ g = g \circ q$ và trong trường hợp phép quay q quanh đường thẳng d với góc quay π thì f là phép đối xứng qua I (I là giao điểm của α và d). Khi đó f biến điểm M thành điểm M' sao cho I là trung điểm của MM'.

iii) Trong phép đối xứng quay f ta có: $\mathrm{Inv}(f) = \{I\}$ $(I = \alpha \cap d), \mathrm{Inv}(\overrightarrow{f}) = \{\vec{0}\}$.

Định nghĩa 2.3.2.23. [Phép xoắn ốc] Tích của phép quay q quanh đường thẳng d và một phép tịnh tiến $t_{\vec{v}}$ với $\vec{v} \in \overrightarrow{d}$ được gọi là phép xoắn ốc (Hình 2.4 b).

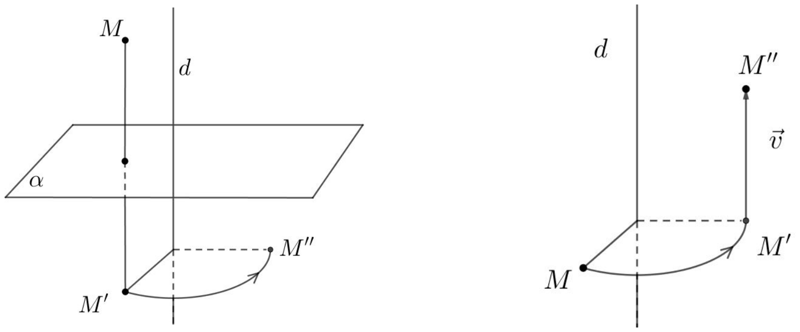
Nhận xét 2.3.2.24. i) Ta có $f = q \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ q$.

ii) Nếu $\vec{v} = \vec{0}$ thì phép xoắn ốc f trở thành phép quay q.

iii) Nếu phép quay q với góc quay 0 thì phép xoắn ốc f là phép tịnh tiến.

iv) Phép xoắn ốc là phép dời hình của $\mathbf{E}^3$.

Sự phân loại các phép đẳng cự trong $\mathbf{E}^3$ được cho bởi các kết quả dưới đây.



(a) Phép đối xứng quay **(b)** Phép xoắn ốc

Hình 2.4

Định lý 2.3.2.25. *Mỗi phép dời hình trong $\mathbf{E}^3$ là một phép xoắn ốc, đặc biệt là một phép tịnh tiến hoặc là một phép quay quanh đường thẳng.*

Chứng minh. Gọi $f : \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$ là một phép dời. Khi đó $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ có chiều bằng 3 hoặc 1. Ta có $f = t_{\vec{v}} \circ g$, trong đó g là phép đẳng cự có điểm bất động và $\vec{v} \in \mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$.

i) Nếu $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ có chiều bằng 3, tức $\overrightarrow{f}$ là ánh xạ đồng nhất. Khi đó f là phép tịnh tiến.

ii) Nếu $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ có chiều bằng 1 thì g là phép dời hình có các điểm bất động nằm trên một đường thẳng d đi qua một điểm bất động I có phương là $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$. Do đó g là phép quay quanh đường thẳng d. Vì vậy f là phép xoắn ốc. □

Định lý 2.3.2.26. *Mỗi phép phản dời hình trong $\mathbf{E}^3$ là một phép đối xứng trượt hoặc là một phép đối xứng quay, đặc biệt là một phép đối xứng qua mặt phẳng.*

Chứng minh. Nếu $f : \mathbf{E}^3 \to \mathbf{E}^3$ là một phép phản dời hình thì $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ có chiều bằng 2 hoặc 0. Ta có $f = t_{\vec{v}} \circ g$, trong đó g là phép đẳng cự có điểm bất động và $\vec{v} \in \mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$.

i) Nếu $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ có chiều bằng 2 thì g là phép phản dời hình có các điểm bất động nằm trên mặt phẳng α đi qua một điểm bất động I và có phương là $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$. Vậy g là phép đối xứng qua mặt phẳng α. Vì vậy f là phép đối xứng trượt.

ii) Nếu $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ có chiều bằng 0 thì f có điểm bất động duy nhất I. Từ ma trận dạng chính tắc của biến đổi trực giao $\overrightarrow{f}$, suy ra $\overrightarrow{f}$ có giá trị riêng -1 bội 1 hoặc 3. Gọi $\overrightarrow{\alpha}$ là không gian riêng của $\overrightarrow{f}$ tương ứng với giá trị riêng -1. Khi đó:

+ Nếu $\dim\overrightarrow{\alpha} = 1$, gọi d là đường thẳng qua điểm bất động I có phương là $\overrightarrow{\alpha}$ thì $f|_d$ là phép đối xứng qua I. Gọi β là phẳng qua I và vuông góc với d thì $f|_\beta$ là phép quay quanh I. Vậy f là phép đối xứng quay.

+ Nếu $\dim \overrightarrow{\alpha} = 3$ thì hiển nhiên f là phép đối xứng qua I, cũng có thể xem là phép đối xứng quay. $\square$

Các phép đẳng cự thể hiện ở Định lý 2.3.2.25 và Định lý 2.3.2.26, đó là phép xoắn ốc, phép đối xứng trượt, phép đối xứng quay, chúng được gọi là các đẳng cự có dạng chính tắc trong $\mathbf{E}^3$.

Ví dụ 2.3.2.27. Cho phép đẳng cự f trong $\mathbf{E}^3$ có biểu thức tọa độ trong mục tiêu trực chuẩn là

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 - 1 \\ x_2' = -x_3 + 2 \\ x_3' = \quad x_1 + 3 \end{cases}.$$

Hãy xác định dạng chính tắc của f.

Giải. Ma trận của f là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vì ma trận A có $|A| = 1$ nên f là phép dời hình, do đó là phép xoắn ốc. A khác ma trận đơn vị nên $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$ có chiều là 1 và là phương của trục quay. Tọa độ điểm bất động của f là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - 1 \\ x_2 = -x_3 + 2 \\ x_3 = x_1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

Đây là phương trình một đường thẳng d trong không gian và khi đó f là phép quay quanh d. Từ dạng chính tắc của ma trận trực giao A suy ra góc quay θ xác định bởi

$$2\cos\theta = \mathrm{Trace(A)} - 1 = -1 \text{ tức } \cos\theta = -\frac{1}{2}, \text{ do đó } \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

2.4 Hình học Euclid và Hình học đồng dạng

2.4.1 *Hình học Euclid, tương đương afin trong không gian Euclid*

a) Hình học Euclid

Không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ cũng là một không gian afin nên trên nó có các phép biến đổi afin. Trên không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ có nhóm các phép biến đổi afin và nhóm các phép biến đổi đẳng cự. Gọi $\mathrm{Af}\,(\mathbf{E}^n)$ là nhóm các phép biến đổi afin (nhóm afin) của $\mathbf{E}^n, \mathrm{Isom}\,(\mathbf{E}^n)$ là nhóm các phép biến đổi đẳng cự (nhóm đẳng cự) của $\mathbf{E}^n$, ta có $\mathrm{Isom}\,(\mathbf{E}^n) \subset \mathrm{Af}\,(\mathbf{E}^n)$.

Hình học của nhóm các phép biến đổi đẳng cự của $\mathbf{E}^n$ được gọi là hình học Euclid n chiều.

Trong hình học Euclid hai hình được gọi là tương đương nếu có một phép đẳng cự biến hình này thành hình kia. Hai hình tương đương còn được gọi là bằng nhau.

Ví dụ. Hai đoạn thẳng bằng nhau; hai tam giác bằng nhau.

Theo định nghĩa trên, hình học Euclid n chiều nghiên cứu những bất biến qua các phép đẳng cự của $\mathbf{E}^n$, tức là những tính chất nếu có trong một hình thì cũng có trong mọi hình bằng nó.

Ví dụ 2.4.1.1. Trong hình học Euclid ta có: đoạn thẳng với độ dài cho trước; tam giác đều với cạnh cho trước; quan hệ vuông góc của các phẳng; ...

b) Mối quan hệ giữa hình học afin và hình học Euclid trong $\mathbf{E}^n$

Trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ có nhóm afin $\mathrm{Af}(\mathbf{E}^n)$, do đó ta cũng có hình học afin trên $\mathbf{E}^n$. Vì $\mathrm{Isom}(\mathbf{E}^n)$ là nhóm con của nhóm $\mathrm{Af}(\mathbf{E}^n)$ nên hình học afin là một bộ phận của hình học Euclid. Điều đó có nghĩa là các tính chất afin (những tính chất không thay đổi qua các phép biến đổi afin) cũng là các tính chất Euclid (những tính chất không thay đổi qua các phép đẳng cự) và được nghiên cứu trong hình học Euclid, nhưng điều ngược lại không đúng, bởi vì các tính chất bất biến đối với nhóm đẳng cự Isom($\mathbf{E}^n$) chưa hẳn là các tính chất bất biến đối với nhóm afin Af($\mathbf{E}^n$). Ví dụ như tính vuông góc của các phẳng, số đo khoảng cách, số đo góc ... Vì vậy hình học Euclid trên $\mathbf{E}^n$ phong phú hơn hình học afin trên $\mathbf{E}^n$. Khi nghiên cứu về hình học Euclid, việc phân biệt một tính chất xem nó là tính chất afin hay tính chất Euclid là một điều quan trọng. Giả sử một hình $\mathbf{H}$ nào đó của $\mathbf{E}^n$ có tính chất T. Nếu là tính chất afin thì những hình tương đương afin với $\mathbf{H}$ cũng có tính chất T. Còn nếu là tính chất Euclid thì chỉ có những hình bằng hình $\mathbf{H}$ mới có tính chất đó. Chẳng hạn tính chất "trong tam giác đều đường cao là đường trung tuyến" không thể áp dụng cho mọi tam giác bất kì vì qua một phép afin một tam giác đều có thể biến thành một tam giác có hình dạng tùy ý. Ngược lại tính chất "ba đường trung tuyến của một tam giác đồng quy" có thể áp dụng cho mọi tam giác vì tính chất trung tuyến của tam giác, tính chất đồng quy của các đường thẳng đều là những tính chất afin.

c) Phương pháp dùng tương đương afin để giải toán

Hình học afin là một bộ phận của hình học Euclid nên khi nghiên cứu hình học afin ta có thể dùng các phương tiện của hình học Euclid. Phương pháp này có thể tóm tắt như sau:

Giả sử cần chứng minh một hình $\mathbf{H}$ nào đó có tính chất α mà α là một tính chất afin. Khi đó ta có thể chứng minh tính chất α đó đối với một hình $\mathbf{H}'$ nào đó tương đương afin với $\mathbf{H}$. Bởi vậy ta có thể chọn trong lớp tương đương afin với $\mathbf{H}$ một hình $\mathbf{H}'$ đặc biệt mà tính chất α dễ chứng minh hơn.

Ta lấy một vài ví dụ để làm sáng tỏ vấn đề này.

Bài toán 1: Chứng minh rằng 3 đường trung tuyến trong một tam giác đồng qui.

Giải. Vì tính chất đồng qui của các đường thẳng là một tính chất afin. Do đó ta chỉ cần chứng minh tính chất này trên một hình bất kỳ tương đương afin với tam giác đã cho. Ta xét trên tam giác đều. Qua sự tương đương trên, 3 đường trung tuyến của tam giác ban đầu tương ứng với 3 đường trung tuyến của tam giác đều. Chúng ta chứng minh tính chất đồng qui của 3 đường trung tuyến trong tam giac đều. Trong tam giác đều, 3 đường trung tuyến đồng thời là 3 đường trung trực, vì vậy chúng đồng qui (chứng minh dễ dàng). Từ kết quả đúng trong tam giác đều suy ra kết quả cũng đúng cho tam giác bất kỳ ban đầu.

Bài toán 2. Cho hình bình hành $ABCD$. M là điểm thuộc đoạn AB, N là điểm thuộc đoạn AD sao cho $AM/AB = AN/AD$. Đường thẳng qua M song song với AD cắt đường thẳng qua N song song với AB tại I. Chứng minh rằng A, I, C thẳng hàng.

Giải. Tính thẳng hàng của một hệ điểm là bất biến afin, do đó để giải bài toán, ta chỉ cần chứng minh kết luận đúng trên một hình bất kỳ tương đương afin với hình bình hành ban đầu. Vì vậy, ta giải bài toán trong trường hợp hình bình hành $ABCD$ là hình vuông. Vì tỉ số đơn của 3 điểm là bất biến afin, nên trên hình vuông ta cũng có $AM/AB = AN/AD$. Vì $AB = AD$ nên $AM = AN$, do đó hình bình hành $AMIN$ là hình vuông. Do $\widehat{AIB} = 45^0$ nên I thuộc AC hay A, I, C thẳng hàng.

Bài toán 3: Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho:

$$(BCA') = (CAB') = (ABC') = k,\ k \neq 0, 1.$$

Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Giải. Ta nhận thấy tỉ số đơn của hệ ba điểm, trọng tâm của tam giác là các khái niệm afin, quan hệ trùng nhau của các điểm là bất biến afin. Vì vậy ta chỉ cần giải bài toán trong trường hợp tam giác đã cho là tam giác đều (tương đương afin với tam giác bất kỳ). Xét tam giác đều ABC với các điểm A', B', C' trên ba cạnh, thoả mãn

$(BCA') = (CAB') = (ABC') = k$. Ta chứng minh trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$ trùng nhau.

Từ giả thiết suy ra tam giác $A'B'C'$ cũng là tam giác đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác đều ABC. Xét phép quay tâm G góc quay 120^0. Khi đó A, B, C tương ứng biến thành B, C, A và C', A', B' tương ứng biến thành A', B', C' (sử dụng các tam giác bằng nhau). Do đó G là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều $A'B'C'$, nên G cũng là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vậy hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

2.4.2 *Nhóm các phép biến đổi đồng dạng, Hình học đồng dạng*

a) Ánh xạ tuyến tính đồng dạng

Định nghĩa 2.4.2.1. Ánh xạ tuyến tính $\varphi : \overrightarrow{\mathbf{E}} \to \overrightarrow{\mathbf{E}'}$ giữa các không gian vectơ Euclid $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ và $\overrightarrow{\mathbf{E}'}$ được gọi là một ánh xạ tuyến tính đồng dạng nếu có một hằng số thực $k \neq 0$ để

$$\varphi(\vec{x}) \cdot \varphi(\vec{y}) = k\vec{x} \cdot \vec{y},\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \overrightarrow{\mathbf{E}}.$$

Nhận xét 2.4.2.2. i) Trong định nghĩa trên, số thực $k > 0$ khi $\dim(\overrightarrow{\mathbf{E}}) > 0$. Thật vậy, vì $\dim(\overrightarrow{\mathbf{E}}) > 0$ nên tồn tại $\vec{x} \neq \vec{0}$, tức $\vec{x}^2 > 0$. Mặt khác, từ định nghĩa ta có $0 \leq (\varphi(\vec{x}))^2 = k(\vec{x})^2$, do đó k phải là một số dương.

ii) Ánh xạ tuyến tính trực giao là ánh xạ tuyến tính đồng dạng (với $k = 1$).

Tính chất 2.4.2.3. *i) Tích các ánh xạ tuyến tính đồng dạng là một ánh xạ tuyến tính đồng dạng.*

ii) Ánh xạ tuyến tính đồng dạng bảo toàn quan hệ trực giao của các không gian con.

iii) Một ánh xạ $\varphi : \overrightarrow{\mathbf{E}} \to \overrightarrow{\mathbf{E}'}$ giữa các không gian vectơ Euclid có tính chất $\varphi(\vec{x}).\varphi(\vec{y}) = k\vec{x}\vec{y},\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \overrightarrow{\mathbf{E}}$ với k là một hằng số khác 0, là một ánh xạ tuyến tính đồng dạng.

Chứng minh. Dễ dàng kiểm tra trực tiếp i), ii).

Chứng minh iii) tương tự như trường hợp ánh xạ trực giao. □

b) Phép đồng dạng

Định nghĩa 2.4.2.4. Phép biến đổi $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ được gọi là phép đồng dạng nếu với hai điểm bất kì $M, N \in \mathbf{E}^n$ và ảnh của chúng là $M' = f(M), N' = f(N)$, ta luôn có $d(M', N') = k \cdot d(M, N)$, trong đó k là một số thực dương cố định. Số k được gọi là tỉ số đồng dạng của phép đồng dạng f.

Nhận xét 2.4.2.5. + Phép đồng dạng với tỷ số $k = 1$ là phép đẳng cự.

+ Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

Định lý 2.4.2.6. *Phép biến đổi $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ là phép đồng dạng khi và chỉ khi f là phép afin có ánh xạ liên kết là ánh xạ tuyến tính đồng dạng.*

Chứng minh. + Giả sử $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ là phép đồng dạng tỉ số k. Lấy điểm $O \in \mathbf{E}^n$, gọi $O' = f(O)$. Ta định nghĩa ánh xạ $\varphi : \overrightarrow{\mathbf{E}^n} \to \overrightarrow{\mathbf{E}^n}$ như sau: Với $\vec{x} \in \overrightarrow{\mathbf{E}^n}$, gọi M là điểm sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{x}$ và $M' = f(M)$, đặt $\varphi(\vec{x}) = \overrightarrow{O'M'}$. Ta có φ là ánh xạ tuyến tính đồng dạng. Thật vậy, với mọi $M, N \in \mathbf{E}^n$, ta có:

$$\begin{aligned} d^2(M, N) = \overrightarrow{MN}^2 = (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})^2 &= \overrightarrow{ON}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} \\ &= d^2(O, N) + d^2(O, M) - 2\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

Với $M' = f(M), N' = f(N)$, ta có:

$$\begin{aligned} d^2(M', N') = \overrightarrow{MN}^2 &= \left(\overrightarrow{O'N'} - \overrightarrow{O'M'}\right)^2 \\ &= \overrightarrow{O'N'}^2 + \overrightarrow{O'M'}^2 - 2\overrightarrow{O'N'} \cdot \overrightarrow{O'M'} \\ &= d^2(O', N') + d^2(O', M') - 2\overrightarrow{O'N'} \cdot \overrightarrow{O'M'}. \end{aligned}$$

Mặt khác, f là phép đồng dạng nên ta có:

$$d^2(M', N') = k^2 d^2(M, N);$$
$$d^2(O', N') = k^2 d^2(O, N);$$
$$d^2(O', M') = k^2 d^2(O, M).$$

Từ trên suy ra $\overrightarrow{O'N'} \cdot \overrightarrow{O'M'} = k^2 \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM}$. Từ đó $\varphi(\vec{x}) \cdot \varphi(\vec{y}) = k^2 \vec{x} \cdot \vec{y}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \overrightarrow{\mathbf{E}^n}$. Từ đó, theo Tính chất 2.4.2.3, φ là ánh xạ tuyến tính đồng dạng. Dễ thấy φ là ánh xạ tuyến tính liên kết của f nên f là phép afin.

$+$ Giả sử phép biến đổi $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ là phép afin liên kết với ánh xạ tuyến tính đồng dạng $\overrightarrow{f}$. Khi đó với mọi $M, N \in \mathbf{E}^n$, $M' = f(M), N' = f(N)$ ta có $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN}) \cdot \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN}) = k\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN}, k > 0 \Rightarrow \sqrt{k}\|\overrightarrow{MN}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{M'N'}\| = \sqrt{k} \Rightarrow d(M', N') = \sqrt{k} d(M, N)$.

Do đó f là phép đồng dạng tỷ số $\sqrt{k}$. □

Từ định lý trên dễ dàng chứng minh được kết quả sau

Hệ quả 2.4.2.7. *Phép biến đổi afin $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ là một phép đồng dạng tỉ số k khi và chỉ khi phép biến đổi tuyến tính φ liên kết với f có tính chất:*

$$\|\varphi(\vec{x})\| = k\|\vec{x}\| \textit{ với mọi } \vec{x} \in \overrightarrow{\mathbf{E}^n}.$$

Ta có kết quả sau đây (việc chứng minh xem như bài tập).

Định lý 2.4.2.8. *Tập hợp các phép biến đổi đồng dạng của không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ lập thành một nhóm, được gọi là nhóm đồng dạng. Nó là nhóm con của nhóm afin và chứa nhóm đẳng cự.*

Định nghĩa 2.4.2.9. Hai hình tương ứng với nhau qua một phép đồng dạng được gọi là hai hình đồng dạng. Hình học của nhóm đồng dạng được gọi là hình học đồng dạng.

Hình học đồng dạng nghiên cứu những bất biến của nhóm đồng dạng, tức là những tính chất không thay đổi qua phép đồng dạng.

Trên không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ vì nhóm đẳng cự là nhóm con của nhóm đồng dạng, nhóm đồng dạng là nhóm con của nhóm afin nên hình học afin là một bộ phận của hình học đồng dạng và hình học đồng dạng là một bộ phận của hình học Euclid. Như vậy trong hình học đồng dạng có mọi khái niệm và tính chất afin. Tuy nhiên, có những khái niệm, tính chất của hình học Euclid không phải là khái niệm, tính chất của hình học đồng dạng như độ dài đoạn thẳng, khoảng cách từ một điểm đến một $m-$phẳng, diện tích các hình phẳng, thể tích các hình không gian, ...

Chú ý. Độ dài đoạn thẳng không phải là một bất biến đồng dạng, nhưng tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng là một bất biến đồng dạng. Ngoài ra ta còn có số đo góc của hai đường thẳng cũng là một bất biến đồng dạng. Từ đó suy ra định lí Pitago là một định lí của hình học đồng dạng và rất nhiều những khái niệm như hình vuông, hình tam giác đều, đều là những khái niệm của hình học đồng dạng.

2.5 Siêu mặt bậc hai trong không gian Euclid

2.5.1 *Dạng chính tắc của siêu mặt bậc hai*

Không gian Euclid là không gian afin, vì vậy trong nó có các siêu mặt bậc hai, gồm các điểm có tọa độ đối với một mục tiêu afin thỏa mãn một phương trình bậc hai. Đối với mục tiêu afin thích hợp, phương trình của siêu mặt bậc hai có dạng đơn giản nhất, được gọi là phương trình chuẩn tắc. Sau đây ta xét phương trình siêu mặt bậc hai đối với các mục tiêu trực chuẩn của không gian Euclid. Trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ cho siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình:

$$[x]^T A[x] + 2[a]^T[x] + a_0 = 0. \tag{2.8}$$

Vì A là một ma trận vuông đối xứng nên từ kết quả ở Mục 2.1.5 có thể tìm được một ma trận trực giao B sao cho B^TAB có dạng chéo. Khi biến đổi tọa độ $[x] = B[x']$ phương trình của $(\mathcal{S})$ đối với mục tiêu mới có dạng:

$$[x']^T B^T AB[x'] + 2[a]^T B[x'] + a_0 = 0. \tag{2.9}$$

Vì B^TAB có dạng chéo nên phương trình (2.9) có dạng:

$$\sum_{i=1}^{r} b_i x'^2_i + 2\sum_{i=1}^{n} c_i x'_i + d = 0, \tag{2.10}$$

trong đó $1 \leq r \leq n$, các $b_i \neq 0$ với $i = 1, 2, \ldots, r$.

Chú ý rằng vì B là ma trận trực giao nên mục tiêu mới cũng trực chuẩn. Như vậy bước thứ nhất ta đã chứng minh được rằng luôn có thể tìm được một mục tiêu trực chuẩn sao cho phương trình của $(\mathcal{S})$ đối với mục tiêu đó có dạng (2.10) tức là vắng mặt các số hạng chữ nhật $x_i x_j$ với $i \neq j$.

Dùng phép đổi mục tiêu trực chuẩn:

$$\begin{cases} x''_i = x'_i + \dfrac{c_i}{b_i} & \text{với } i = 1, 2, \ldots, r \\ x''_j = x'_j & \text{với } j = r+1, \ldots, n \end{cases} \tag{2.11}$$

thì phương trình (2.10) trở thành:

$$\sum_{i=1}^{r} b_i x''^2_i + 2\sum_{j=r+1}^{n} c_j x''_j + d' = 0. \tag{2.12}$$

Chú ý rằng việc chuyển mục tiêu theo công thức (2.11) là một phép tịnh tiến mục tiêu nên kết quả ta vẫn được một mục tiêu trực chuẩn.

+ Nếu $c_j = 0$ với $j = r+1, \ldots, n$ và $d' \neq 0$ thì phương trình (2.12) của $(\mathcal{S})$ sẽ có dạng:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x''^2_i = 1, \quad 1 \leq r \leq n. \tag{I}$$

+ Nếu $c_j = 0$ với $j = r+1, \dots, n$ và $d' = 0$ thì phương trình của $(\mathcal{S})$ có dạng:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i''^2 = 0, \quad 1 \le r \le n. \tag{II}$$

+ Nếu $r < n$ và có ít nhất một số $c_j \neq 0$, giả sử $c_{r+1} \neq 0$. Trong trường hợp này ở phương trình (2.12) của $(\mathcal{S})$ ta luôn luôn có thể giả thiết $d' = 0$, bởi vì nếu $d' \neq 0$ thì dùng phép tịnh tiến mục tiêu:

$$\begin{cases} x'''_{r+1} = x''_{r+1} + \dfrac{d'}{c_{r+1}} \\ x'''_i = x''_i \text{ với } i \neq r+1 \end{cases} \tag{2.13}$$

ta sẽ được phương trình không còn hệ số tự do đã được xét ở dạng (II). Bởi vậy ta xét phương trình (2.12) trong đó $d' = 0$.

Đặt $m = \sqrt{\sum_{j=r+1}^{n} c_j^2}$ và $c'_j = \dfrac{c_j}{m}$ với $j = r+1, r+2, \dots, n$ thì phương trình (2.12) có dạng:

$$\sum_{i=1}^{r} b_i x_i''^2 + 2m \sum_{j=r+1}^{n} c'_j x''_j = 0, \tag{2.14}$$

trong đó các c'_j thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{r} c_j'^2 = 1$. Bây giờ dùng phép đổi mục tiêu sau đây:

$$\begin{cases} X_i = x''_i \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ X_{r+1} = \sum_{j=r+1}^{n} c'_j x''_j, \\ X_k = \sum_{j=r+1}^{n} \gamma k_j x''_j, k = r+2, \dots, n. \end{cases} \tag{2.15}$$

Ta có thể chọn các số γk_j sao cho ma trận của phép biến đổi (2.15) là ma trận trực giao. Khi đó mục tiêu mới là mục tiêu trực chuẩn. Đối với mục tiêu này phương trình (2.14) của $(\mathcal{S})$ có dạng:

$$\sum_{i=1}^{r} b_i X_i^2 + 2m X_{r+1} = 0, \quad 1 \le r < n. \tag{III}$$

Ba dạng (I), (II), (III) tìm được ở trên được gọi là các dạng chính tắc của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$. Sự phân tích trên cho kết quả sau.

Định lý 2.5.1.1. *Đối với mọi siêu mặt bậc hai* $(\mathcal{S})$ *trong không gian Euclid* $\mathbf{E}^n$ *ta luôn tìm được mục tiêu trực chuẩn sao cho phương trình của* $(\mathcal{S})$ *đối với mục tiêu đó có một trong ba dạng chính tắc* (I), (II), (III) *ở trên.*

Hệ quả 2.5.1.2. *Hai siêu mặt bậc hai là bằng nhau nếu chúng có phương trình chính tắc giống nhau.*

Ví dụ 2.5.1.3. Trong mặt phẳng Euclid với hệ tọa độ trực chuẩn ta có

+ $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$ là phương trình chính tắc của elip.

+ $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$ là phương trình chính tắc của hypebol.

+ $x_1^2 = 2px_2$ là phương trình chính tắc của parabol.

Ví dụ 2.5.1.4. Trong $\mathbf{E}^3$ với mục tiêu trực chuẩn $\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ cho siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6x_3 + 1 = 0.$$

Hãy tìm mục tiêu trực chuẩn sao cho $(\mathcal{S})$ có dạng chính tắc và viết phương trình chính tắc đó.

Giải. Ma trận A của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ đối với mục tiêu cho trước là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ta chéo hóa A bằng biến đổi tọa độ trực chuẩn. Đa thức đặc trưng của A là:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 6).$$

Vậy A có hai giá trị riêng là $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 6$.

Ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 0$, các vectơ riêng có tọa độ thỏa mãn phương trình $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, có dạng: $\vec{a} = \left(\alpha, \beta, -\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Ta lấy một trong các vectơ đó: $\vec{a}_1 = (1, -1, 0)$. Vectơ thứ hai là $\vec{a}_2$ ta chọn vuông góc với $\vec{a}_1$ và cũng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 0$.

Tọa độ của vectơ $\vec{a}_2$ thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_2 \quad = \quad 0 \quad \left(\text{để } \vec{a}_2 \perp \vec{a}_1\right), \\ x_2 + \quad x_2 + 2x_3 = 0 \quad \left(\text{ứng với giá trị riêng } \lambda_2 = 0\right). \end{cases}$$

Ta có thể chọn $\vec{a}_2 = (1, 1, -1)$ thỏa mãn điều kiện trên.

Vectơ $\vec{a}_3$ ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = 6$ trực giao với $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ (Theo Bổ đề 2.1.5.4), có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}.$$

Ta có thể chọn $\vec{a}_3 = (1, 1, 2)$ thỏa mãn điều kiện trên. Hệ vectơ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vuông góc với nhau từng đôi một. Đặt

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$
$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{a}_3}{|\vec{a}_3|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

ta có cơ sở trực chuẩn $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Xét phép biến đổi tọa độ trực chuẩn $[x] = B\,[x']$, trong đó

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Qua phép biến đổi $[x] = B\,[x']$ ma trận A của $(\mathcal{S})$ trở nên ma trận $B^T AB$ có dạng chéo như sau:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Đối với mục tiêu mới ứng với cơ sở trực chuẩn $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, phương trình của $(\mathcal{S})$ là:

$$6x_3'^2 + \frac{6x'_2}{\sqrt{3}} - \frac{12x_3'}{6} + 1 = 0.$$

Dùng phép biến đổi mục tiêu trực chuẩn:

$$\begin{cases} X_1 = & x_1' \\ X_2 = & x_2' \\ X_3 = & x'_3 - \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}.$$

thì trong mục tiêu trực chuẩn mới này $(\mathcal{S})$ có phương trình:

$$6X_3^2 + \frac{6X_2}{\sqrt{3}} = 0,$$

hay

$$\sqrt{3}X_3^2 + X_2 = 0.$$

Đây là mặt trụ parabolic.

2.5.2 *Phương chính của siêu mặt bậc hai trong không gian Euclid*

Định nghĩa 2.5.2.1. Trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}$ có phương trình:

$$[x]^T A[x] + 2[a]^T[x] + a_0 = 0. \tag{2.16}$$

vectơ $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq \vec{0}$ được gọi là phương chính của $(\mathcal{S})$ nếu $A[c] = \lambda[c]$ tức là $\sum_{j=1}^n a_{ji}c_j = \lambda c_i$ với $i = 1, 2, \ldots, n$. Nói cách khác, $\vec{c}$ là phương chính của $(\mathcal{S})$ nếu $\vec{c}$ là vectơ riêng của ma trận A.

Tính chất 2.5.2.2. *i) Phương chính không phải là phương tiệm cận khi và chỉ khi giá trị riêng tương ứng $\lambda \neq 0$.*

ii) Siêu phẳng kính liên hợp với phương chính $\vec{c}$ được gọi là siêu phẳng kính chính, có phương vuông góc với $\vec{c}$. Từ đó phép đối xứng qua siêu phẳng kính chính của $\mathcal{S}$ biến $\mathcal{S}$ thành chính nó.

Chứng minh. i) Thật vậy, $\vec{c}$ là phương chính của siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}$ khi và chỉ khi $A[c] = \lambda[c]$. Từ đó ta suy ra $[c]^T A[c] = \lambda[c]^T[c]$.

Do $\vec{c} \neq \vec{0}$ nên $[c]^T[c] \neq 0$. Vậy $[c]^T A[c] = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

ii) Thật vậy, nếu $\vec{c}$ không phải là phương tiệm cận của $(\mathcal{S})$, nghĩa là $[c]^T A[c] \neq 0$, thì siêu phẳng kính liên hợp với phương $\vec{c}$ có phương trình

$$[x]^T A[c] + [a]^T[c] = 0.$$

Vì $\vec{c}$ là phương chính nên $A[c] = \lambda[c]$. Phương trình siêu phẳng kính trở thành

$$\lambda[c]^T A[x] + [c]^T[a] = 0.$$

Do đó $\vec{c}$ là vectơ pháp tuyến của siêu phẳng kính có phương trình trên. $\square$

Định lý 2.5.2.3. *Trong* $\mathbf{E}^n$ *với mục tiêu trực chuẩn* $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$*, nếu siêu mặt phẳng bậc hai* $\mathcal{S}$ *có phương trình:*

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0$$

thì các vectơ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *đều là các phương chính của* $(\mathcal{S})$*. Đặc biệt, nếu phương trình của* $(\mathcal{S})$ *có dạng chính tắc thì các vectơ* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *đều là các phương chính.*

Chứng minh. Theo giả thiết, ma trận A của $(\mathcal{S})$ là

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_n \end{bmatrix}$$

nên các vectơ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ là các vectơ riêng ứng với các giá trị riêng $b_1, b_2, \ldots, b_n$. $\square$

Ví dụ 2.5.2.4. Cho elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ trong hệ tọa độ trực chuẩn, khi đó phương của các trục tọa độ là phương chính và hai đường kính chính là hai trục của elip.

2.5.3 *Siêu cầu trong không gian Euclid*

a) Siêu cầu thực

Định nghĩa 2.5.3.1. Trong $\mathbf{E}^n$ cho một điểm I cố định, tập hợp tất cả những điểm M thuộc $\mathbf{E}^n$ sao cho $d(I, M) = r$ với số thực $r > 0$ cho trước được gọi là siêu cầu thực (hay siêu cầu) tâm I bán kính r.

Ký hiệu $S(I, r) = \{M \in E^n \mid d(I, M) = r\}$. Siêu cầu trong $\mathbf{E}^2$ còn được gọi là đường tròn, siêu cầu trong $\mathbf{E}^3$ còn được gọi là mặt cầu. Bây giờ ta xét phương trình của siêu cầu trong một mục tiêu trực chuẩn. Giả sử đối với mục tiêu trực chuẩn, điểm I có tọa độ là $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và gọi tọa độ của một điểm M là $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Khi đó điều kiện cần và đủ để điểm M nằm trên siêu cầu tâm I bán kính r là

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} = r \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2.$$

Phương trình siêu cầu $S(I, r)$ còn có thể viết dưới dạng:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - r^2 = 0. \tag{2.17}$$

Vậy một siêu cầu thực $\mathcal{S}(I, r)$ là một siêu mặt bậc hai. Đổi tọa độ (afin)

$$X_i = \frac{x_i - a_i}{r}, i = 1, \ldots, n,$$

phương trình của siêu cầu trong hệ tọa độ $(X_1, \ldots, X_n)$ có dạng

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 = 1.$$

Từ đó, siêu cầu thuộc loại siêu mặt elipxoit. Đặc biệt, đường tròn trong mặt phẳng thuộc loại elip, mặt cầu trong không gian 3 chiều thuộc loại mặt elipxoit.

Định nghĩa 2.5.3.2. Cho siêu cầu thực $\mathcal{S}(I, r)$ trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$. Miền trong của siêu cầu thực $\mathcal{S}(I, r)$ là tập hợp các điểm T thuộc $\mathbf{E}^n$ mà $d(I, T) < r$. Miền ngoài của siêu cầu thực $\mathcal{S}(I, r)$ là tập hợp các điểm N thuộc $\mathbf{E}^n$ mà $d(I, N) > r$.

Tính chất 2.5.3.3. *i) Miền trong của siêu cầu thực $\mathcal{S}(I, r)$ là tập lồi.*

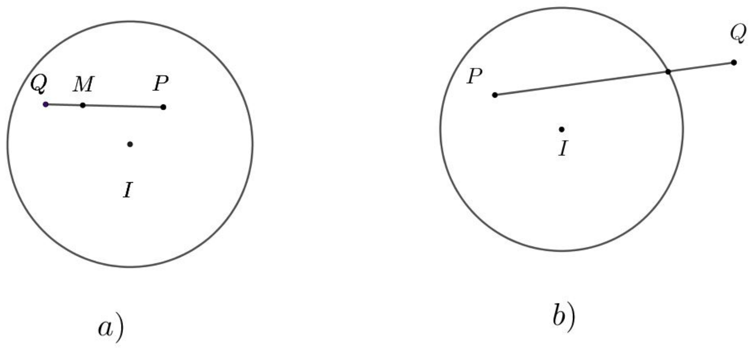
ii) Đoạn thẳng nối một điểm thuộc miền trong với một điểm thuộc miền ngoài cắt siêu cầu thực $\mathcal{S}(I, r)$ tại một điểm.

Chứng minh. i) Thật vậy, với P, Q là hai điểm thuộc miền trong của siêu cầu thực $\mathcal{S}(I, r), M$ là một điểm bất kì thuộc đoạn thẳng PQ (Hình 2.5a). Ta có

$$\overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{IP} + (1-t)\overrightarrow{IQ}, 0 \leq t \leq 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IM}^2 &= t^2\overrightarrow{IP}^2 + (1-t)^2\overrightarrow{IQ}^2 + 2t(1-t)\overrightarrow{IP}\overrightarrow{IQ} \\ &\leq t^2r^2 + (1-t)^2r^2 + 2t(1-t)r \cdot r = r^2.\end{aligned}$$



Hình 2.5

Vậy M là một điểm thuộc miền trong.

ii) Thật vậy, để ý rằng một điểm M thuộc đường thẳng PQ khi và chỉ khi với điểm I bất kỳ tồn tại $t \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{IP} + (1-t)\overrightarrow{IQ}$.

Ngoài ra, M thuộc đoạn thẳng PQ khi và chỉ khi $t \in [0, 1]$. Giả sử P là một điểm thuộc miền trong của siêu cầu thực $\mathcal{S}(I, r), Q$ là một điểm thuộc miền ngoài của siêu cầu thực $S(I, r)$ (Hình 2.5b). Xét hàm số

$$\begin{aligned} f(t) &= (t\overrightarrow{IP} + (1-t)\overrightarrow{IQ})^2, t \in \mathbb{R} \\ &= t^2\overrightarrow{IP}^2 + (1-t)^2\overrightarrow{IQ}^2 + 2t(1-t)\overrightarrow{IP} \cdot \overrightarrow{IQ}. \end{aligned}$$

Ta có $f(0) = \overrightarrow{IQ}^2 > r^2, f(1) = \overrightarrow{IP}^2 < r^2$. Vậy có $t \in (0, 1)$ để $f(t) = (t\overrightarrow{IP} + (1-t)\overrightarrow{IQ})^2 = r^2$. Tức có M thuộc đoạn thẳng PQ sao cho $\overrightarrow{IM}^2 = r^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{IM}\| = r$. Điều này có nghĩa là đoạn thẳng PQ cắt siêu cầu tại một điểm M. □

b) Siêu cầu tổng quát

Định nghĩa 2.5.3.4. Trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ một siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}$ được gọi là siêu cầu tổng quát nếu đối với một mục tiêu trực chuẩn phương trình của nó có dạng:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0. \tag{2.18}$$

hay

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_0. \tag{2.19}$$

+ Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_0 > 0$ thì (2.19) là phương trình của một siêu cầu thực tâm $I(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

+ Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_0 = 0$ thì siêu cầu $\mathcal{S}$ được gọi là siêu cầu điểm tâm I bán kính 0.

+ Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_0 < 0$ thì siêu cầu $\mathcal{S}$ được gọi là siêu cầu ảo tâm I vì nó không chứa điểm thực nào.

Nhận xét 2.5.3.5. i) Đối với siêu cầu tổng quát mọi vectơ $\vec{c} \neq \vec{0}$ đều không phải là phương tiệm cận và luôn là phương chính.

Thật vậy, vì ma trận A của phương trình siêu cầu tổng quát là ma trận đơn vị nên mọi $\vec{c} \neq 0$ đều là phương chính.

ii) Mọi siêu phẳng đi qua tâm $I(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ của siêu cầu tổng quát đều là siêu phẳng kính chính và trực giao với phương liên hợp.

Thật vậy, siêu phẳng qua tâm I có phương trình dạng $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i + a_i) = 0$. Đó là siêu phẳng kính liên hợp với phương $\vec{\alpha}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, là phương chính, nên siêu phẳng kính là siêu phẳng kính chính. Rõ ràng phương liên hợp $\vec{\alpha}$ là vectơ pháp tuyến của siêu phẳng kính.

iii) Siêu phẳng đi qua điểm M_0 thuộc siêu cầu $\mathcal{S}(I, r)$ và vuông góc với đường thẳng IM_0 là siêu tiếp diện của siêu cầu tại điểm M_0. Vectơ $\overrightarrow{IM_0}$ là vectơ pháp tuyến của siêu tiếp diện.

Thật vậy, ta có phương trình của siêu tiếp diện của siêu cầu tại điểm M_0 chính là phương trình của siêu phẳng qua M_0 và vuông góc với đường thẳng IM_0.

Định lý 2.5.3.6. *Cho hệ $n+1$ điểm trong không gian $\mathbf{E}^n$. Khi đó điều kiện cần và đủ để hệ điểm đó độc lập là tồn tại duy nhất một siêu cầu đi qua mọi điểm của hệ.*

Chứng minh. Giả sử n +1 điểm độc lập $A_i, i = 1, 2, \ldots, n+1$ có tọa độ đối với một mục tiêu trực chuẩn là $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in+1})$. Siêu cầu chứa các điểm đó có phương trình đối với mục tiêu trực chuẩn trên là

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 - \ldots - 2a_nx_n + b = 0.$$

Thay tọa độ các điểm A_i và phương trình trên ta nhận được hệ $n+1$ phương trình tuyến tính với các ẩn $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$. Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & 1 \\ a_{n+11} & \ldots & a_{n+1n} & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Điều này tương đương với hệ điểm là độc lập. Do đó điều kiện độc lập của hệ điểm là cần và đủ để tồn tại duy nhất một siêu cầu chứa các điểm của hệ. □

c) Phương tích của một điểm đối với một siêu cầu

Định nghĩa 2.5.3.7. Trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu cho trước, cho siêu cầu $(\mathcal{S})$ có phương trình:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0.$$

Với mỗi điểm M_0 thuộc $\mathbf{E}^n$ có tọa độ trực chuẩn $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, giá trị

$$f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x^0\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^0 + a_0$$

được gọi là phương tích của điểm M_0 đối với siêu cầu $(\mathcal{S})$ và ký hiệu $P(M_0)/(\mathcal{S})$.

Ta có $P(M_0)/(\mathcal{S}) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Định lý 2.5.3.8. *Trong $\mathbf{E}^n$ cho siêu cầu $\mathcal{S}(I, r)$ và một đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 cắt siêu cầu $\mathcal{S}$ tại hai điểm M_1 và M_2. Khi đó:*

$$P(M_0)/(\mathcal{S}) = \overrightarrow{M_0M}_1 \cdot \overrightarrow{M_0M}_2.$$

Chứng minh. Giả sử đối với mục tiêu trực chuẩn đã chọn, điểm M_0 có tọa độ $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ và vectơ chỉ phương của đường thẳng có Δ tọa độ là $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Khi đó đường thẳng Δ có phương trình:

$$x_i = x_i^0 + \lambda u_i \text{ với } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Để tìm các giao điểm M_1 và M_2 của đường thẳng Δ với mặt cầu $\mathcal{S}$ ta phải giải phương trình sau:

$$\left(\left(\left[x^0\right] + [\lambda u]\left(\left[x^0\right] + [\lambda u]\right) + 2[a]\left(\left[x^0\right] + [\lambda u]\right) + a_0 = 0\right)$$

hay

$$\left([u]^T[u]\right)\lambda^2 + 2\left([u]^T\left[x^0\right] + [a]^T[u]\right)\lambda + \left[x^0\right]^T\left[x^0\right] + 2[a]^T\left[x^0\right] + a_0 = 0.$$

Đây là một phương trình bậc hai đối với λ. Gọi λ_1, λ_2 là nghiệm của phương trình trên, ứng với hai giao điểm M_1, M_2. Ta có:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{[x^0]^T [x^0] + 2[a]^T [x^0] + a_0}{[u]^T [u]} = \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{[u]^T [u]}.$$

Mặt khác ta có: $\overrightarrow{M_0M}_1 = \lambda_1 \vec{u}, \overrightarrow{M_0M}_2 = \lambda_2.\vec{u}$. Do đó:

$$\overrightarrow{M_0M}_1 \cdot \overrightarrow{M_0M}_2 = \lambda_1\lambda_2\vec{u}^2 = \lambda_1\lambda_2[u]^T[u] = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) =$$
$$= P(M_0)/(\mathcal{S}).$$ □

Định lý 2.5.3.9. *Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai siêu cầu $(\mathcal{S}_1)$ và $(\mathcal{S}_2)$ có tâm không trùng nhau. Khi đó tập hợp những điểm M có cùng phương tích đối với $(\mathcal{S}_1)$ và $(\mathcal{S}_2)$ sẽ nằm trên một siêu phẳng. Siêu phẳng này vuông góc với đường thẳng nối hai tâm của hai siêu cầu đã cho.*

Chứng minh. Trong $\mathbf{E}^n$ giả sử đối với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho hai siêu cầu có tâm không trùng nhau lần lượt có phương trình là:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x]^T[x] + 2[a]^T[x] + a_0 = 0 \ (\mathcal{S}_1),$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x]^T[x] + 2[b]^T[x] + b_0 = 0 \ \ (\mathcal{S}_2).$$

Những điểm $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có cùng phương tích đối với $(\mathcal{S}_1)$ và $(\mathcal{S}_2)$ phải có tọa độ thỏa mãn điều kiện:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

hay

$$2([a] - [b])^T[x] + a_0 - b_0 = 0. \tag{2.20}$$

Siêu cầu $(\mathcal{S}_1)$ có tâm $I_1(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$, siêu cầu $(\mathcal{S}_2)$ có tâm $I_2(-b_1, -b_2, \ldots, -b_n)$. Vì $I_1 \neq I_2$ nên (2.20) là phương trình của một siêu phẳng. Siêu phẳng này nhận vectơ $\vec{n} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)$ làm vectơ pháp tuyến nên nó vuông góc với đường thẳng nối hai tâm I_1 và I_2 của $(\mathcal{S}_1)$ và $(\mathcal{S}_2)$. □

Định nghĩa 2.5.3.10. Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai siêu cầu $(\mathcal{S}_1)$ và $(\mathcal{S}_2)$ không đồng tâm là một siêu phẳng. Siêu phẳng này được gọi là siêu phẳng đẳng phương của hai siêu cầu đã cho.

Siêu phẳng đẳng phương luôn vuông góc với đường thẳng nối hai tâm của hai siêu cầu cho trước.

Trong mặt phẳng ta có trục đẳng phương (siêu phẳng đẳng phương) của hai đường tròn là một đường thẳng vuông góc với đường thẳng nối hai tâm của hai đường tròn.

2.5.4 *Bất biến của hàm đa thức bậc hai và ứng dụng*

Trong mục này chúng ta trình bày một số bất biến của hàm đa thức bậc hai và sử dụng chúng để nghiên cứu đường bậc hai trong mặt phẳng Euclid.

a) Bất biến của hàm đa thức bậc hai

Trong không gian Euclid n chiều $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn, cho siêu mặt hai $(\mathcal{S})$ xác định bởi phương trình:

$$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_0 = 0. \tag{2.21}$$

Vế trái của phương trình (2.21) được gọi là một hàm đa thức bậc hai. Ta thấy một hàm đa thức bậc hai hoàn toàn được xác định bởi ma trận

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a^T \\ a & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

Thật vậy, bởi tính chất của phép nhân ma trận ta có

$$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_0 & a^T \\ a & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Dùng phép biến đổi mục tiêu trực chuẩn

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_j + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

đưa phương trình (2.21) về dạng

$$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} a'_{ij}x'_i x'_j + 2\sum_{i=1}^{n} a'_i x'_i + a'_0 = 0. \tag{2.24}$$

Khi đó hàm đa thức bậc hai được xác định bởi ma trận

$$\overline{A'} = \begin{bmatrix} a'_0 & a'^T \\ a' & A' \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Nếu đặt $C = (c_{ij})$, $d = [d_1\ d_2\ \ldots\ d_n]^T$ và

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & C \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

thì với các phép tính toán trực tiếp ta có

$$\overline{A'} = \overline{C}^T \overline{A}\ \overline{C}.$$

Định nghĩa 2.5.4.1. Xét $\mathcal{M}$ là tập hợp tất cả các ma trận đối xứng $\overline{A}$ dạng (2.25) với các phép biến đổi $\overline{A} \mapsto \overline{C}^T \overline{A}\ \overline{C}$ của $\mathcal{M}$ vào chính nó. Một hàm $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ trên $\mathcal{M}$ được gọi là bất biến đối với mọi biến đổi nói trên nếu $\varphi(\overline{A}) = \varphi(\overline{C}^T \overline{A}\ \overline{C})$.

Nhận xét 2.5.4.2. Từ định nghĩa trên, ta thấy bất biến đối với mọi biến đổi dạng trên tương đương bất biến đối với mọi biến đổi mục tiêu Euclid hay đối với mọi biến đổi đẳng cự của $\mathbf{E}^n$.

Định nghĩa 2.5.4.3. Nếu hạn chế chỉ xét các phép biến đổi dạng $\overline{A} \mapsto Q^T\overline{A}Q$ với $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ với C là ma trận trực giao thì hàm $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ mà $\varphi(\overline{A}) = \varphi(Q^T\overline{A}Q)$ với mọi $\overline{A} \in \mathcal{M}$ và với mọi Q dạng trên thì φ được gọi là bán bất biến.

Từ các định nghĩa trên ta có nhận xét rằng: nếu bán bất biến φ là bất biến với các phép tịnh tiến, tức là $\varphi(\overline{A}) = \varphi(P^T\overline{A}P)$ với mọi $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & I_n \end{bmatrix}$ thì φ trở thành một bất biến.

Trong đại số tuyến tính ta có đẳng thức sau:

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I_n) = (-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}J_1\lambda^{n-1}+(-1)^{n-2}J_2\lambda^{n-2}+\ldots+J_n, \tag{2.27}$$

trong đó

$$J_r = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} \begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \ldots & a_{i_1i_r} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \ldots & a_{i_2i_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_ri_1} & a_{i_ri_2} & \ldots & a_{i_ri_r} \end{vmatrix}, r = 1, \ldots, n. \tag{2.28}$$

Xét ánh xạ $J_r : \mathbf{M} \to \mathbb{R}, \overline{A} \mapsto J_r$, trong đó J_r được xác định bởi công thức (2.28). Ta có kết quả sau:

Định lý 2.5.4.4. *Các hàm J_r $(r = 1, \ldots, n)$ nói trên là những bất biến.*

Chứng minh. Ta có $\det(A'-\lambda I_n) = \det(C^TAC-\lambda I_n) = \det(C^TAC-C^T\lambda I_nC) = \det C^T(A-\lambda I_n)C^T = \det C^T \cdot \det(A-\lambda I_n) \cdot \det C = \det C^T \cdot \det C^T \cdot \det(A-\lambda I_n) = \det(C^TC) \cdot \det(A-\lambda I_n) = \det(A-\lambda I_n)$ (do C là ma trận trực giao). □

Nhận xét 2.5.4.5. Ta đã biết rằng bằng cách chọn một mục tiêu trực chuẩn thích hợp (xem Định lý 2.5.1.1), phương trình của mặt bậc hai đã cho sẽ có một trong các dạng sau đây

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2 + m = 0 \quad ,1 \le r \le n, m \ne 0; \tag{I}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2 = 0 \quad ,1 \le r \le n; \tag{II}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2 + 2mx'_{r+1} = 0 \quad ,1 \le r < n. \tag{III}$$

Khi đó các $J_{r+1}, J_{r+2}, \ldots, J_n$ đều bằng 0 và $J_1, J_2, \ldots, J_r$ là các hàm đối xứng sơ cấp thứ $1, 2, \ldots, r$ của các giá trị riêng khác 0 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ của A: $J_1 = \sum_{1\le i\le r} \lambda_i$; $J_2 = \sum_{1\le i<j\le r} \lambda_i\lambda_j$; $J_3 = \sum_{1\le i<j<k\le r} \lambda_i\lambda_j\lambda_k; \ldots$; $J_r = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r$.

Định lý 2.5.4.6. *Hàm* $\psi : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$ *được xác định bởi*

$$\overline{A} \mapsto det\begin{pmatrix} a_0 & a^T \\ a & A - \lambda I_n \end{pmatrix},$$

trong đó λ *là một số bất kỳ, là một bán bất biến.*

Chứng minh. Với $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ và vì C là ma trận trực giao, ta có $\psi(Q^T\overline{A}Q) = \det\begin{bmatrix} a_0 & a^TC \\ C^Ta & C^TAC - \lambda I_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C^T \end{bmatrix} \cdot \det\begin{bmatrix} a_0 & a^T \\ a & A - \lambda I_n \end{bmatrix} \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_0 & a^T \\ a & A - \lambda I_n \end{bmatrix} = \psi(\bar{A})$. Do đó ψ là một bán bất biến. □

Từ định lý trên dễ dàng suy ra:

Hệ quả 2.5.4.7. *Các hệ số của đa thức bậc* n *của* λ*:* $det\begin{bmatrix} a_0 & a^T \\ a & A - \lambda I_n \end{bmatrix} = K_1(-\lambda)^n + K_2(-\lambda)^{n-1} + \ldots + K_n(-\lambda) + K_{n+1}$*, trong đó* $K_1 = a_0$*,* $K_{n+1} = det(\overline{A})$*,*

$$K_{r+1} = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} \begin{vmatrix} a_0 & a_{i_1} & a_{i_2} & \ldots & a_{i_r} \\ a_{i_1} & a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \ldots & a_{i_1i_r} \\ a_{i_2} & a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \ldots & a_{i_2i_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r} & a_{i_ri_1} & a_{i_ri_2} & \ldots & a_{i_ri_r} \end{vmatrix}, r = 2, \ldots, n, \text{ là}$$

các bán bất biến.

Định lý 2.5.4.8. *i) Nếu* $\overline{A}$ *có dạng chính tắc (I) và* $r < n$*, thì*
\+ $K_{r+2} = \mathrm{K}_{r+3} = \ldots = K_{n+1} = 0$*;*
\+ $K_{r+1} = m\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r = mJ_r \neq 0$*.*
ii) Nếu $\overline{A}$ *có dạng chính tắc (II) và* $r < n$*, thì*

$$K_i = 0 \text{ với } \forall i > r.$$

iii) Nếu A *có dạng chính tắc (III) thì*

$$K_{r+2} = (-1)^{r+2}m(-1)^{r+1}m\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r = -m^2J_r \neq 0$$

iv) Bán bất biến $K_{n+1} = \det\overline{A}$ *là một bất biến.*

Chứng minh. i) Đổi mục tiêu trực chuẩn $x = Cy + c$ phương trình của $\mathcal{S}$ trở thành

$$y^T(C^TAC)y + 2(c^TA + a^T)Cy + c^TAc + 2a^Tc + a_0. \tag{2.29}$$

Giả sử C là ma trận trực giao sao cho C^TAC có dạng

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \lambda_i \neq 0 \ \forall i = 1, \ldots, r. \tag{2.30}$$

Vì K_i là các bán bất biến nên

$$\begin{aligned} K_i\left(\begin{bmatrix} a_0 & a^T \\ a & A \end{bmatrix}\right) &= K_i\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 & a^T \\ a & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\right) \\ &= K_i\left(\begin{bmatrix} a_0 & a^TC \\ C^Ta & C^TAC \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Vì $\mathcal{S}$ có dạng (I) nên ta có thể lấy c để với mục tiêu trực chuẩn ở trên $x = Cy + c$, $\mathcal{S}$ có dạng

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 + m = 0 \quad , 1 \leq r \leq n, m \neq 0. \tag{2.31}$$

Từ (2.29) và (2.31) ta có

$$Ac + a = 0 \text{ và } m = c^TAc + 2a^Tc + a_0 \neq 0. \tag{2.32}$$

Do đó c là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $Ax = -a$. Từ đó ta suy ra a là một tổ hợp tuyến tính của các ma trận cột của ma trận A. Điều này kết hợp với dạng của ma trận C^TAC như 2.30, ta suy ra

$$a^TC_{r+1} = \ldots = a^TC_n = 0, \tag{2.33}$$

trong đó C_i là ma trận cột thứ i của C.

Ta đã chứng minh được rằng ma trận $\begin{bmatrix} a_0 & a^TC \\ C^Ta & C^TAC \end{bmatrix}$ có dạng

$$\begin{pmatrix} a_0 & a^TC_1 & a^TC_2 & \dots & a^TC_r & 0 & \dots & 0 \\ a^TC_1 & \lambda_1 & & & & & & \\ a^TC_2 & & \lambda_2 & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & 0 & \\ a^TC_r & & & & \lambda_r & & & \\ 0 & & & & & 0 & & \\ \vdots & & 0 & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Do đó các định thức con cấp lớn hơn $r+1$ đều có chứa ít nhất một cột không, nên $K_{r+1} = \ldots = K_n = 0$.

Hơn nữa vì $C_i^TC_i = 1$ nên (khai triển định thức sau theo cột 1)

$$K_{r+1} = \det \begin{pmatrix} a_0 & a^TC_1 & a^TC_2 & \dots & a^TC_r \\ a^TC_1 & \lambda_1 & & & \\ a^TC_2 & & \lambda_2 & 0 & \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ a^TC_r & & & & \lambda_r \end{pmatrix} = J_r(a_0 - \sum_{i=1}^{r} \frac{a^Ta}{\lambda_i}). \tag{2.35}$$

Ở trên ta đã chỉ ra rằng c là một nghiệm của hệ $Ax = -a$, tức $Ac = -a$, suy ra $C^TAc = -C^Ta$. Do đó $(C^TAC)C^Tc = -C^Ta$ (vì C là ma trận trực giao). Bởi dạng của C^TAC và (2.33) ta suy ra r phần tử đầu tiên của C^Tc là

$$-\frac{C_1^Ta}{\lambda_1}, -\frac{C_2^Ta}{\lambda_2}, \ldots, -\frac{C_r^Ta}{\lambda_r}, \text{ trong đó } C_i \text{ ma trận cột thứ } i \text{ của } C. \tag{2.36}$$

Theo (2.32), (2.33), (2.36) và c là một nghiệm của hệ $Ax = -a$, nên $m = c^TAc + 2a^Tc + a_0 = a_0 + (Ac + 2a^T)c = a_0 + a^Tc = a_0 + a^TCC^Tc = a_0 + (a^TC)(C^Tc) = a_0 - \sum_{i=1}^r \dfrac{a^Ta}{\lambda_i}$. Kết hợp với (2.35) ta có $K_{r+1} = mJ_r$, điều phải chứng minh.

ii) và iii) được chứng minh tương tự phần i).

iv) Vì $\overline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & C \end{bmatrix}$ và C là một ma trận trực giao nên ta có $\det(\overline{C}^T) = \det(\overline{C}) = 1$, do đó $\det(\overline{C}^T \overline{A} \overline{C})$=$\det(\overline{A})$, tức K_{n+1} là bất biến. □

b) Nghiên cứu đường bậc hai nhờ bất biến

Trong mặt phẳng Euclid $\mathbf{E}^2$ với mục tiêu trực chuẩn, cho đường bậc hai $(\mathcal{S})$ xác định bởi phương trình sau:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_{22} + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0. \tag{2.37}$$

Xét các bất biến

$$\begin{aligned} J_1 &= a_{11} + a_{22}, \\ J_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det(\mathrm{A}). \end{aligned}$$

Khi đó λ_1, λ_2 là các giá trị riêng của A cũng là nghiệm của phương trình

$$\lambda^2 - J_1\lambda + J_2 = 0.$$

Xét các bán bất biến:

$$\begin{aligned} K_1 &= a_0, \\ K_2 &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \\ K_3 &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det(\overline{\mathrm{A}}). \end{aligned}$$

+ Nếu $(\mathcal{S})$ có phương trình dạng chính tắc (I), tức là

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + m = 0. \tag{I}$$

thì $K_3 = mJ_2$. Do đó

- Nếu $J_2 \neq 0$ thì $m = \frac{K_3}{J_2}$. Do đó phương trình của $(\mathcal{S})$ có dạng

$$(\mathcal{S}): \quad \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \frac{K_3}{J_2} = 0 \quad (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0)\,. \tag{2.38}$$

- Nếu $J_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ thì $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ hoặc $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ (do rank$(A) > 0$). Theo Định lý 2.5.4.8, ta có $m = \dfrac{K_2}{J_1}$. Khi đó phương trình của $(\mathcal{S})$ là:

$$(\mathcal{S}): \quad \lambda_1 x_1'^2 + \frac{K_2}{J_1} = 0\,(\lambda_1 \neq 0)\,. \tag{2.39}$$

Nếu $\mathcal{S}$ có phương trình chính tắc (II) thì $\mathcal{S}$ có phương trình dạng

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 = 0, \lambda_1, \lambda_2 \neq 0.$$

Nếu $\mathcal{S}$ có phương trình chính tắc (III) thì $\mathcal{S}$ có phương trình dạng

$$\lambda_1 x_1'^2 + 2m x_2' = 0, \lambda_1 \neq 0.$$

Khi đó theo Định lý 2.5.4.8, $K_3 = -m^2 J_1$ suy ra $m^2 = -\dfrac{K_3}{J_1}$. Do đó, phương trình của $(\mathcal{S})$ có dạng

$$\lambda_1 x_1'^2 \pm \sqrt{-\frac{K_3}{J_1}} x_2' = 0.$$

2.5.5 *Phân loại đường bậc hai nhờ bất biến*

Xét hai trường hợp sau:

1) Trường hợp $K_3 \neq 0$. Khi đó $(\mathcal{S})$ là một đường bậc hai không suy biến.

(a) Nếu $J_2 \neq 0$ thì phương trình chuẩn tắc $(\mathcal{S})$ có dạng

$$(\mathcal{S}): \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \frac{K_3}{J_2} = 0 \quad (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0)\,.$$

Xét các trường hợp sau:

- Nếu $J_2 > 0$ thì λ_1, λ_2 cùng dấu. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

+ Nếu $K_3.J_1 < 0$ thì $K_3 > 0$ do $J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Do đó phương trình của $(\mathcal{S})$ có thể đưa về dạng

$$(\mathcal{S}) : \frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{x_2'^2}{b^2} = 1 \quad \text{với} \quad a = \sqrt{\frac{K_3}{J_2\,(-\lambda_1)}}, b = \sqrt{\frac{K_3}{J_2\,(-\lambda_2)}}.$$

Suy ra $(\mathcal{S})$ là một elip thực.

+ Nếu $K_3.J_1 > 0$ thì $K_3 < 0$ do $J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Do đó phương trình của $(\mathcal{S})$ có thể đưa về dạng

$$(\mathcal{S}) : \quad \frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{x_2'^2}{b^2} = -1 \quad \text{với} \quad a = \sqrt{\frac{K_3}{J_2\lambda_1}}, b = \sqrt{\frac{K_3}{J_2\lambda_2}}.$$

Suy ra $(\mathcal{S})$ là một elip ảo.

- Nếu $J_2 < 0$ thì λ_1, λ_2 trái dấu. Không mất tính tổng quát giả sử $K_3 < 0, \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. Khi đó, phương trình của $(\mathcal{S})$ có thể được viết lại dưới dạng:

$$(\mathcal{S}) : \frac{x_1'^2}{a^2} - \frac{x_2'^2}{b^2} = 1 \quad \text{với} \quad a = \sqrt{\frac{-K_3}{J_2\lambda_1}}, b = \sqrt{\frac{K_3}{J_2\lambda_2}}.$$

Suy ra $\mathcal{S}$ là một hypebol.

Tóm lại ta có $(\mathcal{S})$ là $\begin{cases} \text{elip thực} & \text{nếu} \quad J_2 > 0, K_3J_1 < 0, \\ \text{elip ảo} & \text{nếu} \quad J_2 > 0, K_3J_1 < 0, \\ \text{hypebol} & \text{nếu} \quad J_2 < 0. \end{cases}$

(b) Nếu $J_2 = 0$ thì phương trình chuẩn tắc $(\mathcal{S})$ có dạng

$$(\mathcal{S}) : \lambda_1 x_1'^2 \pm 2\sqrt{\frac{-K_3}{J_1}}x_2' = 0\,(\lambda_1 \neq 0)\,.$$

Suy ra $(\mathcal{S})$ là một parabol.

2) Trường hợp $K_3 = 0$. Khi đó $(\mathcal{S})$ là một đường bậc hai suy biến.

(a) Nếu $J_2 \neq 0$ thì phương trình chuẩn tắc $(\mathcal{S})$ có dạng

$$(\mathcal{S}) : \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 = 0 \quad (\lambda_1\lambda_2 \neq 0)\,.$$

Khi đó, nếu $J_2 < 0$ $(J_2 > 0)$ thì $(\mathcal{S})$ là cặp đường thẳng thực (ảo) cắt nhau.

Thật vậy, nếu $J_2 < 0$ thì λ_1, λ_2 trái dấu, không mất tính tổng quát giả sử $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Khi đó $(\mathcal{S})$ có thể được viết dưới dạng:

$$(\mathcal{S}) : \frac{x_1'^2}{a^2} - \frac{x_2'^2}{b^2} = 0 \quad \text{với} \quad a = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}, b = \sqrt{\frac{-1}{\lambda_2}}.$$

Suy ra $(\mathcal{S})$ là cặp đường thẳng thực cắt nhau. Nếu $J_2 > 0$ thì λ_1, λ_2 cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Khi đó $(\mathcal{S})$ có thể được viết dưới dạng:

$$(\mathcal{S}) : \frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{x_2'^2}{b^2} = 0 \quad \text{với} \quad a = \sqrt{\frac{-1}{\lambda_1}}, b = \sqrt{\frac{-1}{\lambda_2}}.$$

Suy ra $(\mathcal{S})$ là cặp đường thẳng ảo cắt nhau.

(b) Nếu $J_2 = 0$ và $K_2 \neq 0$ thì phương trình chuẩn tắc $(\mathcal{S})$ có dạng

$$(\mathcal{S}) : \lambda_1 x_1'^2 + \frac{K_2}{J_1} = 0.$$

Do đó nếu $K_2 < 0$ thì $(\mathcal{S})$ là một cặp đường thẳng thực song song; nếu $K_2 > 0$ thì $(\mathcal{S})$ là cặp đường thẳng ảo song song.

(c) Nếu $J_2 = K_2 = 0$ thì phương trình chuẩn tắc của $(\mathcal{S})$ có dạng

$$(\mathcal{S}) : \lambda_1 x_1'^2 = 0.$$

Suy ra $(\mathcal{S})$ là hai đường thẳng trùng nhau.

Ví dụ 2.5.5.1. Đưa các đường bậc hai sau về dạng chuẩn tắc.

(a) $(\mathcal{S}) : -3x^2 + 4xy - 10x - 2y + 3 = 0$. Ta có:

$$K_3 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ -5 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$$J_1 = -3.$$

Suy ra $(\mathcal{S})$ là 1 hypebol, có phương trình đối với mục tiêu mới:

$$(\mathcal{S}) : \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{K_3}{J_2} = 0,$$

với λ_1, λ_2 là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -4 \end{array} \right. .$$

Suy ra phương trình chuẩn tắc của $(\mathcal{S})$ là

$$\frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{\sqrt{11}}{4}\right)^2} = 1.$$

(b) $(\mathcal{S}) : 8x^2 + 2y^2 + 16xy + 20x + 4y + 9 = 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} K_3 &= \begin{vmatrix} 9 & 10 & 2 \\ 10 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -72 \neq 0, \\ J_2 &= \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \\ J_1 &= 2 + 8 = 10. \end{aligned}$$

Suy ra $(\mathcal{S})$ là một parabol, có phương trình đối với mục tiêu mới:

$$(\mathcal{S}) : \lambda x'^2 \pm 2\sqrt{\frac{-K_3}{J_1}} y' = 0,$$

với λ là nghiệm khác 0 của phương trình:

$$\lambda^2 - 10\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 10.$$

Do đó phương trình chuẩn tắc của $(\mathcal{S})$ là $x'^2 = 2\dfrac{3}{5\sqrt{5}} y'$.

(c) $(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + 6xy + 20x + 4y + 2 = 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} K_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 10 & 2 \\ 10 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ J_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 < 0, \\ J_1 &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Suy ra $(\mathcal{S})$ là cặp đường thẳng cắt nhau, có phương trình trong mục tiêu mới:

$$(\mathcal{S}) : \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0,$$

với λ_1, λ_2 là nghiệm của phương trình:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -2 \end{array} \right. .$$

Do đó phương trình chuẩn tắc của $(\mathcal{S})$ là $4x'^2 - 2y'^2 = 0$.

TÓM TẮT CHƯƠNG 2

Nội dung chính của chương này bao gồm:

1. Khái niệm không gian vectơ Euclid, các khái niệm và tính chất của môđun; góc; các không gian con vuông góc, bù vuông góc; cơ sở trực chuẩn trong không gian vectơ Euclid.

2. Khái niệm và các tính chất của ánh xạ trực giao, biến đổi trực giao.

3. Khái niệm không gian Euclid và các khái niệm trong không gian Euclid: khoảng cách; mục tiêu trực chuẩn; tọa độ trực chuẩn; thể tích của đơn hình m chiều, hình hộp m chiều; các phẳng vuông góc, bù vuông góc; siêu cầu.

4. Khái niệm và tính chất của ánh xạ đẳng cự, biến đổi đẳng cự. Phân loại các phép đẳng cự trong không gian 2 chiều, 3 chiều. Khái niệm Hình học Euclid, Hình học đồng dạng.

TÀI LIỆU ĐỌC THÊM CHƯƠNG 2

[1] Văn Như Cương-Tạ Mân (1988), *Hình học afin và Hình học Euclid*, Nxb ĐHQG Hà Nội (Chương 4).

[2] Nguyễn Mộng Hy (1999), *Hình học cao cấp*, Nxb Giáo dục, Hà Nội (Chương 2).

[3] M. Audin (2002), *Geometry*, Springer Science - Business Media (Chương 2, 3, 4).

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 2

1. Không gian vectơ Euclid là gì?

2. Cơ sở trực chuẩn là gì?

3. Thế nào là hai không gian con trực giao, bù trực giao?

4. Thế nào là ánh xạ trực giao, biến đổi trực giao?

5. Tại sao nói không gian Euclid cũng là không gian afin?

6. Tại sao nói mục tiêu trực chuẩn cũng là mục tiêu afin?

7. Thế nào là hai phẳng trực giao, bù trực giao?

8. Khoảng cách giữa hai phẳng là gì? Đường vuông góc chung có quan hệ gì đến khoảng cách của hai phẳng?

9. Ánh xạ đẳng cự là gì? Phép dời hình, phép phản dời hình là gì?

10. Thế nào là phép đối xứng qua $m-$phẳng? Phép quay quanh $(n-2)-$phẳng?

11. Hình học Euclid là gì?

12. Phép đồng dạng là gì? Hình học đồng dạng là gì?

13. Thế nào là giải một bài toán nhờ tương đương afin?

14. Thế nào là dạng chính tắc của một siêu mặt bậc hai trong không gian Euclid?

15. Siêu cầu là gì? Siêu cầu tổng quát là gì?

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Không gian vectơ Euclid

2.1. Xét $\mathbb{R}^2$ như một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Xét ánh xạ:

$$\xi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \xi(a,b) = a_1b_1 + \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{2} + \frac{a_2b_2}{3}$$

với $a = (a_1, a_2)\,, b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$.

a) Chứng minh ξ là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$.

b) Xét $\mathbb{R}^2$ với tư cách là một không gian vectơ Euclid với tích vô hướng ξ. Hãy chỉ ra một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^2$.

2.2. Trong $\mathbb{R}-$không gian vectơ n chiều $\mathbf{V}$ cho cơ sở $\varepsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Chứng minh rằng trong $\mathbf{V}$ có một tích vô hướng duy nhất để $\mathbf{V}$ trở thành không gian vectơ Euclid mà ε là cơ sở trực chuẩn của nó.

2.3. Trong không gian vectơ Euclid 4 chiều với cơ sở trực chuẩn cho trước, cho các vectơ $\vec{a} = (1,1,3,1), \vec{b} = (-1,2,0,-1), \vec{c} = (-3,4,-1,1), \vec{d} = (0,-1,-4,0)$.

a) Tính $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$ và $(\vec{a} - \vec{d})^2$.

b) Xét tính nhọn, tù, vuông của mỗi cặp vectơ trên.

2.4. Trong không gian vectơ Euclid 3 chiều $\mathbf{V}$ cho hệ 3 vectơ $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ trong đó $\vec{a}_1^2 = 1, \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = -1, \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = 0, \vec{a}_2^2 = 3, \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = 0, \vec{a}_3^2 = 2$.

a) Chứng minh rằng hệ $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ độc lập tuyến tính.

b) Trong $\mathbf{V}$ cho hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ có tọa độ đối với cơ sở $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ là $\vec{u} = (0,1,-1)$, $\vec{v} = (2,1,3)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

c) Trong không gian $\mathbf{V}$ có cơ sở trực chuẩn nào để đối với nó các vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ nói ở câu b) có tọa độ $\vec{u} = (1,0,4), \vec{v} = (0,0,-1)$ hay không?

2.5. Trong không gian vectơ Euclid 4 chiều $\mathbf{V}$ với cơ sở trực chuẩn đã chọn, cho các vectơ $\vec{a}(1,1,1,2), \vec{b}(1,2,3,-3)$.

a) Chứng tỏ $\vec{a}$ trực giao với $\vec{b}$.

b) Hãy bổ sung vào hệ $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ hai vectơ khác 0 nữa để được một cơ sở trực giao.

2.6. Trong không gian vectơ Euclid 4 chiều V với cơ sở trực chuẩn đã chọn, cho các vectơ
$\vec{a}(1, 1, 1, 2), \vec{b}(1, 2, 3, -3), \vec{c}(1, -2, 1, 0), \vec{d}(25, 4, -17, -6)$.

a) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ có phải là hệ trực giao không?

b) Gọi $W = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle, Z = \langle \vec{c}, \vec{d} \rangle$. W và Z có phải là hai không gian con bù trực giao không?

2.7. Trong không gian vectơ Euclid $\mathbf{V}^n$ cho cơ sở trực chuẩn $\varepsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Với $\vec{x} \in \mathbf{V}^n$, giả sử $\vec{x}|_\varepsilon = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Gọi α_i là góc giữa $\vec{x}$ và $\vec{e}_i$. Chứng minh rằng:

a) $x_i = \|\vec{x}\| \cos \alpha_i$.

b) $\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i = 1$.

2.8. Trong không gian vectơ Euclid 4 chiều $\mathbf{V}$ với cơ sở trực chuẩn đã chọn, cho không gian con $\mathbf{W}$ xác định bởi hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 & = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 & = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Tìm hệ phương trình xác định phần bù trực giao $\mathbf{W}^\perp$ của $\mathbf{W}$.

Không gian Euclid

2.9. Trong không gian Euclid n chiều $\mathbf{E}^n$ cho 3 điểm bất kì A, B, C. Chứng minh rằng

a) $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

b) $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ khi và chỉ khi B thuộc đoạn AC.

2.10. Trong không gian Euclid n chiều $\mathbf{E}^n$ cho 4 điểm bất kì A, B, C, D. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

2.11. Trong không gian Euclid n chiều $\mathbf{E}^n$ cho 4 điểm bất kì A, B, C, D.

Chứng minh rằng

$$d(A,B) + d(C,D) + d(A,C) + d(B,D) \geq d(A,D) + d(B,C).$$

2.12. Chứng minh rằng trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ nếu phẳng $\mathbf{P}$ bù vuông góc với phẳng $\mathbb{Q}$ thì $\mathbf{P} + \mathbb{Q} = \mathbf{E}^n$.

2.13. Trong không gian Euclid n chiều $\mathbf{E}^n$ cho phẳng $\mathbf{P}$ và điểm A. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất phẳng $\mathbb{Q}$ đi qua A và bù vuông góc với $\mathbf{P}$.

2.14. Trong không gian Euclid n chiều $\mathbf{E}^n$ cho điểm A và phẳng $\mathbf{P}$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm H sao cho $d(A,H) \leq d(A,M)$, với mọi $M \in \mathbf{P}$.

2.15. Trong không gian Euclid n chiều $\mathbf{E}^n$ cho phẳng $\mathbf{P}$ và đường thẳng Δ vuông góc với $\mathbf{P}$, cắt $\mathbf{P}$ tại điểm H. Cho điểm $A \in \Delta$ và điểm $B \in \mathbf{P}$. Chứng minh

$$[d(A,H)]^2 + [d(H,B)]^2 = [d(A,B)]^2.$$

2.16. Trong không gian Euclid n chiều $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ đã chọn, cho siêu phẳng $\mathbf{P}$ có phương trình

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0,$$

$\vec{v}$ là vectơ có tọa độ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ đối với cơ sở trực chuẩn $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$.

a) Chứng minh rằng $\vec{v}$ là một vectơ pháp tuyến của $\mathbf{P}$ (nghĩa là $\vec{v} \neq \vec{0}$ và trực giao với phương của $\mathbf{P}$).

b) Cho điểm $M\,(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, lập phường trình đường thẳng đi qua M và trực giao với $\mathbf{P}$.

2.17. Trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước cho điểm $M\,(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ và vectơ $\vec{v}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq \vec{0}$. Lập phương trình của siêu phẳng $\mathbf{P}$ đi qua M và có phương $\overrightarrow{\mathbf{P}}$ trực giao với $\vec{v}$.

2.18. Trong không gian Euclid n chiều $\mathbf{E}^n$ cho hai mục tiêu trực chuẩn

$$\{O; E_1, E_2, \ldots, E_n\} \text{ và } \{O'; E_1, E_2, \ldots, E_n\}.$$

Gọi $\mathbf{P}$ là siêu phẳng xác định bởi đơn hình $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Chứng minh rằng OO' trực giao với $\mathbf{P}$ và cắt $\mathbf{P}$ tại trọng tâm G của đơn hình đó.

2.19. Trong không gian Euclid 4 chiều $\mathbf{E}^4$ cho mục tiêu trực chuẩn $\{O; E_1, E_2, E_3, E_4\}$ và điểm $E(1,1,1,1)$. Gọi $\mathbf{P}$ là phẳng xác định bởi các điểm O, E_1, E và $\mathbb{Q}$ là phẳng xác định bởi các điểm E_1, E_2, E_3, E_4. Xác định phẳng giao của $\mathbf{P}$ và $\mathbb{Q}$.

2.20. Trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho $m-$phẳng $\mathbf{P}$ xác định bởi hệ $n-m$ phương trình

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i + b_k = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-m).$$

a) Gọi $\overrightarrow{\mathbf{P}}$ là phương của $\mathbf{P}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{\mathbf{P}}$ trực giao với các vectơ

$$\vec{a}_k\left(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}\right), \ (k = 1, 2, \ldots, n-m).$$

b) Gọi $\mathbb{Q}$ là phẳng đi qua $A\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ và bù trực giao với $\mathbf{P}$, $\overrightarrow{\mathbb{Q}}$ là phương của $\mathbb{Q}$. Chứng minh rằng hệ vectơ $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-m}\}$ là một cơ sở của $\overrightarrow{\mathbb{Q}}$.

c) Lập phương trình của phẳng $\mathbb{Q}$ nói ở câu b).

2.21. Trong không gian Euclid 5 chiều $\mathbf{E}^5$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho điểm $A(1,3,4,-1,5)$ và phẳng $\mathbf{P}$ có phương trình:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 & -3 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - x_5 & +3 = 0 \\ -x_3 + x_5 & +1 = 0 \end{cases}.$$

Lập phương trình phẳng $\mathbb{Q}$ đi qua A và bù vuông góc với $\mathbf{P}$.

2.22. Trong không gian Euclid 5 chiều $\mathbf{E}^5$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho điểm $A(1,3,4,-1,5)$ và phẳng $\mathbf{P}$ có phương trình:

$$\begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = 5 \end{cases}.$$

a) Tính dim$\mathbf{P}$.

b) Lập phương trình phẳng $\mathbb{Q}$ đi qua A và bù vuông góc với $\mathbf{P}$.

2.23. Trong không gian Euclid 5 chiều $\mathbf{E}^5$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho phẳng $\mathbf{P}$ có phương trình:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 & -3 & = 0 \\ x_3 + 2x_4 - x_5 & +3 & = 0 \\ -x_3 + x_5 & +1 & = 0 \end{cases},$$

và phẳng $\mathbb{Q}$ có phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & -4 & = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 & +3 & = 0 \end{cases}.$$

Hỏi $\mathbf{P}$ và $\mathbb{Q}$ có vuông góc với nhau không?

2.24. Trong không gian Euclid 5 chiều $\mathbf{E}^5$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho các điểm
$A(1,3,4,-1,5), B(1,2,-2,3,4), C(1,4,-1,4,5), D(2,4,-1,4,5)$
và phẳng $\mathbb{Q}$ có phương trình

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}.$$

a) Lập phương trình của phẳng $\mathbf{P}$ xác định bởi 3 điểm A, B, C.

b) Phẳng $\mathbf{P}$ có trực giao với đường thẳng CD không?

c) Xét vị trí tương đối của $\mathbf{P}$ và $\mathbb{Q}$.

2.25. Trong không gian Euclid 3 chiều $\mathbf{E}^3$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho các điểm $A(3,4,-1), B(2,0,3), C(-3,5,4)$. Hãy chứng tỏ A, B, C không thẳng hàng và tính diện tích tam giác ABC.

2.26. Trong không gian Euclid 4 chiều $\mathbf{E}^4$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho mặt phẳng $\mathbf{P}$ đi qua 3 điểm $A(1,1,1,1), B(2,2,0,0)$, $C(1,2,0,1)$ và đường thẳng d đi qua 2 điểm $D(1,1,1,2), E(1,1,2,1)$.

a) Chứng minh $\mathbf{P}$ và d chéo nhau.

b) Viết phương trình đường vuông góc chung và tính độ dài đoạn vuông góc chung của $\mathbf{P}$ và d.

2.27. Trong $\mathbf{E}^3$ cho tứ diện $ABCD$, các đỉnh có tọa độ trực chuẩn là:

$$A(0,0,2), B(3,0,5), C(1,1,0), D(4,1,2).$$

Tính chiều cao tứ diện hạ từ đỉnh D tới mặt ABC và tính thể tích tứ diện $ABCD$.

2.28. Trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho siêu phẳng $\mathbf{P}$ đi qua các điểm:

$$A_1\left(a_1, 0, \ldots, 0\right), A_2\left(0, a_2, \ldots, 0\right), A_n\left(0, 0, \ldots, a_n\right).$$

Hãy tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến siêu phẳng đó.

Ánh xạ đẳng cự

2.29. Cho phép biến đổi afin $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$. Giả sử $\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ là $(n+1)$ điểm độc lập trong $\mathbf{E}^n$ và $f\left(A_i\right) = A_i'$ $i = 0, 1, \ldots, n$. Chứng minh rằng f đẳng cự khi và chỉ khi

$$d\left(A_i, A_j\right) = d\left(A_i', A_j'\right), \forall i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

2.30. Hai đơn hình $\mathcal{S}\left(A_0, A_1, \ldots, A_n\right)$, $\mathcal{S}'\left(A_0', A_1', \ldots, A_n'\right)$ được gọi là bằng nhau ($\mathcal{S} = \mathcal{S}'$) nếu $d\left(A_i, A_j\right) = d\left(A_i', A_j'\right), \forall i, j = 0, 1, \ldots, n$. Chứng minh rằng nếu $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ thì có phép đẳng cự duy nhất $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ sao cho $f\left(A_i\right) = A_i'$ $i = 0, 1, \ldots, n$.

2.31. Cho siêu phẳng α trong $\mathbf{E}^n$ và phép đẳng cự $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$. Chứng minh rằng nếu f không phải là phép đồng nhất và $f(M) = M$ với mọi $M \in \alpha$ thì f là phép đối xứng qua α.

2.32. Chứng minh rằng phép quay trong $\mathbf{E}^2$ là tích của hai phép đối xứng trục.

2.33. Chứng minh rằng phép đẳng cự $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ là tích của không quá $(n+1)$ phép đối xứng qua siêu phẳng.

2.34. Trong $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho siêu phẳng α có phương trình:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0,$$

với

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1.$$

Viết phương trình phép đối xứng qua α.

2.35. Trong $\mathbf{E}^2$ cho f_1, f_2 lần lượt là các phép đối xứng đối với các đường thẳng d_1, d_2. Chứng minh rằng:

a) Nếu $d_1 \parallel d_2$ thì $f = f_2 \circ f_1$ là phép tịnh tiến.

b) Nếu d_1 cắt d_2 thì $f = f_2 \circ f_1$ là phép quay.

c) Nếu d_1 vuông góc với d_2 thì $f = f_2 \circ f_1$ là phép đối xứng tâm.

2.36. Cho phép đẳng cự $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n, f$ không có điểm bất động. Chứng minh rằng f có đường thẳng bất động.

2.37. Cho phép đẳng cự $f : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2, f$ không có điểm bất động. Chứng minh rằng nếu I là một điểm mà $d(I, I') \leq d(M, M')$ với mọi $M \in \mathbf{E}^2$ (với $I' = f(I), M' = f(M)$) thì đường thẳng II' là đường thẳng bất động.

2.38. Cho phép đẳng cự $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n, f$ không có điểm bất động. Chứng minh rằng các đường thẳng bất động song song với nhau.

2.39. Cho phép dời $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ và phép tịnh tiến $t_{\vec{v}} : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$. Chứng minh rằng $f \circ t_{\vec{v}} \circ f^{-1} = t_{\overrightarrow{f(\vec{v})}}$.

2.40. Trong $\mathbf{E}^3$ cho tập hợp P gồm ba đường thẳng a, b, c cùng đi qua một điểm và đôi một vuông góc với nhau. Hỏi có bao nhiêu phép đẳng cự trong $\mathbf{E}^3$ biến P thành P.

2.41. Có bao nhiêu phép đẳng cự trong $\mathbf{E}^3$ biến hình lập phương thành chính nó.

2.42. Trong $\mathbf{E}^2$ với mục tiêu trực chuẩn đã chọn, cho elip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b).$$

Tìm các phép đẳng cự trong $\mathbf{E}^2$ biến elip thành chính nó.

2.43. Trong $\mathbf{E}^2$ cho tam giác ABC, mỗi cạnh của nó được chia thành ba đoạn bằng nhau. Nối các điểm chia với các đỉnh đối diện với ba cạnh ấy, ta được 6 đường thẳng làm thành một lục giác. Chứng minh rằng các đường chéo của lục giác ấy đồng quy.

2.44. Trong $\mathbf{E}^2$ cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lấy lần lượt các điểm A, B', C' sao cho

$$(A'CB) = (B'AC) = (C'BA) = -\frac{1}{3}.$$

Chứng minh rằng mỗi đoạn trong ba đoạn thẳng AA', BB', CC' bị hai đoạn thẳng kia chắn thành ba đoạn thẳng có độ dài tỉ lệ với $3:3:1$.

2.45. Cho phép đồng dạng $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ với tỉ số $k \neq 1$. Chứng minh rằng f có điểm bất động.

2.46. Cho phép đồng dạng $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ với tỉ số $k \neq 1$. Chứng minh rằng $f = f_1 \circ f_2$, trong đó f_1 là phép vị tự, f_2 là phép đẳng cự.

2.47. Cho phép đồng dạng $f : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ với tỉ số $k \neq 1$ và $\det(f) > 0$ (ta định nghĩa $\det(f)$ là $\det(\overrightarrow{f})$). Chứng minh rằng $f = f_1 \circ f_2$, trong đó f_1 là phép vị tự, f_2 là phép quay.

Siêu mặt bậc hai trong không gian Euclid

2.48. Dùng phép đổi tọa độ trực chuẩn đưa phương trình đường bậc hai $\mathcal{S}$ trong $\mathbf{E}^2$ sau đây về dạng chính tắc

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 8 = 0.$$

2.49. Dùng phép đổi tọa độ trực chuẩn đưa phương trình mặt bậc hai $\mathcal{S}$ trong $\mathbf{E}^3$ sau đây về dạng chính tắc

$$x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 4xy + 12z + 5 = 0.$$

2.50. Tùy theo giá trị α, hãy xác định dạng của đường bậc hai $\mathcal{S}$ trong $\mathbf{E}^2$ khi $\mathcal{S}$ có phương trình đối với một mục tiêu trực chuẩn là

$$x_1^2 - 2\alpha x_1 x_2 + x_2^2 = 1.$$

2.51. Trong $\mathbf{E}^2$ với mục tiêu trực chuẩn, cho đường bậc hai $\mathcal{S}$ có phương trình

$$3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1 - 9 = 0.$$

Chứng minh $\mathcal{S}$ là elip.

2.52. Chứng minh rằng nếu một hình bình hành nội tiếp trong một elip thì tâm của hình bình hành trùng với tâm elip.

2.53. Chứng minh rằng mọi elip đều có thể nội tiếp trong một tam giác sao cho trọng tâm của tam giác trùng với tâm của elip.

2.54. Chứng minh rằng phương trình sau đây xác định một cặp mặt phẳng trong $\mathbf{E}^3$

$$y^2 + 2xy + 4xz - 4x - 2y = 0.$$

2.55. Trong $\mathbf{E}^n$ cho p điểm $A_1, A_2, \ldots, A_p$ và cho họ hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Với k là số thực cho trước, tìm tập hợp các điểm M sao cho:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i d^2(M, A_i) = k.$$

2.56. Trong $\mathbf{E}^n$ cho siêu cầu C.

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - x_i)^2 = r^2$$

và siêu phẳng α

$$\sum_{i=1}^{n} A_i x_i + A_0 = 0.$$

Tìm điều kiện của a_i, A_i, r để:

a) C và α không có điểm chung.

b) C và α tiếp xúc.

CHƯƠNG 3

HÌNH HỌC XẠ ẢNH

Mục tiêu chương

Học xong chương này, sinh viên có thể:

. Mô tả được các khái niệm: không gian xạ ảnh; điểm; vectơ đại diện; $m-$phẳng trong không gian xạ ảnh. Xác định được các hệ điểm độc lập; mục tiêu và tọa độ xạ ảnh; tỷ số kép của hệ điểm thẳng hàng. Mô tả và vận dụng được nguyên tắc đối ngẫu.

. Mô tả được mô hình xạ ảnh của không gian afin.

. Mô tả được khái niệm ánh xạ xạ ảnh; nhận biết được các yếu tố của hình học xạ ảnh.

. Lập được phương trình của phẳng; xác định được vị trí tương đối của các phẳng.

. Lập được phương trình phép biến đổi xạ ảnh.

. Giải được một số bài toán liên quan đến ánh xạ xạ ảnh, ánh xạ phối cảnh giữa hàng điểm và chùm đường thẳng trong mặt phẳng xạ ảnh.

. Mô tả được khái niệm siêu mặt bậc hai và các khái niệm liên quan.

. Giải thích được một số định lý cổ điển về đường conic trong mặt phẳng.

. Giải được một số bài toán liên quan đến siêu mặt bậc hai trong không gian n chiều và đường conic trong mặt phẳng.

3.1 Không gian xạ ảnh

3.1.1 *Không gian xạ ảnh: định nghĩa, các mô hình của không gian xạ ảnh*

Định nghĩa 3.1.1.1. Giả sử $\mathbf{V}^{n+1}$ là không gian vectơ $n+1$ chiều ($n \geq 0$) trên trường $\mathbf{K}$, $[\mathbf{V}^{n+1}]$ là ký hiệu tập hợp tất cả các không gian con một chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$, nghĩa là mỗi phần tử của $[\mathbf{V}^{n+1}]$ là một không gian con 1 chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$, $\mathbf{X}$ là một tập hợp khác rỗng và một song ánh $p : [\mathbf{V}^{n+1}] \to \mathbf{X}$. Khi đó bộ ba $(\mathbf{X}, p, \mathbf{V}^{n+1})$ được gọi là không gian xạ ảnh n chiều trên trường $\mathbf{K}$, liên kết với $\mathbf{K}-$không gian $\mathbf{V}^{n+1}$ bởi song ánh p.

Tùy theo $\mathbf{V}^{n+1}$ là không gian vectơ thực hay phức, ta được không gian xạ ảnh $(\mathbf{X}, p, \mathbf{V}^{n+1})$ thực hay phức. Trong giáo trình này nếu không nói gì thêm, không gian xạ ảnh được xét là không gian xạ ảnh thực.

Nếu không sợ bị nhầm lẫn, có thể ký hiệu không gian xạ ảnh là $\mathbf{P}$, và để chỉ rõ nó có số chiều bằng n, ta ký hiệu là $\mathbf{P}^n$.

Mỗi phần tử của $\mathbf{X}$ được gọi là một điểm của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$. Như vậy mỗi điểm của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ là ảnh của một không gian con $\mathbf{V}^1$ qua song ánh p. Ta thường đồng nhất tập $\mathbf{X}$ các điểm của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ với chính $\mathbf{P}^n$ (ngầm định có không gian vectơ liên kết và song ánh liên kết với nó).

Gọi $\vec{u}$ là vectơ khác 0 của $\mathbf{V}^{n+1}$, $\langle\vec{u}\rangle$ là không gian vectơ con một chiều sinh bởi $\vec{u}$, thì $p(\langle\vec{u}\rangle) = U$ là một điểm nào đó của $\mathbf{P}^n$. Khi đó ta nói vectơ $\vec{u}$ là đại diện của điểm U.

Như vậy, hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ (khác $\vec{0}$) cùng đại diện cho một điểm khi và chỉ khi chúng phụ thuộc tuyến tính, tức là $\vec{u} = k\vec{v}$ ($k \neq 0$).

Xét không gian xạ ảnh $(\mathbf{P}^n, p, \mathbf{V}^{n+1})$ và $\mathbf{V}^{m+1} \subset \mathbf{V}^{n+1}$ là không gian con $m+1$ chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$. Khi đó $[\mathbf{V}^{m+1}] \subset [\mathbf{V}^{n+1}]$. Ta gọi tập ảnh $p([\mathbf{V}^{m+1}]) \subset \mathbf{P}^n$ là (cái) phẳng m chiều (hay $m-$phẳng) trong

$\mathbf{P}^n$. Dễ thấy rằng $m-$phẳng $p\left([\mathbf{V}^{m+1}]\right)$ cũng là không gian xạ ảnh liên kết với không gian $\mathbf{V}^{m+1}$, do đó còn ký hiệu $m-$phẳng trong $\mathbf{P}^n$ là $\mathbf{P}^m$.

Ta thấy các $0-$phẳng là các điểm của không gian. Ta còn gọi $1-$phẳng là đường thẳng, $2-$phẳng là mặt phẳng, $(n-1)-$phẳng trong không gian n chiều là siêu phẳng.

Ví dụ 3.1.1.2 (Các mô hình)

a) Mô hình vectơ

Giả sử $\mathbf{V}^{n+1}$ là không gian vectơ $n+1$ chiều $(n \geq 0)$. Khi đó tập hợp $\mathbf{P} = [\mathbf{V}^{n+1}]$ trở thành không gian xạ ảnh n chiều liên kết với $\mathbf{V}^{n+1}$ bởi phép đồng nhất của $[\mathbf{V}^{n+1}]$ lên chính nó. Mỗi điểm của không gian xạ ảnh này là một không gian vectơ con một chiều của $[\mathbf{V}^{n+1}]$, mỗi $m-$phẳng là tập hợp các không gian con một chiều của một không gian vectơ con $m+1$ chiều nào đó trong $\mathbf{V}^{n+1}$.

b) Mô hình số thực

Xét không gian vectơ $\mathbb{R}^{n+1}$, trên tập $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$ ta xét quan hệ tương đương sau: $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \sim (y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ nếu tồn tại số thực $k \neq 0$ sao cho $(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) = k(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. Đặt $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}/\sim$, khi đó X là một không gian xạ ảnh n chiều liên kết với không gian vectơ $\mathbb{R}^{n+1}$ bởi phép đặt tương ứng mỗi không gian con một chiều của $\mathbb{R}^{n+1}$ sinh bởi vectơ $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \neq \vec{0}$ với phần tử của tập X là lớp tương đương chứa $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$.

c) Mô hình bó

Cho $\mathbf{A}^{n+1}$ là không gian afin liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$. Gọi $\mathcal{B}$ là tập hợp các đường thẳng của $\mathbf{A}^{n+1}$ cùng đi qua điểm O cho trước. Tập hợp $\mathcal{B}$ thường được gọi là bó đường thẳng có tâm là O.

Xét song ánh $p : [\mathbf{V}^{n+1}] \to \mathcal{B}$ được xác định như sau: nếu W là không gian vectơ con một chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$ thì $p(W)$ là đường thẳng đi qua O có phương là W. Bằng cách đó bó đường thẳng $\mathcal{B}$ trở thành không gian xạ ảnh n chiều.

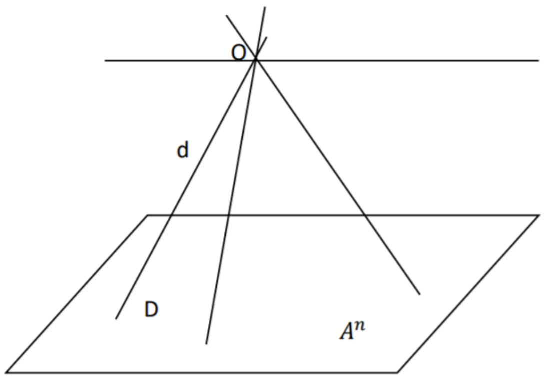
Trong không gian xạ ảnh $\mathcal{B}$ mỗi điểm là một đường thẳng của

A^{n+1} đi qua O, mỗi $m-$phẳng là tập hợp các đường thẳng qua O và nằm trong một cái phẳng $m+1$ chiều đi qua O của $\mathbf{A}^{n+1}$.

d) Mô hình afin

Ta nhận thấy rằng nếu $\mathbf{P}$ là không gian xạ ảnh liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}$ bởi song ánh p và nếu có tập hợp $\mathbf{P}'$ cùng với song ánh $p' : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ thì $\mathbf{P}'$ cũng là không gian xạ ảnh liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}$ bởi song ánh $p' \circ p$.

Bây giờ cho $\mathbf{A}^{n+1}$ là không gian afin liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$. Gọi $\mathbf{A}^n$ là siêu phẳng của $\mathbf{A}^{n+1}$, có phương là không gian vectơ con $\mathbf{V}^n$ của $\mathbf{V}^{n+1}$. Xét tập hợp $\mathbf{P} = \mathbf{A}^n \cup [\mathbf{V}^n]$, mà mỗi phần tử của nó được gọi là một điểm. Như vậy mỗi điểm của $\mathbf{P}$ là một điểm của $\mathbf{A}^n$ hoặc một không gian vectơ con một chiều của $\mathbf{V}^n$.



Hình 3.1

Chọn một điểm O của không gian afin $\mathbf{A}^{n+1}$ không nằm trên $\mathbf{A}^n$ (Hình 3.1), gọi $\mathbf{B}$ là bó đường thẳng trong $\mathbf{A}^{n+1}$ có tâm là O. Ta biết rằng $\mathbf{B}$ là không gian xạ ảnh n chiều. Bây giờ ta xây dựng song ánh $p' : \mathbf{B} \to \mathbf{P}$ như sau:

- Nếu đường thẳng d của bó $\mathbf{B}$ cắt $\mathbf{A}^n$ tại điểm D thì đặt $p'(d) = D$.

- Nếu $d \parallel \mathbf{A}^n$ thì đặt $p'(d) = \overrightarrow{d}$ (phương của đường thẳng d).

Bằng cách đó $\mathbf{P} = \mathbf{A}^n \cup [\mathbf{V}^n]$ trở thành không gian xạ ảnh n chiều liên kết với $\mathbf{V}^{n+1}$. Các điểm thuộc $[\mathbf{V}^n]$ được gọi là các điểm vô tận của $\mathbf{P}$. Trong không gian đó, mỗi $m-$phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^m$ sẽ là:

- Hoặc $\mathbf{P}^m = \mathbf{A}^m \cup \left[\overrightarrow{\mathbf{A}}^m\right]$, trong đó $\mathbf{A}^m$ là $m-$phẳng nào đó của $\mathbf{A}^n$. Như vậy, $m-$phẳng xạ ảnh bao gồm $m-$phẳng afin bổ sung thêm các điểm thuộc $\left[\overrightarrow{\mathbf{A}}^m\right]$ (các điểm vô tận). Đặc biệt, đường thẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^1$ bao gồm đường thẳng afin $\mathbf{A}^1$ bổ sung thêm một điểm vô tận (không gian con 1 chiều, là phương của $\mathbf{A}^1$).

- Hoặc $\mathbf{P}^m = [\mathbf{V}^{m+1}]$, với $\mathbf{V}^{m+1}$ là không gian vectơ con $m+1$ chiều của $\mathbf{V}^n$.

3.1.2 *Mục tiêu và tọa độ xạ ảnh*

a) Hệ điểm độc lập

Hệ r điểm $\{M_1, M_2, \ldots, M_r\}$, với $r \geq 1$, của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ được gọi là hệ điểm độc lập nếu hệ r vectơ đại diện $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính trong $\mathbf{V}^{n+1}$. Hệ điểm không độc lập được gọi là hệ điểm phụ thuộc.

Nhận xét 3.1.2.1. i) Hệ chỉ có một điểm là độc lập.

ii) Hệ gồm hai điểm là độc lập nếu hai điểm đó phân biệt.

b) Mục tiêu xạ ảnh

Nhận xét 3.1.2.2. Cho cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ trong không gian $\mathbf{V}^{n+1}$. Gọi $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1} \in \mathbf{P}^n$ là các điểm tương ứng nhận $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\ldots$, $\vec{e}_{n+1}$ là các vectơ đại diện và điểm E nhận vectơ $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \ldots + \vec{e}_{n+1}$ là vectơ đại diện. Ta có hệ có thứ tự $\{S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}; E\}$ gồm $n+2$ điểm và hệ bất kì $n+1$ điểm trong $n+2$ điểm đó là độc lập. Hệ $n+2$ điểm với tính chất này dẫn chúng ta đến định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.1.2.3. Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$. Một tập hợp có thứ tự gồm $n+2$ điểm

$\{S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}; E\}$ của $\mathbf{P}^n$ được gọi là mục tiêu xạ ảnh nếu hệ bất kì $n+1$ điểm trong $n+2$ điểm đó là độc lập.

Các điểm S_i được gọi là các đỉnh của mục tiêu xạ ảnh, điểm E được gọi là điểm đơn vị.

Các $m-$phẳng $(m < n)$ đi qua $m+1$ đỉnh được gọi là các $m-$phẳng tọa độ, đặc biệt các đường thẳng S_iS_j (với $i \neq j$) được gọi là các trục tọa độ.

Theo nhận xét trên, một cơ sở xác định một mục tiêu xạ ảnh, ngược lại, ta có:

Định lý 3.1.2.4. *Với mỗi mục tiêu xạ ảnh* $\{S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}; E\}$ *luôn tìm được cơ sở* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ *của* $\mathbf{V}^{n+1}$ *sao cho vectơ* $\vec{e}_l$ *là đại diện của đỉnh* $S_i (i = 1, 2, \ldots, n+1)$ *và vectơ* $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \ldots + \vec{e}_{n+1}$ *là đại diện của điểm* E. *Nếu* $\left\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_{n+1}\right\}$ *là cơ sở khác của* $\mathbf{V}^{n+1}$ *cũng thỏa mãn điều kiện này thì tồn tại số thực* $k \neq 0$, *sao cho* $\vec{e}_i = k\vec{e'}_i, i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Chứng minh. Lấy các vectơ $\vec{e'}_i$ đại diện cho các đỉnh S_i, và vectơ $\vec{e}$ đại diện cho điểm E. Vì $n+1$ đỉnh S_i độc lập nên $n+1$ vectơ $\vec{e'}_i$ độc lập tuyến tính trong V^{n+1}. Vì thế ta có $\vec{e} = k_1\vec{e'}_1 + k_2\vec{e'}_2 + \ldots + k_{n+1}\vec{e'}_{n+1}$. Ta có các số k_i đều khác 0, bởi vì nếu tồn tại $k_i = 0, k_1 = 0$ chẳng hạn, thì $n+1$ vectơ $\vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_{n+1}, \vec{e}$ phụ thuộc tuyến tính, do đó $n+1$ điểm $S_2, \ldots, S_{n+1}, E$ không độc lập, trái với giả thiết. Đặt $\vec{e}_i = k_i\vec{e'}_i$ $i = 1, 2, \ldots, n+1$, thì $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ là cơ sở cần tìm. Tiếp theo, giả sử hai cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ và $\left\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_{n+1}\right\}$ cùng thỏa mãn điều kiện trong định lý. Khi đó $\vec{e}_i = k_i\vec{e'}_i (i = 1, 2, \ldots, n+1)$ và $\vec{e} = k\vec{e'}$, hay $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \ldots + \vec{e}_{n+1} = k\left(\vec{e'}_1 + \vec{e'}_2 + \ldots + \vec{e'}_{n+1}\right)$. Do đó $k_1 = k_2 = \ldots = k_{n+1} = k$. □

Cơ sở nói trong định lý trên được gọi là cơ sở đại diện cho mục tiêu đang xét. Mục tiêu xạ ảnh có nhiều cơ sở đại diện và chúng chỉ sai khác nhau một hằng số k.

c) Tọa độ xạ ảnh

Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ cho mục tiêu xạ ảnh $\{S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}; E\}$ có cơ sở đại diện $\{\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_{n+1}\}$. Giả sử X là một điểm của $\mathbf{P}^n$, ta lấy $\vec{x}$ là vectơ đại diện của X. Khi đó tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ của vectơ $\vec{x}$ đối với cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ được gọi là tọa độ của điểm X đối với mục tiêu $\{S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}; E\}$, và viết $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ hay $X\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$.

Nhận xét 3.1.2.5. + Nếu $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ là tọa độ của một điểm X trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ thì tồn tại ít nhất một $x_i \neq 0$ (vì vectơ đại diện cho một điểm luôn khác $\vec{0}$).

+ Hai bộ số $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ và $\left(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}\right)$ cùng là tọa độ của một điểm khi và chỉ khi có $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ để $x_i = kx'_i$. Để diễn tả tính chất đó người ta còn viết tọa độ của điểm X dưới dạng: $X = (x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1})$.

+ Đối với mục tiêu $\{S_i; E\}$, tọa độ của các đỉnh S_i và tọa độ của điểm đơn vị E là:

$$\begin{array}{ll} S_1 & = (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ S_2 & = (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ & \vdots \\ S_{n+1} & = (0, 0, 0, \ldots, 1) \\ E & = (1, 1, 1, \ldots, 1) \end{array}.$$

d) Đổi mục tiêu xạ ảnh

Trong $\mathbf{P}^n$ cho hai mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ và $\{S'_i; E'\}$. Gọi tọa độ của điểm X đối với hai mục tiêu đó lần lượt là $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ và $\left(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}\right)$. Ta tìm mối liên hệ giữa các (x_i) và (x'_i).

Gọi $\{\vec{e}_i\}$ và $\left\{\vec{e'}_i\right\}$ lần lượt là hai cơ sở đại diện cho hai mục tiêu đó thì $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ và $\left(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}\right)$ chính là tọa độ của các vectơ đại diện $\vec{x}$ và $\vec{x'}$ của X đối với cơ sở $\{\vec{e}_i\}$ và $\left\{\vec{e'}_i\right\}$, do đó $\vec{x'} = k\vec{x}$. Theo công thức đổi tọa độ của vectơ $\vec{x'}$ từ cơ sở $\{\vec{e}_i\}$ sang cơ sở $\left\{\vec{e'}_i\right\}$, ta có

$$kx_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x'_j, i = 1, 2, \ldots, n+1; k \neq 0. \tag{3.1}$$

trong đó $(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{n+1i})$ là tọa độ của $\vec{e'}_i$ đối với cơ sở $\{\vec{e}_i\}$.

Hệ (3.1) được gọi là công thức đổi mục tiêu xạ ảnh. Ma trận $A = [a_{ij}]$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\vec{e}_i\}$ sang cơ sở $\left\{\vec{e'}_i\right\}$, nó cũng được gọi là ma trận chuyển từ mục tiêu $\{S_i; E\}$ sang mục tiêu $\{S'_i; E'\}$. Ma trận chuyển mục tiêu được xác định sai khác một hằng số nhân khác 0, nghĩa là nếu A là ma trận chuyển ứng với hai mục tiêu nào đó thì kA $(k \neq 0)$ cũng là ma trận chuyển ứng với hai mục tiêu đó.

Ký hiệu

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}, \quad [x'] = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x' \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{bmatrix}$$

là ma trận cột tọa độ của điểm X đối với hai mục tiêu, công thức (3.1) có thể viết dưới dạng ma trận: $k[x] = A\,[x']$.

e) Cách tìm ma trận chuyển

Để xác định công thức đổi tọa độ, ta chỉ cần tìm ma trận chuyển giữa hai mục tiêu.

Ma trận chuyển từ mục tiêu $\{S_i; E\}$ sang mục tiêu $\{S'_i; E'\}$ được xác định nếu biết tọa độ của các điểm S'_i và E' đối với mục tiêu $\{S_i; E\}$. Thật vậy, giả sử $(b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in+1})$ là tọa độ của điểm S'_i đối với mục tiêu $\{S_i; E\}$ và $(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1})$ là tọa độ của điểm E'. Gọi $\{\vec{e}_i\}$ là cơ sở đại diện của mục tiêu $\{S_i, E\}$, $\{\vec{e'}_i\}$ là cơ sở đại diện của mục tiêu $\{S'_i, E'\}$. Vectơ $\vec{e'}_i$ đại diện cho S'_i có tọa độ đối với cơ sở $\{\vec{e}_i\}$ là:

$$\vec{e'}_i = (k_ib_{1i}, k_ib_{2i}, \ldots, k_ib_{n+1i}), \quad k_i \neq 0$$

và vectơ

$$\vec{e'} = \sum_{i=1}^{n+1} \vec{e'}_i$$

đại diện cho điểm E', do đó:

$$\sum_{i=1}^{n+1} k_i b_{ji} = c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Hệ phương trình trên đối với các ẩn k_i có nghiệm vì định thức của ma trận (b_{ij}) khác 0 (do các vectơ $\vec{e'}$ độc lập tuyến tính). Giải hệ phương trình trên tìm được nghiệm k_i. Đặt $a_{ij} = k_i b_{ij}$ thì $A = (a_{ij})$ là ma trận cần tìm.

Ví dụ 3.1.2.6. Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^2$, hãy lập công thức đổi tọa độ từ mục tiêu $\{S_1, S_2, S_3; E\}$ sang mục tiêu $\{S'_1, S'_2, S'_3; E'\}$, biết rằng đối với mục tiêu thứ nhất $S'_1 = (0, 1, 1), S'_2 = (2, 0, 1), S'_3 = (1, 1, 0), E' = (1, 1, 1)$.

Giải. Tọa độ của các vectơ thuộc cơ sở đại diện cho mục tiêu thứ hai là

$$\vec{e'}_1 = k_1(0, 1, 1), \vec{e'}_2 = k_2(2, 0, 1), \vec{e}_3 = k_3(1, 1, 0),$$

trong đó k_1, k_2, k_3 là nghiệm của hệ phương trình

$$k_1(0, 1, 1) + k_2(2, 0, 1) + k_3(1, 1, 0) = (1, 1, 1).$$

Giải hệ này ta được $k_1 = \dfrac{1}{3}, k_2 = \dfrac{1}{3}, k_3 = \dfrac{2}{3}$.

Do đó ma trận chuyển từ mục tiêu thứ nhất sang mục tiêu thứ hai là

$$\begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix},$$

hay

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do đó công thức đổi tọa độ là

$$k[x] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} [x']$$

hay

$$\begin{cases} kx_1 = 2x'_2 + 2x'_3 \\ kx_2 = x'_1 + 2x'_3 \\ kx_3 = x'_1 + x'_2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

3.1.3 *Các phẳng trong không gian xạ ảnh, phương trình của phẳng*

a) Phẳng trong không gian xạ ảnh

Cho không gian xạ ảnh $(\mathbf{P}^n, p, \mathbf{V}^{n+1})$ và $\mathbf{W}$ là không gian vectơ con $m+1$ chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$ $(m \geq 0)$. Ta nhắc lại rằng, tập hợp $p([\mathbf{W}])$ là cái phẳng m chiều (hoặc $m-$phẳng) của $\mathbf{P}^n$ và $m-$phẳng $p([\mathbf{W}])$ là không gian xạ ảnh m chiều liên kết với không gian vectơ $\mathbf{W}$ bởi song ánh $p|_{[\mathbf{W}]} : [\mathbf{W}] \to p([\mathbf{W}])$.

Hai cái phẳng trong không gian được gọi là cắt nhau nếu chúng có điểm chung, khi đó giao của chúng cũng là một cái phẳng. Hai cái phẳng không cắt nhau còn được gọi là chéo nhau.

Định lý 3.1.3.1. *Hệ r điểm $(r \geq 2)$ là độc lập khi và chỉ khi chúng không cùng thuộc một $(r-2)-$phẳng.*

Chứng minh. Giả sử $M_1, M_2, \ldots, M_r$ là r điểm của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, có đại diện là r vectơ $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \ldots, \vec{m}_r$ của $\mathbf{V}^{n+1}(r \geq 2)$. Hệ điểm $M_1, M_2, \ldots, M_r$ là độc lập khi và chỉ khi hệ vectơ $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \ldots, \vec{m}_r$ là độc lập tuyến tính, hay khi và chỉ khi các vectơ $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \ldots, \vec{m}_r$ không cùng thuộc một không gian vectơ con $r-1$ chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$. Tức là khi và chỉ khi hệ điểm $M_1, M_2, \ldots, M_r$ không cùng thuộc một $(r-2)-$phẳng. □

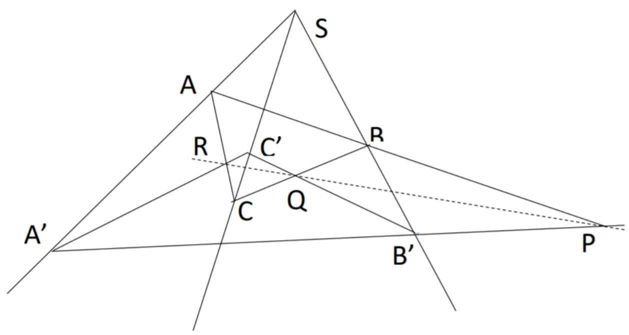
Định lý 3.1.3.2. *Có duy nhất một $(r-1)-$phẳng đi qua hệ r điểm độc lập cho trước.*

Chứng minh. Giả sử $M_1, M_2, \ldots, M_r$ là r điểm độc lập của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$. Các vectơ $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \ldots, \vec{m}_r$ đại diện cho chúng làm thành hệ vectơ độc lập tuyến tính nên có duy nhất một không gian vectơ con r chiều $\mathbf{W}$ chứa chúng. Khi đó $p([\mathbf{W}])$ chính là $(r-1)-$phẳng duy nhất đi qua r điểm $M_1, M_2, \ldots, M_r$. □

Định lý 3.1.3.3 (Định lý Desargues)**.** *Trong không gian xạ ảnh cho 6 điểm A, B, C, A', B', C' trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Khi đó hai mệnh đề sau là tương đương:*

i) Ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy (có điểm chung);

ii) Giao của các đường thẳng AB và $A'B', BC$ và $B'C', CA$ và $C'A'$ là ba điểm thẳng hàng.



Hình 3.2

Chứng minh. i) $\Rightarrow$ ii): Giả sử AA', BB', CC' đồng quy tại S (Hình 3.2). Gọi $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a'}$, $\vec{b'}$, $\vec{c'}$, $\vec{s}$ lần lượt là các vectơ đại diện của các điểm A, B, C, A', B', C', S. Vì A, A', S phân biệt và thẳng hàng nên 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{s}$ cùng thuộc một không gian vectơ con hai chiều. Do đó, nếu đã chọn trước vectơ $\vec{s}$ thì có thể chọn $\vec{a}, \vec{a'}$ sao cho $\vec{s} = \vec{a} + \vec{a'}$.

Tương tự đối với $\vec{b}, \vec{b'}$ và $\vec{c}, \vec{c'}$. Tóm lại, ta có thể chọn sao cho:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{a'} = \vec{b} + \vec{b'} = \vec{c} + \vec{c'}.$$

Đặt $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}$ thì $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{b'} - \vec{a'}$ nên vectơ $\vec{p}$ đại diện cho điểm P là giao của hai đường thẳng AB và $A'B'$.

Tương tự, vectơ $\vec{q} = \vec{b} - \vec{c} = \vec{c'} - \vec{b'}$ đại diện cho giao điểm Q của BC và $B'C'$, vectơ $\vec{r} = \vec{c} - \vec{a} = \vec{a'} - \vec{c'}$ đại diện cho giao điểm R của CA và $C'A'$. Nhưng $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \vec{0}$ nên ba điểm P, Q, R phụ thuộc, hay là chúng thẳng hàng.

ii) $\Rightarrow$ i): Giả sử $AB \cap A'B' = P, BC \cap B'C' = Q, CA \cap C'A' = R$ và P, Q, R thẳng hàng. Xét 6 điểm A, A', R, B, B', Q ta thấy trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Ngoài ra, ba đường thẳng $AB, A'B', RQ$ đồng quy tại P. Theo chứng minh phần trên ta suy ra giao điểm S của AA' và BB', giao điểm C của AR và BQ, giao điểm C' của $A'R$ và $B'Q$ thẳng hàng. Nói cách khác, ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy. □

b) Phương trình của phẳng

b1) **Phương trình tham số**

Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ cho mục tiêu xạ ảnh $\{S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}; E\}$ có cơ sở đại diện là $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$. Gọi $\mathbf{U}$ là $m-$phẳng liên kết với không gian vectơ con $m+1$ chiều $\overrightarrow{\mathbf{U}}$. Ta tìm điều kiện cần và đủ để điểm $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ thuộc $\mathbf{U}$.

Trên $\mathbf{U}$ lấy $m+1$ điểm độc lập $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$. Nếu $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in+1})$, thì vectơ đại diện cho nó là $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in+1})$. Khi đó, ma trận $(a_{ij}), i = 1, 2, \ldots, m+1; j = 1, 2, \ldots, n+1$ có hạng bằng $m+1$.

Điểm $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ thuộc $\mathbf{U}$ khi và chỉ khi vectơ đại diện cho nó là $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ thuộc $\overrightarrow{\mathbf{U}}$, hay là $\vec{x} = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \ldots + t_{m+1}\vec{a}_{m+1}$. Suy ra

$$x_i = \sum_{j=1}^{m+1} a_{ji}t_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{3.2}$$

Hệ phương trình (3.2) được gọi là phương trình tham số của $m-$phẳng $\mathbf{U}$, với $m+1$ tham số $t_1, t_2, \ldots, t_{m+1}$ không đồng thời bằng 0. Ký hiệu

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Khi đó phương trình (3.2) có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$[x] = t_1 [A_1] + t_2 [A_2] + \ldots + t_{m+1} [A_{m+1}], \tag{3.3}$$

trong đó các số t_i không đồng thời bằng 0 và $[A_i]$ là ma trận cột tọa độ của điểm A_i.

Đặc biệt, phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm A và B có dạng:

$$[x] = t_1[A] + t_2[B]$$

trong đó t_1 và t_2 không đồng thời bằng 0.

b2) **Phương trình tổng quát**

Giả sử $m-$phẳng $\mathbf{U}$ có phương trình tham số (3.2). Hệ phương trình (3.2) gồm $n+1$ phương trình với $m+1$ tham số. Vì ma trận $[a_{ij}], i = 1, 2, \ldots m+1; j = 1, 2, \ldots, n+1$ có hạng bằng $m+1$ nên có thể khử $m+1$ tham số đó từ hệ phương trình trên. Cụ thể là chọn $m+1$ phương trình độc lập trong (3.2) rồi giải hệ gồm các phương trình vừa chọn để tìm các tham số t_i theo các x_j có trong hệ này. Thay các giá trị đó của tham số vào $n-m$ phương trình còn lại của hệ (3.2) ta được hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\sum_{j=1}^{n+1} b_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-m, \tag{3.4}$$

trong đó ma trận $(b_{ij}), i = 1, 2, \ldots, n-m, j = 1, 2, \ldots, n+1$ có hạng bằng $n-m$. Hệ (3.4) được gọi là phương trình tổng quát của $m-$phẳng $\mathbf{U}$.

Ngược lại, ta có thể chứng minh rằng mỗi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất của các biến $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ với ma trận các hệ số có hạng bằng $n-m$ đều xác định một $m-$phẳng (việc chứng minh xem như bài tập).

Ví dụ 3.1.3.4. Trong không gian $\mathbf{P}^3$ với mục tiêu cho trước, cho các điểm $M(1,0,2,2)$, $N(0,-1,3,2)$, $P(2,3,1,4)$. Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của phẳng nhỏ nhất chứa các điểm M, N, P.

Giải. Các vectơ đại diện cho 3 điểm M, N, P là hệ độc lập tuyến tính nên M, N, P là hệ điểm độc lập. Vì vậy $2-$phẳng chứa M, N, P là phẳng nhỏ nhất chứa chúng. Phương trình tham số của phẳng này là

$$[x] = t_1[M] + t_2[N] + t_3[P],$$

hay

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + 2t_3 \\ x_2 = -t_2 + 3t_3 \\ x_3 = 2t_1 + 3t_2 + t_3 \\ x_4 = 2t_1 + 2t_2 + 4t_3 \end{cases}.$$

Giải t_1, t_2, t_3 từ 3 phương trình đầu ta có

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-10x_1 + 6x_2 + 2x_3}{-6} \\ t_2 &= \frac{6x_1 - 3x_2 - 3x_3}{-6} \\ t_3 &= \frac{2x_1 - 3x_2 - x_3}{-6} \end{aligned}.$$

Thay vào phương trình cuối cùng của hệ trên, sau khi biến đổi, ta có phương trình tổng quát của phẳng là

$$x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Nhận xét. Có thể giả sử phương trình của $2-$phẳng (siêu phẳng) qua M, N, P là

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0.$$

Thay tọa độ M, N, P vào phương trình, từ đó tìm được các hệ số a_1, a_2, a_3, a_4.

b3) **Tọa độ của siêu phẳng**

Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu đã chọn, phương trình tổng quát của một siêu phẳng $\mathbf{U}$ có dạng:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_{n+1}x_{n+1} = 0,$$

trong đó các u_i không đồng thời bằng 0. Bộ số $(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$ được gọi là tọa độ của siêu phẳng $\mathbf{U}$ đối với mục tiêu đã chọn. Ký hiệu $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$ hay $\mathbf{U}\,(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$.

Ký hiệu ma trận cột tọa độ của siêu phẳng u là $[u]$, khi đó phương trình của $\mathbf{U}$ có thể viết dưới dạng ma trận:

$$[u]^T[x] = 0.$$

Nhận xét 3.1.3.5. Nếu $(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$ là tọa độ của siêu phẳng $\mathbf{U}$ thì

$$(ku_1, ku_2, \ldots, ku_{n+1})\,, k \neq 0$$

cũng là tọa độ của siêu phẳng $\mathbf{U}$. Bởi vậy, tọa độ của siêu phẳng $\mathbf{U}$ còn được ký hiệu là: $\mathbf{U} = (u_1 : u_2 : \ldots : u_{n+1})$.

Ví dụ 3.1.3.6. Siêu phẳng tọa độ đi qua mọi đỉnh của mục tiêu xạ ảnh trừ đỉnh S_i có phương trình $x_i = 0$, tọa độ của nó là $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (số 1 nằm ở vị trí i, còn lại là số 0).

b4) **Hệ siêu phẳng độc lập**

Hệ gồm r siêu phẳng $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_r$ có tọa độ $\mathbf{U}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in+1})$ được gọi là độc lập nếu hạng của ma trận $[u_{ij}]\,, i = 1, 2 \ldots, r; j = 1, 2, \ldots, n+1$, bằng r.

Nếu r siêu phẳng độc lập thì các phương trình tổng quát của chúng làm thành một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có hạng bằng r. Từ đó suy ra giao của r siêu phẳng độc lập là một $(n-r)-$phẳng. Ngược lại, mỗi $m-$phẳng đều có thể xem là giao của $(n-m)$ siêu phẳng độc lập.

c) Các qui tắc cơ bản trong $\mathbf{P}^2$

Các qui tắc sau đây cho chúng ta xác định nhanh tọa độ điểm là giao của 2 đường thẳng, tọa độ đường thẳng đi qua 2 điểm và điều kiện để 3 điểm thẳng hàng, 3 đường thẳng đồng qui khi biết tọa độ của chúng (việc chứng minh xem như bài tập).

Qui tắc 1. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hai điểm $A\,(a_1, a_2, a_3)\,, B\,(b_1,\ b_2,\ b_3)$ phân biệt. Khi đó tọa độ của đường thẳng AB là:

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Qui tắc 2. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hai đường thẳng a và b khác nhau có tọa độ là (a_1, a_2, a_3) và $(b_1,\ b_2,\ b_3)$. Khi đó tọa độ giao điểm của a và b là:
$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Qui tắc 3. Trong $\mathbf{P}^2$ cho ba điểm

$$A\,(a_1, a_2, a_3),\ B\,(b_1,\ b_2,\ b_3),\ C\,(c_1, c_2, c_3).$$

Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Qui tắc 4. Trong $\mathbf{P}^2$ có ba đường thẳng a, b, c lần lượt có tọa độ $(a_1, a_2, a_3)\,, (b_1,\ b_2,\ b_3)\ (c_1, c_2, c_3)$. Điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng a, b, c đồng quy là:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Áp dụng qui tắc trên ta xét các ví dụ sau.

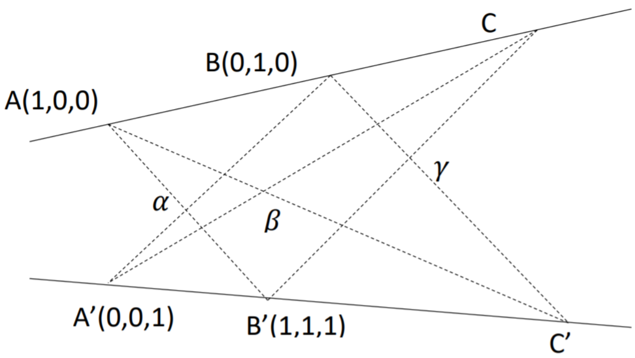
Ví dụ 3.1.3.7. 1) Trong $\mathbf{P}^2$ trên hai đường thẳng phân biệt a, a', cho 6 điểm phân biệt $A, B, C \in a$ và $A', B', C' \in a'$. Gọi $\alpha = AB' \times BA', \beta = AC' \times CA', \gamma = BC' \times CB'$. Chứng minh rằng α, β, γ thẳng hàng (định lý Pappus).

Giải. Chọn mục tiêu $\{A_1, A_2, A_3; E\}$, trong đó $A_1 \equiv A, A_2 \equiv B, A_3 \equiv$

$A', E \equiv B'$. Thế thì $C(1, m, 0), C'(1, 1, n)$.

$$\left.\begin{array}{l} AB'(0,1,-1) \\ BA'(1,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha(0,-1,-1)$$
$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,0) \\ C'(1,1,n) \end{array}\right\} \Rightarrow AC'(0,-n,1)$$
$$\left.\begin{array}{l} A'(0,0,1) \\ C(1,m,0) \end{array}\right\} \Rightarrow A'C(-m,1,0)$$
$$\left.\begin{array}{l} AC'(0,-n,1) \\ A'C(-m,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \beta(-1,-m,-mm)$$
$$\left.\begin{array}{l} B(0,1,0) \\ C'(1,1,n) \end{array}\right\} \Rightarrow BC'(n,0,-1)$$
$$\left.\begin{array}{l} B'(1,1,1) \\ C(1,m,0) \end{array}\right\} \Rightarrow B'C(-m,1,m-1)$$
$$\left.\begin{array}{l} BC'(n,0,-1) \\ B'C(-m,1,m-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma(1, m-mn+n, n).$$

Ta có
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -m & -mn \\ 1 & m-mn+n & n \end{vmatrix} = 0.$$



Hình 3.3

Theo qui tắc 3 trên đây suy ra α, β, γ thẳng hàng. $\square$

2) Trong $\mathbf{P}^2$ cho mục tiêu $\{A_1, A_2, A_3; E\}$. Kí hiệu $E_1 = A_2A_3 \times EA_1, E_2 = A_1A_3 \times EA_2, E_3 = A_1A_2 \times EA_3$. Gọi $\alpha = A_2A_3 \times$

$E_2E_3, \beta = A_1A_3 \times E_1E_3, \gamma = A_1A_2 \times E_1E_2$ Chứng tỏ rằng 3 điểm α, β, γ thẳng hàng (Hình 3.3).

Giải. Áp dung định lý Desargues đối với 2 tam giác $A_1A_2A_3$ và $E_1E_2E_3$ cho ngay kết quả. Ở đây ta giải bằng cách áp dụng các qui tắc trên.

Ta có

$$\left.\begin{array}{r} A_2A_3(1,0,0) \\ EA_1(0,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow E_1(0,-1,1)$$
$$\left.\begin{array}{r} A_1A_3(0,1,0) \\ EA_2(1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow E_2(1,0,-1)$$
$$\left.\begin{array}{r} A_1A_2(0,0,1) \\ EA_3(1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow E_3(-1,1,0)$$
$$\left.\begin{array}{r} A_1A_2(0,0,1) \\ E_1E_2(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma(-1,1,0)$$
$$\left.\begin{array}{r} A_2A_3(1,1,0) \\ E_2E_3(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha(0,-1,1)$$
$$\left.\begin{array}{l} A_1A_3(0,1,0) \\ E_1E_3(-1,-1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \beta(-1,0,1).$$

Do $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, theo qui tắc 3 trên đây ta có α, β, γ thẳng hàng. □

3.1.4 *Tỷ số kép*

a) Tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng

Định nghĩa 3.1.4.1. Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ cho bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D trong đó ba điểm A, B, C đôi một không trùng nhau. Gọi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ lần lượt là các vectơ đại diện cho các điểm A, B, C, D thì các vectơ đó thuộc một không gian vectơ hai chiều, trong đó $\vec{a}, \vec{b}$ độc lập tuyến tính. Ta có các số k_1, l_1 và k_2, l_2 sao cho:

$$\vec{c} = k_1\vec{a} + l_1\vec{b},$$
$$\vec{d} = k_2\vec{a} + l_2\vec{b}.$$

(vì C không trùng với A và B nên $k_1 \neq 0, l_1 \neq 0$). Khi đó:

+ Nếu tỉ số $\dfrac{k_2}{l_2} : \dfrac{k_1}{l_1}$ có nghĩa (tức là $l_2 \neq 0$), thì nó được gọi là tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D và ký hiệu là $(ABCD)$.

+ Nếu $l_2 = 0$ thì phân số $\dfrac{k_2}{t_2}$ không có nghĩa. Khi đó ta xem tỉ số kép của bốn điểm A, B, C, D bằng vô cùng (∞). Như vậy:

$$(ABCD) = \begin{cases} \dfrac{k_2}{l_2} : \dfrac{k_1}{l_1} \text{ nếu } l_2 \neq 0 \\ \infty \quad \text{nếu } l_2 = 0 \end{cases}.$$

Nhận xét 3.1.4.2. Định nghĩa tỉ số kép trên đây không phụ thuộc vào việc chọn các vectơ đại diện của các điểm và với mục tiêu cho trước, ta có thể xác định các hệ số k_1, k_2, l_1, l_2 từ sự biểu thị tọa độ của các điểm

$$[C] = k_1[A] + l_1[B],$$
$$[D] = k_2[A] + l_2[B].$$

Tính chất 3.1.4.3. *Nếu bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng và phân biệt thì:*

i) $(ABCD) = \dfrac{1}{(ABDC)} = \dfrac{1}{(BACD)}$;

ii) $(ABCD) = (BADC)$;

iii) $(ABCD) = (CDAB)$;

iv) $(ABCD) = 1 - (ACBD) = 1 - (DBCA)$;

v) Nếu năm điểm A, B, C, D, E thẳng hàng và phân biệt thì:

$$(ABCD) \cdot (ABDE) = (ABCE).$$

Chứng minh. i) Suy từ định nghĩa.

ii) Hệ quả của 1).

iii) Giả sử $\vec{c} = k_1\vec{a} + l_1\vec{b}$ và $\vec{d} = k_2\vec{a} + l_2\vec{b}$. Ta có:

$$l_2\vec{c} = k_1l_2\vec{a} + l_1l_2\vec{b} \text{ và } l_1\vec{d} = k_2l_1\vec{a} + l_1l_2\vec{b}.$$

Suy ra:

$$(k_1l_2 - k_2l_1)\,\vec{a} = l_2\vec{c} - l_1\vec{d}$$

và

$$k_2\vec{c} = k_1k_2\vec{a} + l_1k_2\vec{b} \text{ và } k_1\vec{d} = k_1k_2\vec{a} + k_1l_2\vec{b}.$$

Suy ra:

$$(k_1l_2 - k_2l_1)\,\vec{b} = -k_2\vec{c} + k_1\vec{d}.$$

Do đó

$$(CDAB) = \frac{-k_2}{k_1} : \frac{l_2}{-l_1} = \frac{k_2}{l_2} : \frac{k_1}{l_1} = (ABCD).$$

iv) Từ các hệ thức

$$\vec{c} = k_1\vec{a} + l_1\vec{b},$$
$$\vec{d} = k_2\vec{a} + l_2\vec{b}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} l_1\vec{b} &= -k_1\vec{a} + \vec{c}, \\ l_1\vec{d} &= k_2l_1\vec{a} + l_2l_1\vec{b} \\ &= k_2l_1\vec{a} + l_2\left(-k_1\vec{a} + \vec{c}\right) \\ &= (k_2l_1 - l_2k_1)\,\vec{a} + l_2\vec{c}. \end{aligned}$$

Bởi vậy

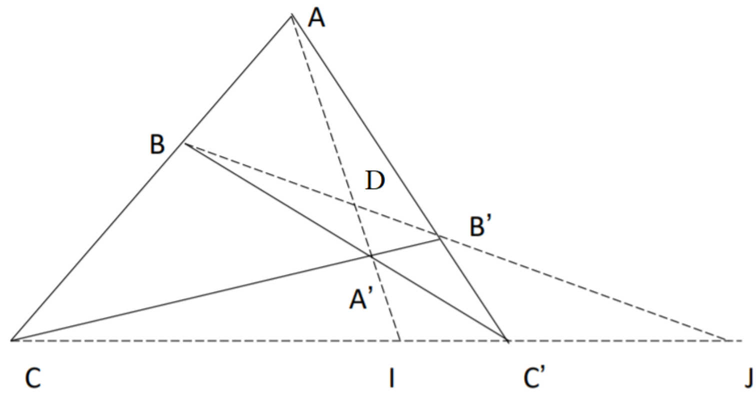
$$(ACBD) = \frac{k_2l_1 - l_2k_1}{l_2} : \frac{-k_1}{1} = 1 - \frac{l_1k_2}{l_2k_1} = 1 - (ABCD).$$

v) Suy ra từ định nghĩa. □

Nếu tỉ số kép $(ABCD) = -1$ thì ta nói rằng cặp điểm C, D chia điều hòa cặp điểm A, B. Vì $(ABCD) = (CDAB)$ nên $(CDAB) = -1$, do đó cặp điểm A, B cũng chia điều hòa cặp điểm C, D. Bởi vậy, ta còn nói cặp điểm A, B và cặp điểm C, D liên hiệp điều hòa hay A, B, C, D là hàng điểm điều hòa.

Định nghĩa 3.1.4.4. [Hình bốn cạnh toàn phần] Tập hợp bốn đường thẳng a, b, c, d trong $\mathbf{P}^2$, trong đó không có ba đường nào đồng qui, được gọi là hình bốn cạnh toàn phần. Các đường a, b, c, d được gọi là các cạnh. Mỗi giao điểm của hai cạnh được gọi là một đỉnh (có 6 đỉnh). Hai đỉnh không cùng thuộc một cạnh được gọi là hai đỉnh đối diện (có 3 cặp đỉnh đối diện), đường thẳng đi qua cặp đỉnh đối diện được gọi là đường chéo (có 3 đường chéo). Giao điểm của hai đường chéo được gọi là điểm chéo (có 3 điểm chéo).

Định lý 3.1.4.5. *Trong một hình bốn cạnh toàn phần, trên mỗi đường chéo, hai đỉnh đối diện và hai điểm chéo liên hợp điều hòa với nhau.*



Hình 3.4

Trong Hình 3.4, trên đường chéo CC', hai đỉnh đối diện C, C' chia điều hòa hai điểm chéo I, J.

Chứng minh. Cho hình 4 cạnh toàn phần $AA'BB'CC'$ có các đường chéo AA', BB', CC'. Trên đường chéo CC' ta cần chứng minh $(CC'IJ) = -1$. Chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A, B', B; A'\}$. Ta có $C = AB \cap A'B'$

suy ra $C = (1, 0, 1)$.

$$C' = AB' \cap A'B \Rightarrow C' = (1, 1, 0),$$
$$I = CC' \cap AA' \Rightarrow I = (2, 1, 1),$$
$$J = CC' \cap BB' \Rightarrow J = (0, 1, -1).$$

Ta có
$$[I] = [C] + [C']$$
$$[J] = -[C] + [C'].$$

Do đó $(CC'IJ) = (IJCC') = 1 : (-1) = -1$.

Tương tự, ta có $(BB'DJ) = -1$, $(AA'DI) = -1$. □

b) Tỉ số kép của chùm bốn siêu phẳng

Định nghĩa 3.1.4.6. Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, tập hợp các siêu phẳng cùng đi qua một $(n-2)-$phẳng được gọi là chùm siêu phẳng và $(n-2)-$phẳng được gọi là giá của chùm.

Nhận xét 3.1.4.7. Xét chùm siêu phẳng có giá là giao của hai siêu phẳng phân biệt $\mathbf{U}, \mathbf{V}$. Thế thì một siêu phẳng $\mathbf{X}$ thuộc chùm khi và chỉ khi 3 siêu phẳng $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{X}$ không độc lập, điều này tương đương với tọa độ của $\mathbf{X}$ biểu thị được qua tọa độ các siêu phẳng $\mathbf{U}, \mathbf{V}$, tức là
$$[\mathbf{X}] = p[\mathbf{U}] + q[\mathbf{V}].$$

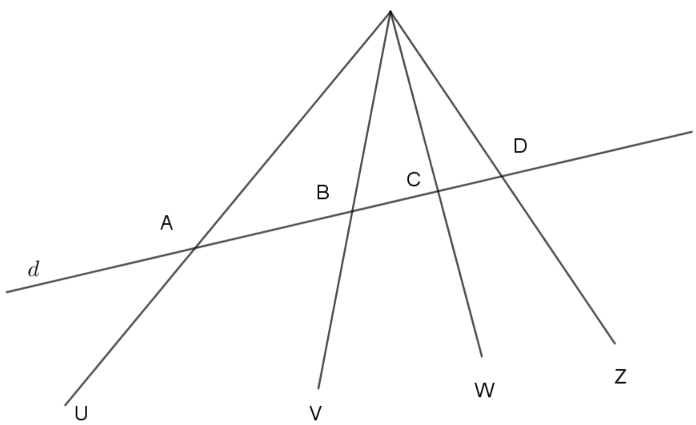
Định nghĩa 3.1.4.8. Cho chùm 4 siêu phẳng $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}$ sao cho 3 siêu phẳng $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ đôi một phân biệt, các siêu phẳng $\mathbf{W}$, $\mathbf{Z}$ thuộc chùm có giá xác định bởi hai siêu phẳng phân biệt $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ nên có các hệ số k_1, k_2, l_1, l_2 sao cho
$$[\mathbf{W}] = k_1[\mathbf{U}] + l_1[\mathbf{V}],$$
$$[\mathbf{Z}] = k_2[\mathbf{U}] + l_2[\mathbf{V}].$$

Tỉ số kép của chùm 4 siêu phẳng theo thứ tự $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}$, ký hiệu $(\mathbf{UVWZ})$, được định nghĩa bởi
$$(\mathbf{UVWZ}) = \begin{cases} \dfrac{k_2}{l_2} : \dfrac{k_1}{l_1} & \text{nếu } l_2 \neq 0 \\ \infty & \text{nếu } l_2 = 0 \end{cases}.$$

Nếu $(\mathbf{UVWZ}) = -1$ thì ta nói $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}$ lập thành chùm điều hòa hay $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ chia điều hòa $\mathbf{W}, \mathbf{Z}$.

Kết quả sau đây cho sự liên hệ giữa tỷ số kép của hàng 4 điểm và tỷ số kép của chùm 4 siêu phẳng.

Định lý 3.1.4.9. *Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ cho bốn siêu phẳng $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}$ thuộc một chùm, trong đó $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}$ đôi một phân biệt. Nếu d là đường thẳng cắt bốn siêu phẳng đó lần lượt tại các điểm A, B, C, D (không thuộc giá của chùm) thì tỉ số kép của bốn điểm đó không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d và $(ABCD) = (\mathbf{UVWZ})$.*



Hình 3.5: $(ABCD) = (\mathbf{UVWZ})$

Chứng minh. Xét mục tiêu $\{S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}; E\}$ sao cho $S_3, \ldots, S_{n+1}$ thuộc giá của chùm và $S_1 = A, S_2 = B$. Khi đó siêu phẳng $\mathbf{U}$ có phương trình $x_2 = 0$ và siêu phẳng $\mathbf{V}$ có phương trình $x_1 = 0$, do đó tọa độ của $\mathbf{U}$ là $(0, 1, \ldots, 0)$ và tọa độ của $\mathbf{V}$ là $(1, 0, \ldots, 0)$. $\mathbf{W}$ thuộc chùm với giá là $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ nên tọa độ của $\mathbf{W}$ có dạng $(\lambda_1, \mu_1, 0, \ldots, 0)$ và phương trình của $\mathbf{W}$ có dạng $\lambda_1 x_1 + \mu_1 x_2 = 0$. Đường thẳng AB có phương trình tham số $[X] = t_1[A] + t_2[B]$.

Do đó tọa độ giao điểm C của AB với siêu phẳng $\mathbf{W}$ là (t_1, t_2, 0, ..., 0) với t_1, t_2 thỏa mãn $\lambda_1 t_1 + \mu_1 t_2 = 0$. Chọn $t_1 = \mu_1, t_2 = -\lambda_1$, tức tọa độ C là $(\mu_1, -\lambda_1, 0, \ldots, 0)$. Tương tự, siêu phẳng $\mathbf{Z}$ có tọa độ $(\lambda_2, \mu_2, 0, \ldots, 0)$ và tọa độ giao điểm D của đường thẳng AB và $\mathbf{Z}$ là $(\mu_2, -\lambda_2, 0, \ldots, 0)$. Từ đó $(ABCD) = \frac{-\lambda_2}{\mu_2} : \frac{-\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} : \frac{\lambda_1}{\mu_1} =$ $(\mathbf{UVWZ})$ (Hình 3.5). □

Từ định lý về hình bốn cạnh toàn phần ở trên, ta có:

Hệ quả 3.1.4.10. *Trong hình bốn cạnh toàn phần, hai đường chéo đi qua một điểm chéo nào đó chia điều hòa hai đường thẳng nối điểm chéo đó với hai đỉnh nằm trên đường chéo thứ ba.*

3.1.5 *Nguyên tắc đối ngẫu*

a) Phép đối xạ trong $\mathbf{P}^n$

Ký hiệu Π^n là tập hợp các phẳng trong $\mathbf{P}^n$ có số chiều bé hơn n. Chọn trong $\mathbf{P}^n$ một mục tiêu xạ ảnh nào đó và xác định ánh xạ $\pi : \Pi^n \to \Pi^n$ như sau:

- Nếu A là một điểm (tức là một $0-$phẳng) thì $\pi(A)$ là siêu phẳng có tọa độ giống tọa độ của A, cụ thể là: nếu $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ thì $\pi(A) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$.

- Nếu $\mathbf{U}$ là cái phẳng nào đó thì $\pi(\mathbf{U}) = \bigcap_{X \in \mathbf{U}} \pi(X)$.

Tính chất 3.1.5.1. *i) Phép đối xạ biến mỗi điểm ($0-$phẳng) thành một siêu phẳng.*

ii) Phép đối xạ biến m điểm độc lập thành m siêu phẳng độc lập, biến m điểm không độc lập thành m siêu phẳng không độc lập.

iii) Phép đối xạ biến $r-$phẳng thành $(n-r-1)-$phẳng.

iv) Cho hai phẳng $\mathbf{U}$ *và* $\mathbf{V}$, *nếu* $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ *thì* $\pi(\mathbf{V}) \subset \pi(\mathbf{U})$.

Chứng minh. i) Hiển nhiên.

ii) Thật vậy, cho m điểm $A_i, i = 1, 2, \ldots, m$. Với $A_i = (a_{i1}$, a_{i2}, …, $a_{in+1})$ khi đó $\pi(A_i)$ là siêu phẳng có tọa độ bằng tọa độ của A_i. Xét ma trận $(a_{ij}), i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n+1$.

Hệ m điểm A_i là độc lập khi và chỉ khi ma trận (a_{ij}) có hạng bằng m, tức là khi và chỉ khi m siêu phẳng $\pi(A_i)$ độc lập.

iii) Thật vậy, giả sử $\mathbf{U}$ là r-phẳng, trên $\mathbf{U}$ lấy $r+1$ điểm độc lập $A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}$, khi đó $r+1$ siêu phẳng $\pi(A_1), \pi(A_2), \ldots, \pi(A_{r+1})$ cũng độc lập (theo tính chất ii), nên giao của chúng là cái phẳng $\mathbf{V}$ có số chiều là $(n-r-1)$. Ta chứng minh $\mathbf{V} = \pi(\mathbf{U})$.

- Theo định nghĩa của $\pi(\mathbf{U})$, ta có $\pi(\mathbf{U}) \subset \mathbf{V}$.

- Bây giờ ta chứng minh $\mathbf{V} \subset \pi(\mathbf{U})$: Lấy X bất kỳ thuộc $\mathbf{U}$ thì $r+2$ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}, X$ không độc lập, do đó $r+2$ siêu phẳng $\pi(A_1)$, $\pi(A_2), \ldots$, $\pi(A_{r+1})$, $\pi(X)$ không độc lập, do đó $\pi(X) \supset \mathbf{V}$ hay $\pi(\mathbf{U}) \supset \mathbf{V}$.

iv) Thật vậy, theo định nghĩa $\pi(\mathbf{U}) = \bigcap_{X \in \mathbf{U}} \pi(X)$ và $\pi(\mathbf{V}) = \bigcap_{X \in \mathbf{V}} \pi(X)$. Bởi vậy, nếu $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ thì $\pi(\mathbf{V}) \subset \pi(\mathbf{U})$. $\square$

b) Nguyên tắc đối ngẫu

Hai cái phẳng $\mathbf{U}$ và $\mathbf{V}$ trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ được gọi là có quan hệ liên thuộc nếu một trong hai phẳng đó chứa phẳng kia. Khi đó ta nói $\mathbf{U}$ thuộc $\mathbf{V}$ hoặc $\mathbf{V}$ thuộc $\mathbf{U}$. Chẳng hạn, nếu điểm A nằm trên đường thẳng a thì ta nói: điểm A thuộc đường thẳng a, hoặc nói: đường thẳng a thuộc điểm A. Như vậy, từ "thuộc" đồng nghĩa với một trong các từ: "nằm trên", "đi qua", "chứa", "chứa trong".

Với cách hiểu như vậy, ta có thể nói rằng: phép đối xạ giữ nguyên quan hệ liên thuộc giữa các phẳng, nghĩa là nếu $\mathbf{U}$ thuộc $\mathbf{V}$ thì $\pi(\mathbf{U})$ thuộc $\pi(\mathbf{V})$.

Bây giờ, giả sử $\mathcal{M}$ là một mệnh đề nào đó trong không gian xạ ảnh P^n nói về các phẳng và các quan hệ liên thuộc giữa chúng. Nếu trong mệnh đề các từ "$r-$phẳng" được thay bằng các từ "$(n-r-1)-$phẳng", các từ khác giữ nguyên thì ta được mệnh đề mới $\mathcal{M}^*$, được gọi là mệnh đề đối ngẫu của mệnh đề $\mathcal{M}$. Hiển nhiên, mệnh đề M là đối ngẫu của mệnh đề $\mathcal{M}^*$, bởi vậy ta nói $\mathcal{M}$ và $\mathcal{M}^*$ là cặp mệnh đề đối ngẫu với nhau.

Từ tính chất của phép đối xạ, ta có kết quả sau đây được gọi là nguyên tắc đối ngẫu: "Trong không gian xạ ảnh cặp mệnh đề đối ngẫu với nhau hoặc cùng đúng, hoặc cùng sai".

Lưu ý. Cách thành lập mệnh đề đối ngẫu trong $\mathbf{P}^2$ và $\mathbf{P}^3$:

+ Trong $\mathbf{P}^2$, để có mệnh đề đối ngẫu của mệnh đề $\mathcal{M}$, ta thay từ "điểm" bởi từ "đường thẳng" và ngược lại, còn các từ khác giữ nguyên.

Ví dụ: Mệnh đề: "Tồn tại đường thẳng đi qua (thuộc) hai điểm phân biệt". Mệnh đề đối ngẫu là: "Tồn tại điểm thuộc hai đường thẳng phân biệt". Điều này có nghĩa là hai đường thẳng trong $\mathbf{P}^2$ luôn có điểm chung.

+ Trong $\mathbf{P}^3$, để có mệnh đề đối ngẫu của mệnh đề M, ta thay từ "điểm" bởi từ "mặt phẳng" và ngược lại, còn các từ khác giữ nguyên.

c) Khái niệm đối ngẫu

Một khái niệm trong không gian $\mathbf{P}^n$ nói về các phẳng có khái niệm đối ngẫu nếu trong định nghĩa của nó, ta thay từ "$r-$phẳng" bởi từ "$(n-r-1)-$phẳng".

Ví dụ 3.1.5.2. 1) Khái niệm r điểm độc lập trong $\mathbf{P}^n$ được định nghĩa là: "r điểm không cùng thuộc một $(r-2)-$phẳng có khái niệm đối ngẫu là r siêu phẳng độc lập, được cho bởi định nghĩa: "r siêu phẳng không cùng thuộc một $(n-r+1)-$phẳng".

2) Trong $\mathbf{P}^2$ đối ngẫu của khái niệm hình bốn cạnh toàn phần là khái niệm hình bốn đỉnh toàn phần.

3) Trong $\mathbf{P}^n$, khái niệm chùm siêu phẳng (tập hợp các siêu phẳng cùng đi qua một $(n-2)-$phẳng) có khái niệm đối ngẫu được định nghĩa bởi: tập hợp các điểm cùng thuộc một $1-$phẳng, đó là khái niệm hàng điểm.

4) Cho bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng, có tỉ số kép $(ABCD) = k$. Qua phép đối xạ, các siêu phẳng $\pi(A), \pi(B), \pi(C), \pi(D)$ thuộc

một chùm và từ định nghĩa tỉ số kép của hàng 4 điểm và của chùm 4 siêu phẳng ta suy ra: $(ABCD) = (\pi(A)\pi(B)\pi(C)\pi(D))$. Bởi vậy ta nói rằng: khái niệm tỉ số kép của hàng 4 điểm và khái niệm tỉ số kép của chùm 4 siêu phẳng là các khái niệm đối ngẫu.

5) Khái niệm hàng điểm điều hòa và khái niệm chùm siêu phẳng điều hòa là cặp khái niệm đối ngẫu.

3.1.6 *Mô hình xạ ảnh của không gian afin*

a) Xây dựng mô hình

Chúng ta nhắc lại mô hình afin của không gian xạ ảnh: không gian afin $\mathbf{A}^n$ bổ sung thêm các phần tử của tập hợp $[\overrightarrow{\mathbf{A}}^n]$ được tập hợp $\mathbf{P}^n = \mathbf{A}^n \cup [\overrightarrow{\mathbf{A}}^n]$, khi đó $\mathbf{P}^n$ lập thành không gian xạ ảnh và tập $[\overrightarrow{\mathbf{A}}^n]$ là một siêu phẳng của $\mathbf{P}^n$.

Bây giờ ta mô tả quá trình ngược lại, bỏ bớt đi từ không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ một siêu phẳng nào đó và chứng tỏ phần còn lại lập thành một không gian afin. Bằng cách đó ta được mô hình xạ ảnh của không gian afin.

Giả sử $\mathbf{P}^n$ là không gian xạ ảnh liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$. Gọi $\mathbf{W}$ là một siêu phẳng nào đó của $\mathbf{P}^n$. Đặt $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \setminus W$. Ta xây dựng $\mathbf{A}^n$ thành không gian afin bằng cách sau đây:

Đưa vào $\mathbf{P}^n$ một mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ với các đỉnh $S_1, \dots, S_n$ nằm trên $\mathbf{W}$. Khi đó siêu phẳng $\mathbf{W}$ sẽ có phương trình $x_{n+1} = 0$.

Nếu điểm $X \in \mathbf{A}^n$ thì X có tọa độ $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$, trong đó $x_{n+1} \neq 0$ (vì $X \notin W$). Bởi vậy, nếu đặt $X_i = x_i/x_{n+1}$, với $i = 1, 2, \dots n$ thì ta được một bộ thứ tự gồm n số $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ với $X_i \in \mathbb{R}$, được gọi là tọa độ không thuần nhất của điểm X và viết $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Rõ ràng có một song ánh từ tập $\mathbf{A}^n$ vào tập $\mathbb{R}^n$ bằng cách cho mỗi điểm tương ứng với tọa độ không thuần nhất của nó.

Nếu có hai điểm của $\mathbf{A}^n$ là $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ và $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ thì ta ký hiệu $\overrightarrow{XY}$ là vectơ $(Y_1 - X_1, Y_2 - X_2, \dots, Y_n -$

X_n) của $\mathbb{R}^n$ (xem $\mathbb{R}^n$ là không gian vectơ trên trường $\mathbb{R}$). Bằng cách đó ta có ánh xạ $\varphi : \mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^n \to \mathbb{R}^n, \varphi(X, Y) = \overrightarrow{XY}$ thỏa mãn các tiên đề của không gian afin và do đó $\mathbf{A}^n$ trở thành không gian afin n chiều liên kết với không gian vectơ $\mathbb{R}^n$.

b) Các thể hiện trên mô hình

b1) **Mục tiêu afin**

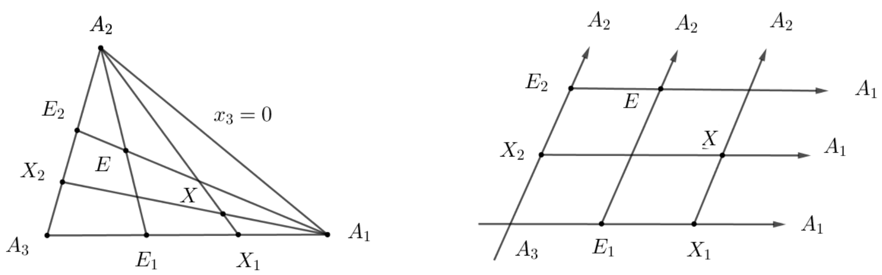
Xét mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ trong $\mathbf{P}^n$ như trên. Gọi E_i là giao điểm của đường thẳng $S_{n+1}S_i, i = 1, 2, \ldots, n$ với siêu phẳng đi qua E và mọi đỉnh của mục tiêu, trừ các đỉnh S_{n+1}, S_i. Ta có tọa độ không thuần nhất của các điểm:

$$\begin{aligned} E_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ E_2 &= (0, 1, \ldots, 0) \\ &\ldots \\ E_n &= (0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Ngoài ra, hiển nhiên $S_{n+1} = (0, 0, \ldots, 0)$. Bởi vậy, nếu ta đặt $\overrightarrow{S_{n+1}E_i} = \vec{e_i}$ thì ta được mục tiêu afin $\{S_{n+1}; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, viết tắt là $\{S_{n+1}; \vec{e_i}\}$, và được gọi là mục tiêu afin sinh ra bởi mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$. Nếu điểm X có tọa độ không thuần nhất $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ thì

$$\overrightarrow{S_{n+1}X} = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2 + \ldots + X_n\vec{e}_n$$

nên $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ chính là tọa độ afin của X đối với mục tiêu afin $\{S_{n+1}; \vec{e_i}\}$.



Hình 3.6

Ví dụ 3.1.6.1. Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \backslash \mathbf{P}^1$, ta thấy mục tiêu afin $\{A_3; E_1, E_2\}$ được sinh ra bởi mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$. Trong trường hợp này đường thẳng $\mathbf{P}^1 = A_1A_2$ là đường thẳng vô tận có phương trình $x_3 = 0$ nên không có trong mặt phẳng afin. Các đường thẳng đồng quy tại A_1 hoặc A_2 nằm trên $\mathbf{P}^1$ trở thành những đường thẳng song song với nhau trong mặt phẳng afin (Hình 3.6).

b2) **Các phẳng afin**

Ta chứng minh rằng: nếu $m-$phẳng xạ ảnh $\mathbf{U}$ của $\mathbf{P}^n$ không nằm trên siêu phẳng $\mathbf{W}$ thì tập $\mathbf{U}' = \mathbf{U} \backslash \mathbf{W}$ là một $m-$phẳng afin trong không gian afin A^n. Thật vậy, giả sử $m-$phẳng $\mathbf{U}$ có phương trình đối với mục tiêu $\{S_i; E\}$ là:

$$\sum_{j=1}^{n+1} u_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

trong đó ma trận $(u_{ij}), i = 1, 2, \ldots, n-m; j = 1, 2, \ldots, n+1$, có hạng bằng $n-m$. Vì $\mathbf{U}$ không nằm trên siêu phẳng $\mathbf{W}$ nên khi thêm vào hệ phương trình trên phương trình thứ $n-m+1$ là $x_{n+1} = 0$ (phương trình của $\mathbf{W}$), ta được hệ $n-m+1$ phương trình mà ma trận các hệ số có hạng bằng $n-m+1$. Từ đó suy ra ma trận $(u_{ij}), i = 1, 2, \ldots, n-m; j = 1, 2, \ldots, n$ có hạng bằng $n-m$.

Đặt $\mathbf{U}' = \mathbf{U} \backslash \mathbf{W}$, ta có $\mathbf{U}' \neq \emptyset$ và mỗi điểm $X \in \mathbf{U}'$ có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ thỏa mãn hệ $n-m$ phương trình trên, đồng thời $x_{n+1} \neq 0$. Từ đó suy ra tọa độ afin $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ của X thỏa mãn hệ phương trình:

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} X_j + u_{in+1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-m$$

trong đó ma trận $(u_{ij}), i = 1, 2, \ldots, n-m; j = 1, \ldots, n$, có hạng bằng $n-m$. Điều đó chứng tỏ rằng $\mathbf{U}' = \mathbf{U} \backslash \mathbf{W}$ là một $m-$phẳng của không gian afin $\mathbf{A}^n$.

Ngược lại, mỗi $m-$phẳng trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ đều nhận được từ một $m-$phẳng xạ ảnh không nằm trong $\mathbf{W}$ sau khi bỏ đi các điểm thuộc $\mathbf{W}$.

Nếu $I = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0)$ là điểm vô tận của phẳng afin $\mathbf{U}' = \mathbf{U} \setminus W$, tức tọa độ I thỏa mãn hệ phương trình xác định giao của $\mathbf{U}$ và W, ta nhận thấy $\vec{c} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ thuộc phương của phẳng afin $\mathbf{U}'$. Đặc biệt, khi $m = 1$, ta có $\vec{c}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng afin nhận được từ đường thẳng xạ ảnh sau khi bỏ đi điểm vô tận.

b3) **Quan hệ song song của các phẳng**

Trong $\mathbf{P}^n$ cho hai cái phẳng $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ phân biệt $(r \geq s)$ đều không thuộc siêu phẳng $\mathbf{W} = \mathbf{P}^{n-1}$ và giả sử $\mathbf{P}^r \cap \mathbf{P}^s = \mathbf{P}^{s-1} \subset \mathbf{P}^{n-1}$ $(\mathbf{P}^{s-1} = \mathbf{P}^{n-1} \cap \mathbf{P}^s)$ Ta cần chứng minh $\mathbf{P}^r \backslash \mathbf{P}^{n-1}$ và $\mathbf{P}^s \backslash \mathbf{P}^{n-1}$ là hai phẳng afin song song. Đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ đã chọn, giả sử $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ có phương trình:

$$(\mathbf{P}^r) : \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j = 0, i = 1, 2, \ldots, n - r,$$

$$(\mathbf{P}^s) : \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij} x_j = 0, i = 1, 2, \ldots, n - s.$$

Khi đó theo giả thiết ta có $\mathbf{P}^{s-1} = \mathbf{P}^r \cap \mathbf{P}^s \cap \mathbf{P}^{n-1}$ nên phương trình của $\mathbf{P}^{s-1}$ là:

$$\left(\mathbf{P}^{s-1}\right) : \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j = 0, & i = 1, 2, \ldots, n - r; \\ \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij} x_j = 0, & i = 1, 2, \ldots, n - s; \\ x_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Hệ này gồm có $2n-(r+s)+1$ phương trình nhưng vì $\dim \mathbf{P}^{s-1} = s-1$ nên trong hệ trên có $n - (s - 1) = n - s + 1$ phương trình độc lập. Do đó ta có thể lấy $n - s + 1$ phương trình cuối của hệ trên làm phương trình của $\mathbf{P}^{s-1}$. Như vậy dòng hệ số ở vế trái của $n - r$ phương trình đầu được biểu thị tuyến tính qua các dòng hệ số ở vế trái của $n - s + 1$ phương trình cuối.

Bây giờ nếu gọi $\mathbf{A}^r$ và $\mathbf{A}^s$ là hai phẳng afin được sinh ra bởi hai cái phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ thì khi đó phương trình của chúng đối với mục tiêu afin lần lượt là:

$$(\mathbf{A}^r) : \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + a_{in+1} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n - r;$$
$$(\mathbf{A}^s) : \textstyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j + b_{in+1} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n - s.$$

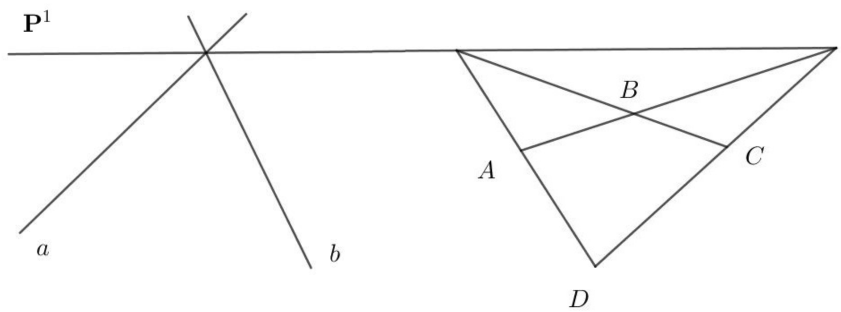
Từ trên ta suy ra dòng hệ số các biến trong mỗi vế trái của $n-r$ phương trình đầu được biểu thị tuyến tính qua các dòng hệ số các biến của $n-s$ phương trình sau, nghĩa là:

$$a_{ij} = k_{i1}\ b_{1j} + k_{i2}\ b_{2j} + \ldots + k_{i,n-s}b_{n-s,j}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-r; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Điều đó chứng tỏ các phẳng $\mathbf{A}^s, \mathbf{A}^r$ có phương thỏa mãn $\overrightarrow{\mathbf{A}}^s \subset \overrightarrow{\mathbf{A}}^r$. Vì vậy $\mathbf{A}^s$ song song với $\mathbf{A}^r$.

Chú ý. Ta thường gọi các điểm của siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ là các điểm vô tận. Do đó nếu hai cái phẳng $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ có giao là phẳng $\mathbf{Q}$ chứa toàn điểm vô tận, nghĩa là $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P}^{n-1}$, thì ta có $\mathbf{A}^s$ song song với $\mathbf{A}^r$.

Ví dụ 3.1.6.2. Trong $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \backslash \mathbf{P}^1$ hai đường thẳng a, b song song với nhau nghĩa là hai đường thẳng đó cắt nhau tại một điểm nằm trên $\mathbf{P}^1$. Hình tứ giác $ABCD$ có $AB \cap DC$ và $AD \cap BC$ thuộc $\mathbf{P}^1$ thì tứ giác đó biểu thị cho hình bình hành $ABCD$ trong mặt phẳng afin (Hình 3.7).



Hình 3.7

b4) **Tỉ số kép**

Cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D nằm trên một đường thẳng xạ ảnh l của $\mathbf{P}^n$. Xảy ra 2 trường hợp sau:

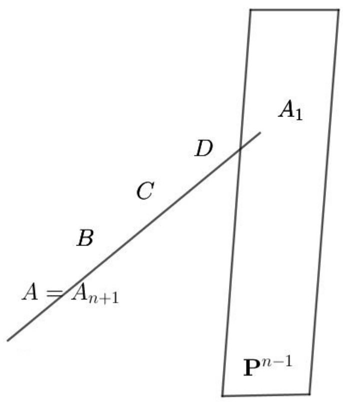
+ Giả sử không có điểm nào trong bốn điểm thuộc siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$. Ta chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_i, E\}$ sao cho $A_{n+1} \equiv A, A_1 = l \cap \mathbf{P}^{n-1}$. Khi đó các điểm B, C, D có tọa độ biểu thị tuyến tính qua tọa độ của A_{n+1} và A_1. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (0, 0, \ldots, 0, 1) \\ B &= (b, 0, \ldots, 0, 1) \\ C &= (c, 0, \ldots, 0, 1) \\ D &= (d, 0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}.$$

Thực vậy, ta hãy tính tọa độ điểm $B\,(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1})$:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu/\lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tương tự ta tính được tọa độ điểm C và D.



Hình 3.8

Bây giờ ta hãy tính tỉ số kép $(ABCD)$. Ta có:

$$[C] = \frac{b-c}{b}[A] + \frac{c}{b}[B];$$
$$[D] = \frac{b-d}{b}[A] + \frac{d}{b}[B].$$

Do đó $(ABCD) = \dfrac{c}{b-c} : \dfrac{d}{b-d}$.

Nếu chuyển tọa độ xạ ảnh của các điểm A, B, C, D sang tọa độ afin ta có:

$$\begin{aligned} A &= (0, 0, \ldots, 0) \\ B &= (b, 0, \ldots, 0) \\ C &= (c, 0, \ldots, 0) \\ D &= (d, 0, \ldots, 0) \end{aligned}.$$

Từ đó ta tính được tọa độ của các vectơ:

$$\overrightarrow{CA} = (-c, 0, \ldots, 0); \quad \overrightarrow{DA} = (-d, 0, \ldots, 0);$$

$$\overrightarrow{CB} = (b-c, 0, \ldots, 0); \quad \overrightarrow{DB} = (b-d, 0, \ldots, 0).$$

Do đó $(CAB) = -\dfrac{c}{b-c}$ và $(DAB) = -\dfrac{d}{b-d}$. Từ đó $(ABCD) = \dfrac{(CAB)}{(DAB)}$.

Như vậy tỉ số kép $(ABCD)$ của bốn điểm A, B, C, D bằng tỉ số của hai tỉ số đơn (CAB) và (DAB).

+ Nếu có một trong bốn điểm A, B, C, D là điểm vô tận, thí dụ điểm D thuộc siêu phẳng P^{n-1}, thì khi $D \equiv A_1$ ta có:

$$[D] = -[A] + [B]$$

nên $(ABCD) = \dfrac{c}{b-a} : \dfrac{1}{-1} = -\dfrac{c}{b-a} = (CAB)$.

Đặc biệt, nếu $(ABCD) = -1$ và D là điểm vô tận thì $(CAB) = -1$, khi đó C là trung điểm của đoạn AB.

c) Một số áp dụng của mô hình

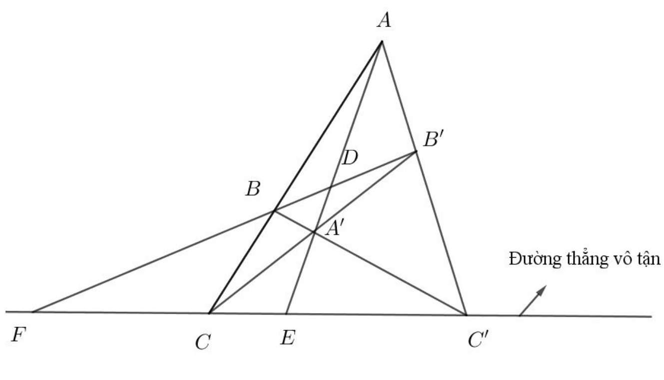
Trong mục này, các yếu tố nói đến trong không gian xạ ảnh được hiểu thuộc hình học xạ ảnh (định nghĩa chính xác hình học xạ ảnh sẽ trình bày ở mục sau).

c1) **Dùng hình học afin để nghiên cứu hình học xạ ảnh**

Ta có thể chứng minh một số định lý của hình học xạ ảnh bằng cách dựa vào những kết quả đã biết của hình học afin. Sau khi chọn siêu phẳng vô tận $\mathbf{P}^{n-1}$ một cách thích hợp, ta có thể chuyển về một bài toán afin mà cách giải dễ thực hiện hơn.

Ví dụ 3.1.6.3. Chứng minh rằng trong một hình bốn cạnh toàn phần, trên mỗi đường chéo hai đỉnh đối diện và hai điểm chéo liên hiệp điều hòa với nhau.

Trước đây ta đã giải bài toán này bằng công cụ của hình học xạ ảnh, bây giờ ta hãy dùng mô hình afin của không gian xạ ảnh để giải bài toán này.



Hình 3.9

Giả sử hình bốn cạnh toàn phần trong $\mathbf{P}^2$ có các cặp đỉnh đối diện A và A', B và B', C và C' (Hình 3.9). Chọn đường thẳng vô tận $\mathbf{P}^1$ đi qua hai điểm C, C' mà không đi qua một đỉnh nào khác nữa của hình bốn cạnh toàn phần. Khi đó ta có hai đường thẳng AB và $A'B'$ song song với nhau. Hai đường thẳng AB' và $A'B$ cũng song song với nhau. Tứ giác $ABA'B'$ là một hình bình hành trong không gian afin $\mathbf{A}^2$. Theo kết quả của hình học afin ta có điểm chéo D là trung điểm của AA' và BB'. Vì vậy, trong $\mathbf{P}^2$ điểm D và điểm vô tận E liên hiệp điều hòa với hai điểm A, A', bởi vì: $(AA'DE) = (DAA') = -1$.

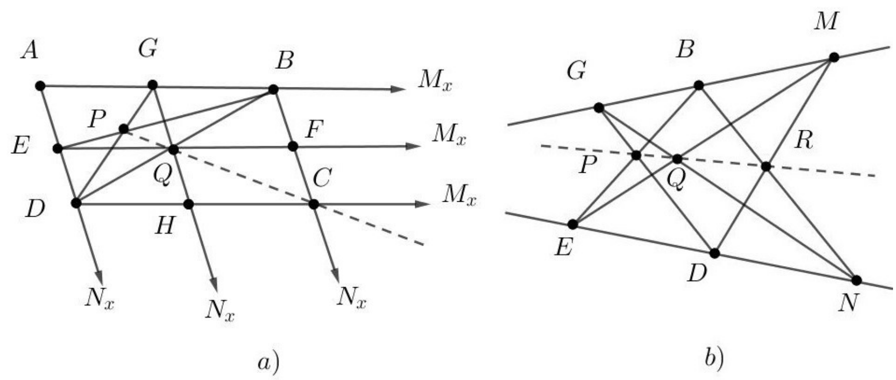
Tương tự, D và F liên hợp điều hòa với B và B'

c2) **Dùng hình học xạ ảnh để nghiên cứu hình học afin**

Ta có thể chứng minh một số định lý của hình học afin bằng cách dựa vào những kết quả đã biết của hình học xạ ảnh. Cụ thể là, từ một kết quả đã biết trong hình học xạ ảnh, bỏ đi một siêu phẳng thích hợp ta nhận được kết quả mong muốn trong hình học afin.

Ví dụ 3.1.6.4. Giải bài toán afin sau đây:

"Cho hình bình hành $ABCD$. Một đường thẳng song song với cạnh AB cắt các cạnh AD, BC lần lượt tại E và F. Một đường thẳng song song với cạnh AD cắt các cạnh AB, DC lần lượt tại G và H. Gọi $P = BE \cap DG, Q = EF \cap GH$. Chứng minh rằng ba điểm P, Q, C thẳng hàng" (Hình 3.10a).



Hình 3.10

Giải. Ta hãy bổ sung các điểm vô tận vào mặt phẳng afin chứa hình bình hành $ABCD$. Các đường thẳng AB, EF, DC đồng quy tại một điểm vô tận M. Các đường thẳng AD, GH, BC đồng quy tại một điểm vô tận N (Hình 3.10b). Sau khi đưa thêm đường thẳng vô tận vào mặt phẳng afin ta có mặt phẳng xạ ảnh và trên đó ta có bài toán xạ ảnh sau đây: "Cho ba điểm G, B, M thuộc một đường thẳng và ba điểm E, D, N thuộc một đường thẳng khác. Gọi $P = EB \cap DG$, $Q = EM \cap NG$, $R = M \cap NB$. Chứng minh ba điểm B, Q, R thẳng hàng". Sau khi chuyển thành bài toán xạ ảnh, áp dụng định lí Pappus ta có ngay kết quả cần chứng minh.

c3) **Sáng tạo các bài toán mới**

- Từ một bài toán xạ ảnh trong không gian xạ ảnh, bằng cách chọn các siêu phẳng khác nhau đóng vai trò siêu phẳng vô tận, ta có nhiều bài toán afin khác nhau mà chúng được suy ra từ kết quả đã biết của bài toán xạ ảnh.

- Từ một bài toán afin ta có thể suy ra một bài toán xạ ảnh bằng cách bổ sung thêm vào không gian afin này những điểm vô tận thuộc một siêu phẳng vô tận. Khi đó ta có một bài toán trong không gian xạ ảnh mà các kết quả được suy ra từ bài toán afin.

- Từ một bài toán afin ta có thể suy ra nhiều bài toán afin khác bằng cách kết hợp cả hai cách làm trên đây.

Ví dụ 3.1.6.5. Từ bài toán afin: "Trong một hình thang đường thẳng đi qua giao điểm của hai cạnh bên và giao điểm của hai đường chéo cắt hai đáy tại trung điểm của mỗi đường" suy ra bài toán xạ ảnh, đó là tính chất đã biết trên hình 4 cạnh toàn phần. Tiếp tục, từ bài toán xạ ảnh này, bằng việc chọn đường thẳng vô tận thích hợp ta suy ra bài toán afin: "Trong một hình bình hành, các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường".

Thông qua mô hình xạ ảnh của không gian afin, chúng ta thấy giữa hình học afin và hình học xạ ảnh có một sự liên quan mật thiết. Hình học afin và hình học xạ ảnh còn có nhiều mối liên hệ mà chúng ta sẽ tiếp tục tìm hiểu thêm trong các phần sau.

3.2 Ánh xạ xạ ảnh và biến đổi xạ ảnh

3.2.1 *Ánh xạ xạ ảnh: định nghĩa, các tính chất*

Định nghĩa 3.2.1.1. Cho hai không gian xạ ảnh là $\mathbf{P}$ và $\mathbf{P}'$ lần lượt liên kết với hai không gian vectơ $\mathbf{V}$ và $\mathbf{V}'$. Một ánh xạ $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ được gọi là ánh xạ xạ ảnh nếu có một ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ sao cho nếu $\vec{x}$ là vectơ đại diện của điểm $A \in \mathbf{P}$ thì $\varphi(\vec{x})$ là vectơ đại diện của điểm $f(A) \in \mathbf{P}'$. Khi đó ta nói rằng ánh xạ xạ ảnh f được cảm sinh bởi ánh xạ tuyến tính φ và φ được gọi là đại diện của ánh xạ xạ ảnh f.

Ví dụ 3.2.1.2. Từ định nghĩa dễ thấy rằng ánh xạ đồng nhất trên không gian xạ ảnh $\mathbf{P}$ là ánh xạ xạ ảnh, có ánh xạ đại diện là ánh xạ đồng nhất trên không gian vectơ liên kết $\mathbf{V}$.

Tính chất 3.2.1.3. *i) Ánh xạ tuyến tính đại diện của ánh xạ xạ ảnh là đơn cấu.*

ii) Ánh xạ xạ ảnh là đơn ánh.

iii) Ánh xạ xạ ảnh bảo toàn tính độc lập và tính phụ thuộc của một hệ điểm.

iv) Mỗi đơn cấu tuyến tính $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ *là đại diện cho một ánh xạ xạ ảnh duy nhất* $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$. *Hai đơn cấu tuyến tính* $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ *và* $\varphi' : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ *cùng đại diện cho một ánh xạ xạ ảnh* $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ *khi và chỉ khi có số* $k \neq 0$ *sao cho* $\varphi = k\varphi'$.

v) Ánh xạ xạ ảnh biến một $m-$*phẳng thành một* $m-$*phẳng.*

vi) Ánh xạ xạ ảnh bảo toàn tỉ số kép của 4 điểm thẳng hàng.

Chứng minh. i) Thật vậy, giả sử φ là đại diện của ánh xạ xạ ảnh f. Nếu vectơ $\vec{x} \in \mathbf{V}\backslash\{\vec{0}\}$ là đại diện cho điểm $A \in \mathbf{P}$ thì $\varphi(\vec{x})$ là vectơ đại diện của điểm $f(A) \in \mathbf{P}'$ nên $\varphi(\vec{x}) \in \mathbf{V}'\backslash\{\vec{0}\}$ tức $\mathrm{Ker}\varphi = \{\vec{0}\}$. Do đó φ là đơn cấu.

ii) Thật vậy, giả sử A và B là hai điểm của $\mathbf{P}$ mà $f(A) = f(B)$. Khi đó, nếu gọi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ đại diện của A và B thì $\varphi(\vec{a})$ và $\varphi(\vec{b})$ cùng đại diện cho một điểm $f(A) = f(B)$ nên $\varphi(\vec{a}) = k\varphi(\vec{b}) = \varphi(k\vec{b}), k \neq 0$. Vì φ đơn cấu nên $\vec{a} = k\vec{b}$, tức A và B trùng nhau.

iii) Thật vậy, do đơn cấu tuyến tính bảo tồn tính độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của một hệ vectơ.

iv) Thật vậy, nếu đã cho đơn cấu tuyến tính $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ thì ánh xạ xạ ảnh $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ được hoàn toàn xác định. Cụ thể là, nếu $M \in \mathbf{P}$ có vectơ đại diện là $\vec{x} \in \mathbf{V}$ thì $f(M)$ có đại diện là $\varphi(\vec{x})$.

Nếu $\varphi' : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ cũng là đại diện cho ánh xạ xạ ảnh $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ thì với mỗi vectơ $\vec{x} \in \mathbf{V}$, các vectơ $\varphi(\vec{x})$ và $\varphi'(\vec{x})$ cùng đại diện cho một điểm thuộc $\mathbf{P}'$ nên $\varphi(\vec{x}) = k_x\varphi'(\vec{x})$. Lấy một cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ trong $\mathbf{V}$, khi đó $\varphi(\vec{e}_1) = k_1\varphi'(\vec{e}_1)$, $\varphi(\vec{e}_2) = k_2\varphi'(\vec{e}_2), \ldots$, $\varphi(\vec{e}_{n+1}) = k_{n+1}\varphi'(\vec{e}_{n+1})$ và

$$\varphi\left(\vec{e}_1\right) + \ldots + \varphi\left(\vec{e}_{n+1}\right) = \varphi\left(\vec{e}_1 + \ldots + \vec{e}_{n+1}\right) = k\varphi'\left(\vec{e}_1 + \ldots + \vec{e}_{n+1}\right).$$

Do đó

$$k_1\varphi'\left(\vec{e}_1\right) + \ldots + k_{n+1}\varphi'\left(\vec{e}_{n+1}\right) = k\varphi'\left(\vec{e}_1 + \ldots + \vec{e}_{n+1}\right),$$

hay $\varphi'\left(k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \ldots + k_{n+1}\vec{e}_{n+1}\right) = \varphi'\left(k\vec{e}_1 + \ldots + k\vec{e}_{n+1}\right)$. Vì φ' đơn ánh nên $k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \ldots + k_{n+1}\vec{e}_{n+1} = k\vec{e}_1 + \ldots + k\vec{e}_{n+1}$. Do đó $k_1 = k_2 = \ldots = k_{n+1} = k$. Từ đó $\varphi(\vec{x}) = k\varphi'(\vec{x}), \forall\vec{x}$, hay $\varphi = k\varphi'$.

Điều ngược lại là hiển nhiên.

Các tính chất v) và vi) xem như bài tập. □

Định lý 3.2.1.4 (Về sự xác định ánh xạ xạ ảnh)**.** *Cho hai không gian xạ ảnh là* $\mathbf{P}$ *và* $\mathbf{P}'$ *lần lượt có số chiều là* n *và* m $(n \leq m)$. *Trong* $\mathbf{P}$ *cho mục tiêu xạ ảnh* $\{S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}; E\}$ *và trong* $\mathbf{P}'$ *cho* $n+2$ *điểm phụ thuộc* $S'_1, S'_2, \ldots, S'_{n+1}; E'$ *sao cho bất kỳ* $n+1$ *điểm trong chúng đều độc lập. Khi đó, có một và chỉ một ánh xạ xạ ảnh* $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ *sao cho* $f\left(S_i\right) = S'_i, i = 1, 2, \ldots, n+1$ *và* $f(E) = E'$.

Chứng minh. Gọi $\mathbf{V}^{n+1}$ và $\mathbf{V}^{m+1}$ lần lượt là các không gian vectơ liên kết của $\mathbf{P}$ và $\mathbf{P}'$. Trong $\mathbf{V}^{n+1}$ lấy cơ sở $\varepsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ đại diện của mục tiêu $\{S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}; E\}$.

Trong $\mathbf{V}^{m+1}$ lấy $n+1$ vectơ độc lập tuyến tính $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_{n+1}$ sao cho $\vec{e'}_i$ đại diện cho S'_i và $\sum_{i=1}^{n+1} \vec{e}_i$ đại diện cho điểm E' (như việc chỉ ra cơ sở đại diện của một mục tiêu). Khi đó có duy nhất đơn cấu tuyến tính: $\varphi : \mathbf{V}^{n+1} \to \mathbf{V}^{m+1}$ sao cho $\varphi(\vec{e}_i) = \vec{e'}_i$ với $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Rõ ràng φ là ánh xạ đại diện cho một ánh xạ xạ ảnh $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ và f là ánh xạ xạ ảnh duy nhất thỏa mãn yêu cầu của định lý. $\square$

3.2.2 *Phép chiếu xuyên tâm*

Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ xét hai siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ và $\mathbf{P}'^{n-1}$. O là một điểm không nằm trên hai siêu phẳng đó. Xét ánh xạ

$$f : \mathbf{P}^{n-1} \to \mathbf{P}'^{n-1}$$

xác định như sau: với $M \in \mathbf{P}^{n-1}$, đường thẳng OM cắt $\mathbf{P}'^{n-1}$ tại một điểm duy nhất M'. Đặt $f(M) = M'$. Ánh xạ f xác định trên đây được gọi là phép chiếu xuyên tâm từ siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ lên siêu phẳng $\mathbf{P}'^{n-1}$ với tâm chiếu O.

Định lý 3.2.2.1. *Phép chiếu xuyên tâm là một ánh xạ xạ ảnh và mọi điểm của phẳng $\mathbf{P}^{n-2} = \mathbf{P}^{n-1} \cap \mathbf{P}'^{n-1}$ là điểm bất động.*

Đặc biệt, trong $\mathbf{P}^2$ phép chiếu xuyên tâm từ một đường thẳng lên một đường thẳng khác là một ánh xạ xạ ảnh và giao điểm của hai đường thẳng là điểm bất động.

Chứng minh. Gọi $\mathbf{V}^n, \mathbf{V}'^n$ là các không gian con lần lượt liên kết với $\mathbf{P}^{n-1}$ và $\mathbf{P}'^{n-1}$. Trong siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ ta lấy n điểm độc lập $A_1, A_2, \ldots, A_n$, trong đó $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ thuộc $\mathbf{P}^{n-2}$. Gọi f là phép chiếu xuyên tâm với tâm chiếu O. Ta có $f(A_i) = A_i$ với $i = 1, 2, \ldots, n-1$ và $f(A_n) = A'_n$ ($A'_n \notin \mathbf{P}^{n-1}$). Hệ điểm $A_1, A_2, \ldots, A'_n$ là hệ điểm độc lập (vì nếu trái lại, $A'_n \in \mathbf{P}^{n-1}$).

Gọi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, \vec{e'}_n, \vec{e}$ là các vectơ lần lượt đại diện cho các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n, A'_n, O$. Vì A_n, A'_n, O thẳng hàng và đôi một phân biệt nên có thể biểu thị

$$\vec{e'}_n = \vec{e}_n + \lambda\vec{e}, \lambda \neq 0.$$

Gọi φ là đẳng cấu tuyến tính từ $\mathbf{V}^n$ lên $\mathbf{V}'^n$ biến các vectơ của cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ tương ứng thành các vectơ của cơ sở $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e'}_n\right\}$. Khi đó, nếu điểm $X \in \mathbf{P}^{n-1}$ với vectơ đại diện là $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2 + \ldots x_n\vec{e}_n$ thì $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} + x_n\lambda\vec{e}$. Đẳng thức này chứng tỏ $\varphi(\vec{x})$ đại diện cho một điểm của đường thẳng OX. Mặt khác $\varphi(\vec{x})$ đại diện cho điểm thuộc $\mathbf{P}'^{n-1}$ nên $\varphi(\vec{x})$ là đại diện cho điểm $X' = OX \cap \mathbf{P}'^{n-1}$. Do đó đẳng cấu tuyến tính φ là đại diện của phép chiếu xuyên tâm f, tức phép chiếu xuyên tâm là một ánh xạ xạ ảnh. □

Định lý 3.2.2.2. *Cho $f : \mathbf{P}^{n-1} \to \mathbf{P}'^{n-1}$ là ánh xạ xạ ảnh giữa các siêu phẳng trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n (n \geq 2)$ sao cho mọi điểm của $\mathbf{P}^{n-2} = \mathbf{P}^{n-1} \cap \mathbf{P'}^{n-1}$ là điểm bất động. Thế thì f là một phép chiếu xuyên tâm.*

Chứng minh. Gọi $f : \mathbf{P}^{n-1} \to \mathbf{P}'^{n-1}$ là ánh xạ xạ ảnh có tính chất $f(M) = M$ với mọi $M \in \mathbf{P}^{n-2} = \mathbf{P}^{n-1} \cap \mathbf{P}'^{n-1}$ ta chứng minh f là phép chiếu xuyên tâm. Trong $\mathbf{P}^{n-1}$ chọn mục tiêu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n; E\}$ sao cho $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \in \mathbf{P}^{n-2}$. Gọi $A'_n = f(A_n), E' = f(E)$. Khi đó $\{A_1, A_2, \ldots, A'_n; E'\}$ là mục tiêu của $\mathbf{P}'^{m-1}$. Gọi $M = A_nE \cap \mathbf{P}^{n-2}$. Vì $M = f(M)$ nên $M \in A'_nE'$. Trong mặt phẳng xạ ảnh xác định bởi hai đường thẳng A_nE và A'_nE', hai đường thẳng này cắt nhau tại một điểm O. Phép chiếu xuyên tâm với tâm chiếu O từ $\mathbf{P}^{n-1}$ tới $\mathbf{P}'^{n-1}$ biến mục tiêu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n; E\}$ thành mục tiêu $\{A_1, A_2, \ldots, A'_n; E'\}$. Từ sự xác định duy nhất của ánh xa xa ảnh suy ra phép chiếu xuyên tâm này trùng với f, nghĩa là f là một phép chiếu xuyên tâm. □

3.2.3 *Biến đổi xạ ảnh, hình học xạ ảnh*

a) Biến đổi xạ ảnh

Định nghĩa 3.2.3.1. Ánh xạ xạ ảnh $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ là song ánh được gọi là đẳng cấu xạ ảnh, và khi đó hai không gian $\mathbf{P}$ và $\mathbf{P}'$ được gọi là đẳng cấu.

Ánh xạ xạ ảnh $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ được gọi là phép biến đổi xạ ảnh (hay phép xạ ảnh) của $\mathbf{P}$.

Nhận xét 3.2.3.2. i) Vì ánh xạ xạ ảnh là đơn ánh, do đó ánh xạ xạ ảnh $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ là đẳng cấu khi và chỉ khi $\mathbf{P}$ và $\mathbf{P}'$ có cùng số chiều.

ii) Ánh xạ tuyến tính đại diện cho đẳng cấu xạ ảnh là đẳng cấu tuyến tính.

iii) Từ định lý về sự xác định ánh xạ xạ ảnh ta suy ra: nếu trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ cho hai mục tiêu $\{S_i; E\}$ và $\{S'_i; E'\}$ thì có phép biến đổi xạ ảnh duy nhất f của $\mathbf{P}^n$, biến các điểm S_i thành các điểm S'_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ và biến điểm E thành điểm E'.

b) Biểu thức tọa độ của phép biến đổi xạ ảnh

Cho phép biến đổi xạ ảnh $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$. Trong $\mathbf{P}^n$ chọn mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$. Với mỗi điểm X bất kì, gọi $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ là tọa độ của X và $\left(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}\right)$ là tọa độ của $X' = f(X)$ đối với mục tiêu đã chọn. Ta tìm mối liên hệ giữa (x_i) và (x'_i).

Gọi $\varepsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ là cơ sở trong $\mathbf{P}^n$ đại diện cho mục tiêu $\{S_i; E\}$ và $\varphi : \mathbf{V}^{n+1} \to \mathbf{V}^{n+1}$ là biến đổi tuyến tính của $\mathbf{V}^{n+1}$, đại diện cho biến đổi xạ ảnh f. Đối với cơ sở ε, xét vectơ $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ đại diện cho điểm X. Thế thì $\varphi(\vec{x})$, là đại diện của X', có tọa độ $\varphi(\vec{x}) = k\left(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}\right), k \neq 0$. Từ biểu thức tọa độ của biến đổi tuyến tính φ đối với cơ sở ε, ta có

$$kx'_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j, i = 1, 2, \ldots, n+1$$

hay

$$k\left[x'\right] = A[x],$$

trong đó $[x]$ và $[x']$ là ma trận cột tọa độ của X và X', $A = (a_{ij})$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ sang cơ sở ảnh của nó qua ánh xạ φ.

Hệ thức trên được gọi là biểu thức tọa độ (hay phương trình của f) đối với mục tiêu đã cho. Ma trận $A = (a_{ij})$ được gọi là ma trận của phép biến đổi xạ ảnh f đối với mục tiêu $\{S_i; E\}$.

Ngược lại, một phương trình có dạng $k[x'] = A[x]$, trong đó A là ma trận không suy biến, là phương trình của một phép biến đổi xạ ảnh trong không gian xạ ảnh đối với một mục tiêu nào đó.

Nhận xét 3.2.3.3. Nếu chọn mục tiêu xạ ảnh trên đường thẳng xạ ảnh, phương trình của biến đổi xạ ảnh trên đường thẳng có dạng:

$$\begin{cases} kx_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ kx_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}, \text{ trong đó : } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Nếu dùng tọa độ không thuần nhất trên đường thẳng, tức đặt $X = \dfrac{x_1}{x_2}, X' = \dfrac{x_1'}{x_2'}$, thì phương trình trên trở thành :

$$X' = \frac{a_{11}X + a_{12}}{a_{21}X + a_{22}}.$$

Ví dụ 3.2.3.4. Đối với một mục tiêu $\{S_i; E\}$ của mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$, cho các điểm $E_1 = (0, 1, 1), E_2 = (1, 0, 1), E_3 = (1, 1, 0)$.

a) Chứng tỏ rằng có phép biến đổi xạ ảnh $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ lần lượt biến các điểm S_1, S_2, S_3, E thành các điểm E_1, E_2, E_3, S_1.

b) Tìm biểu thức tọa độ của f đối với mục tiêu đã cho.

Giải. a) Chỉ cần chứng tỏ bất kỳ hệ 3 điểm nào trong bốn điểm E_1, E_2, E_3, S_1 đều độc lập. Điều này do các định thức dưới đây khác 0:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

b) Ánh xạ đại diện của f biến cơ sở đại diện của mục tiêu $\{S_1, S_2, S_3; E\}$ thành cơ sở đại diện của mục tiêu $\{E_1, E_2, E_3; S_1\}$. Gọi ma trận chuyển từ mục tiêu thứ nhất sang mục tiêu thứ hai là A (cũng là ma trận chuyển giữa hai cơ sở đại diện tương ứng của chúng). Thế thì ma trận của f đối với mục tiêu đã cho là A. Giả sử $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3$ là cơ sở đại diện cho mục tiêu thứ hai. Tọa độ $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e}_3$ đối với cơ sở $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ đại diện cho mục tiêu ban đầu là $k_1(0,1,1), k_2(1,0,1), k_3(1,1,0)$, thỏa mãn $k_1(0,1,1) + k_2(1,0,1) + k_3(1,1,0) = (1,0,0)$. Giải ra ta có $k_1 = -1,, k_2 = k_3 = 1$. Ta có ma trận chuyển mục tiêu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do đó biểu thức tọa độ của f đối với mục tiêu đã cho là

$$\begin{cases} kx'_1 = x_2 + x_3 \\ kx'_2 = -x_1 + x_3 \\ kx'_3 = -x_1 + x_2 \end{cases}.$$

c) Liên hệ giữa biến đổi xạ ảnh và biến đổi afin

Giả sử $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ là một phép biến đổi xạ ảnh biến siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ thành chính nó. Xét không gian afin $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash \mathbf{P}^{n-1}$. Ta tìm hiểu về tính chất của ánh xạ

$$f|_{\mathbf{A}^n} : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n.$$

Chọn mục tiêu xạ ảnh trong $\mathbf{P}^n$ sao cho $\mathbf{P}^{n-1}$ có phương trình $x_{n+1} = 0$. Như vậy $\mathbf{A}^n$ bao gồm các điểm của $\mathbf{P}^n$ mà $x_{n+1} \neq 0$. Phép biến đổi xạ ảnh f biến $\mathbf{P}^{n-1}$ thành chính nó có phương trình

$$\begin{cases} kx'_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{1n+1}x_{n+1} \\ \ldots \\ kx'_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_1 + a_{nn+1}x_{n+1} \\ kx'_{n+1} = a_{n+1n+1}x_{n+1} \end{cases}.$$

Để ý rằng những điểm thuộc $\mathbf{A}^n$ và ảnh của chúng có $x_{n+1} \neq 0$ và $x'_{n+1} \neq 0$, do đó khi chia vế với vế n phương trình đầu cho phương trình sau cùng của hệ trên, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{x'_1}{x'_{n+1}} = \dfrac{a_{11}}{a_{n+1n+1}}\dfrac{x_1}{x_{n+1}} + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{n+1n+1}}\dfrac{x_n}{x_{n+1}} + \dfrac{a_{1n+1}}{a_{n+1n+1}} \\ \ldots \\ \dfrac{x'_n}{x'_{n+1}} = \dfrac{a_{1n}}{a_{n+1n+1}}\dfrac{x_1}{x_{n+1}} + \ldots + \dfrac{a_{nn}}{a_{n+1n+1}}\dfrac{x_n}{x_{n+1}} + \dfrac{a_{nn+1}}{a_{n+1n+1}} \end{cases},$$

tức

$$\begin{cases} X'_1 = b_{11}X_1 + \ldots + b_{1n}X_n + c_1 \\ \ldots \\ X'_n = b_{n1}X_1 + \ldots + b_{nn}X_n + c_n \end{cases},$$

trong đó $X_i = \dfrac{x_i}{x_{n+1}}$ và $X'_i = \dfrac{x'_i}{x'_{n+1}}, i = 1, 2, \ldots, n$ là tọa độ không thuần nhất của các điểm trong $\mathbf{A}^n$ và của điểm ảnh tương ứng, đó cũng chính là tọa độ afin của các điểm trong không gian afin $A^n; b_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{n+1n+1}}; c_i = \dfrac{a_{in+1}}{a_{n+1n+1}}$. Vì ma trận $B = [b_{ij}]$ không suy biến nên đây chính là phương trình của một phép biến đổi afin của $\mathbf{A}^n$. Như vậy

$$f|_{\mathbf{A}^n} : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$$

là một phép afin.

Ngược lại, mỗi phép biến đổi afin trên $\mathbf{A}^n$ đều được cảm sinh từ một phép biến đổi xạ ảnh trên $\mathbf{P}^n$ biến siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ (siêu phẳng vô tận) thành chính nó.

d) Định lý cơ bản của ánh xạ xạ ảnh

Định lý 3.2.3.5. *Cho $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ $(n > 1)$ là một song ánh bảo toàn sự thẳng hàng của ba điểm bất kỳ. Thế thì f là ánh xạ xạ ảnh.*

Chứng minh. Lấy một siêu phẳng $\mathbf{W}$ nào đó của $\mathbf{P}^n$ và gọi $\mathbf{W}' = f(\mathbf{W})$. Theo Bổ đề 3.2.3.7, $\mathbf{W}'$ cũng là siêu phẳng. Gọi $g : \mathbf{P}'^n \to \mathbf{P}^n$ là ánh xạ xạ ảnh sao cho $g(\mathbf{W}') = \mathbf{W}$. Khi đó $h = g \circ f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ là song ánh bảo toàn sự thẳng hàng của ba điểm bất kỳ và $h(\mathbf{W}) = \mathbf{W}$.

Xét không gian afin $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash \mathbf{W}$ và song ánh $h' : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ là hạn chế của h trên $\mathbf{A}^n$. Vì song ánh h' bảo toàn sự thẳng hàng của ba điểm tùy ý nên theo định lý cơ bản của biến đổi afin, ta suy ra h' là biến đổi afin. Vì phép biến đổi afin h' được sinh ra bởi phép biến đổi xạ ảnh duy nhất, ta dễ thấy rằng phép biến đổi xạ ảnh đó trùng với h. Từ đó suy ra $f = g^{-1} \circ h$ cũng là ánh xạ xạ ảnh. □

Dưới đây là một kết quả yếu hơn về đặc trưng của biến đổi xạ ảnh trên không gian xạ ảnh trên trường $\mathbf{K}$ tùy ý.

Định lý 3.2.3.6. *Cho $\mathbf{P}^n$ là không gian xạ ảnh trên trường $\mathbf{K}$, nếu $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ là một song ánh bảo toàn sự thẳng hàng của ba điểm và bảo toàn tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng thì f là phép biến đổi xạ ảnh.*

Để chứng minh định lý trên ta có bổ đề sau

Bổ đề 3.2.3.7. *Cho $\mathbf{P}^n$ là không gian xạ ảnh trên trường $\mathbf{K}$, nếu $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ là một song ánh bảo toàn sự thẳng hàng của ba điểm bất kỳ thì f biến $m-$phẳng thành $m-$phẳng.*

Chứng minh. Giả sử $\mathbf{U}$ là $m-$phẳng đi qua $m+1$ điểm độc lập $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$. Gọi $A'_i = f(A_i), i = 1, \ldots, m+1$. Gọi $\mathbf{U}'$ là phẳng bé nhất đi qua các điểm A'_i. Trước hết ta chứng minh rằng nếu M thuộc $\mathbf{U}$ thì $M' = f(M)$ thuộc $\mathbf{U}'$. Rõ ràng điều này đúng khi $m = 1$ và $m = 2$. Giả sử điều đó đúng với $m = k$, ta chứng minh đúng với $m = k+1$.

Nếu M thuộc $\mathbf{U}$ không trùng với A_{k+1} thì

$$A_{k+1}M \cap < A_1, A_2, \ldots, A_k >= I.$$

Khi đó, nếu $I' = f(I)$ thì:

+ Theo giả thiết của f, ba điểm A'_{k+1}, M', I' thẳng hàng, tức M' thuộc $A'_{k+1}I'$.

+ Theo giả thiết qui nạp, I' thuộc cái phẳng bé nhất đi qua $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$. Từ đó suy ra M' thuộc $\mathbf{U}'$.

Bây giờ ta chứng minh hệ điểm $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{m+1}$ nói trên cũng độc lập. Thật vậy, ta lấy thêm các điểm $A_{m+2}, \ldots, A_{n+1}$ để được $n+1$ điểm độc lập $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Gọi $A'_i = f(A_i)$. Nếu hệ $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{m+1}$ không độc lập thì hệ $n+1$ điểm $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n+1}$ cũng không độc lập, nên theo điều vừa chứng minh trên, $f(\mathbf{P}^n) \neq \mathbf{P}^n$, trái với giả thiết f là toàn ánh. Như vậy $\mathbf{U}'$ cũng là m-phẳng và $f(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}'$. Nếu lấy điểm M' thuộc $\mathbf{U}'$ thì do f là toàn ánh nên có M để $f(M) = M'$. Điểm M thuộc $\mathbf{U}$ vì nếu không ta có hệ $m+2$ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}, M$ độc lập nhưng ảnh của chúng không độc lập.

Tóm lại, f biến m-phẳng $\mathbf{U}$ thành m-phẳng $\mathbf{U}'$. □

Chứng minh Định lý 3.2.3.6. Lấy mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ trong $\mathbf{P}^n$ và gọi $S'_i = f(S_i), E' = f(E)$, theo bổ đề trên, $\{S'_i; E'\}$ cũng là mục tiêu xạ ảnh. Gọi g là phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$, biến mục tiêu $\{S_i; E\}$ thành mục tiêu $\{S'_i; E'\}$ và $h = g^{-1} \cdot f$. Khi đó, h là song ánh của $\mathbf{P}^n$ lên chính nó bảo toàn tính thẳng hàng của ba điểm, bảo toàn tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng và giữ bất động các điểm của mục tiêu $\{S_i; E\}$. Ta chứng minh h là phép đồng nhất. Sau đây ta chứng minh điều đó bằng qui nạp theo n.

Nếu $n = 1$ thì nếu $M' = h(M)$ ta có

$$(S_1, S_2, E, M) = (S_1, S_2, E, M'),$$

cho nên $M = M'$. Giả sử điều đó đúng với $n-1$, ta chứng minh nó đúng với n. Gọi W_i là siêu phẳng đi qua mọi đỉnh của mục tiêu trừ đỉnh S_i và E_i là giao điểm của W_i với đường thẳng S_iE, vì $h(W_i) = W_i$ và $h(S_iE) = S_iE$ nên $h(E_i) = E_i$. Từ đó theo giả thiết qui nạp ta có $h_{|W_i} = id_{W_i}$. Bây giờ giả sử M là một điểm bất kỳ không nằm trên các siêu phẳng W_i. Đường thẳng S_1M cắt W_1 tại điểm bất động đối với h nên đó là đường thẳng bất động.

Tương tự, đường thẳng S_2M cũng bất động. Vậy M bất động, hay h là phép đồng nhất. □

e) Hình học xạ ảnh

Tập hợp các biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ lập thành một nhóm, được gọi là nhóm xạ ảnh của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ (nhóm xạ ảnh n chiều). Từ sự liên hệ giữa phép afin và phép xạ ảnh trong 3.2.2 suy ra nhóm afin n chiều là nhóm con của nhóm xạ ảnh n chiều.

Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ hình $\mathbf{H}$ được gọi là tương đương xạ ảnh với hình $\mathbf{H}'$ nếu có một phép biến đổi xạ ảnh f biến $\mathbf{H}$ thành $\mathbf{H}'$. Quan hệ tương đương xạ ảnh của các hình trong $\mathbf{P}^n$ là một quan hệ tương đương.

Một tính chất trên hình $\mathbf{H}$ được gọi là tính chất xạ ảnh (hay bất biến xạ ảnh) nếu mọi hình $\mathbf{H}'$ tương đương xạ ảnh với hình $\mathbf{H}$ đều có tính chất đó. Như vậy, hai hình tương đương xạ ảnh đều có các tính chất xạ ảnh giống nhau.

Khái niệm được xây dựng từ các bất biến xạ ảnh được gọi là khái niệm xạ ảnh.

Ví dụ 3.2.3.8. Điểm; $m-$phẳng; hệ điểm độc lập, phụ thuộc; tỉ số kép;... là các khái niệm xạ ảnh.

Tập hợp các tính chất xạ ảnh trên các hình của $\mathbf{P}^n$ được gọi là hình học xạ ảnh trên $\mathbf{P}^n$ (hình học xạ ảnh n chiều). Như vậy, hình học xạ ảnh bao gồm: điểm, đường thẳng, $m-$phẳng, tính độc lập, tính phụ thuộc của các điểm, tỉ số kép của 4 điểm thẳng hàng, tỉ số kép của chùm 4 siêu phẳng,...

f) Phép thấu xạ

Trong mục này chúng ta xét một loại các phép xạ ảnh đặc biệt sau.

f1) **Phép thấu xạ cặp**

Phép xạ ảnh $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ được gọi là phép thấu xạ $r-$cặp (nói gọn là phép thấu xạ cặp) nếu có $r-$phẳng $\mathbf{U}$ và $(n-r-1)-$phẳng $\mathbf{V}$ không giao nhau sao cho mọi điểm của $\mathbf{U}$ và $\mathbf{V}$ là các điểm kép. Khi đó f còn được gọi là thấu xạ $r-$cặp với cơ sở là cặp $(\mathbf{U}, V)$. Khi

$r = 0$ thì $\mathbf{U}$ là điểm, còn được gọi là tâm của phép thấu xạ và $\mathbf{V}$ là siêu phẳng, còn được gọi là nền của phép thấu xạ.

Dĩ nhiên thấu xạ $r-$cặp với cơ sở $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ thì cũng là thấu xạ $(n-r-1)-$cặp với cơ sở $(\mathbf{V}, \mathbf{U})$. Nếu chọn mục tiêu $\{A_1, \ldots, A_{n+1}; E\}$ sao cho $A_1, \ldots, A_{r+1} \in \mathbf{U}, A_{r+2}, \ldots, A_{n+1} \in \mathbf{V}$ thì ma trận của f có dạng

$$\begin{pmatrix} p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & q & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & q & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & q \end{pmatrix},$$

đó là ma trận chéo, có $r+1$ số p và $n-r$ số q trên đường chéo. Khi $p = q$ phép thấu xạ f là ánh xạ đồng nhất.

Định lý 3.2.3.9. *Nếu phép thấu xạ cặp (U, V) khác phép đồng nhất thì mỗi điểm $M \notin U \cup V$ có ảnh $M' \neq M$ và đường thẳng MM' cắt U, V tại hai điểm X, Y thỏa mãn $(MM'XY) = k$ không phụ thuộc vào vị trí M. Số k được gọi là tỉ số thấu xạ.*

Chứng minh. Giả sử f là phép thấu xạ $r-$cặp (U, V). Chọn mục tiêu để ma trận của phép thấu xạ có dạng trên. Giả sử điểm $M = (x_1, \ldots, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{n+1})$. Nếu M không nằm trên U và V thì trong các số $x_1, \ldots, x_{r+1}$ phải có ít nhất một số khác 0 và trong các số $x_{r+2}, \ldots, x_{n+1}$ phải có ít nhất một số khác 0. Ta có $M' = (px_1, \ldots, px_{r+1}, qx_{r+2}, \ldots, qx_{n+1})$. Điểm X nằm trên MM' nên ta có tọa độ của $X : [X] = k[M] + l\,[M']$. Mặt khác X nằm trên U nên tọa độ của nó phải thỏa mãn phương trình của U, do đó $kx_j + lqx_j = 0, j = r+2, \ldots, n+1$. Vì có ít nhất một $x_j \neq 0$ nên $k + lq = 0$. Ta lấy $k = 1$ và $l = -q, [X] = -q[M] + [M']$. Tương tự, đường thẳng MM' cắt V tại điểm Y mà

$$[Y] = -p[M] + [M']\,.$$

Từ đó suy ra

$$(MM'XY) = -p : -q = p : q$$

và do đó không phụ thuộc vào M. $\square$

f2) **Phép thấu xạ đơn**

Phép xạ ảnh $f : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ có một siêu phẳng gồm toàn điểm kép được gọi là phép thấu xạ đơn, siêu phẳng được gọi là cơ sở của phép thấu xạ đơn. Phép thấu xạ đơn có điểm kép không thuộc cơ sở chính là thấu xạ $(n-1)-$cặp.

Định lý 3.2.3.10. *Mọi phép thấu xạ đơn khác đồng nhất đều có duy nhất một điểm bất động O sao cho mọi đường thẳng qua O đều bất động. Điểm O được gọi là tâm*

Chứng minh. Gọi V là cơ sở của thấu xạ đơn f. Xét mục tiêu $\{A_1, \ldots, A_{n+1}; E\}$ trong đó $A_2, \ldots, A_{n+1} \in V$. Điểm $E_0 = (0, 1, \ldots, 1)$ cũng bất động nên ma trận của f đối với mục tiêu có dạng

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & a & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1} & 0 & \ldots & a \end{pmatrix}.$$

Để ý rằng các số $a_1 - a, a_2, \ldots, a_{n+1}$ không đồng thời bằng 0, vì trái lại f là phép đồng nhất. Xét điểm $O = (a_1 - a, a_2, \ldots, a_{n+1})$. Dễ thấy rằng O là điểm bất động. Lấy một đường thẳng d bất kỳ qua O, ta chứng minh d là đường thẳng bất động. Giả sử $X = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in d$. Ảnh X' của điểm X có tọa độ

$$X' = (a_1x_1, a_2x_1 + ax_2, \ldots, a_{n+1}x_1 + ax_{n+1}),$$

suy ra $X' = aX + x_1O \in d$. Do đó $f(d) = d$. Điểm O với tính chất trên là duy nhất vì trái lại f sẽ là phép đồng nhất. $\square$

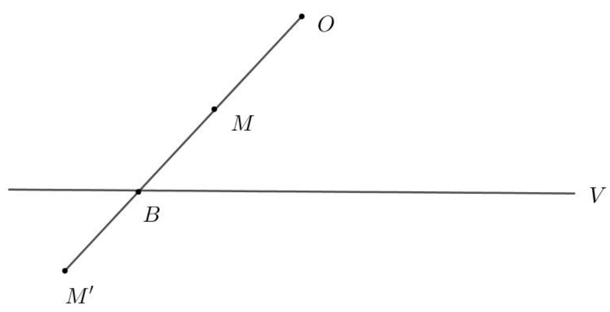
- Nếu điểm bất động O nói trong định lý trên không thuộc siêu phẳng cơ sở thì phép thấu xạ đơn cũng là phép thấu xạ $0-$cặp.

- Nếu O thuộc cơ sở thì phép thấu xạ đơn f không là thấu xạ $0-$cặp, trong trường hợp này còn gọi f là thấu xạ đơn đặc biệt.

f3) **Các phép thấu xạ trong $\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3$**

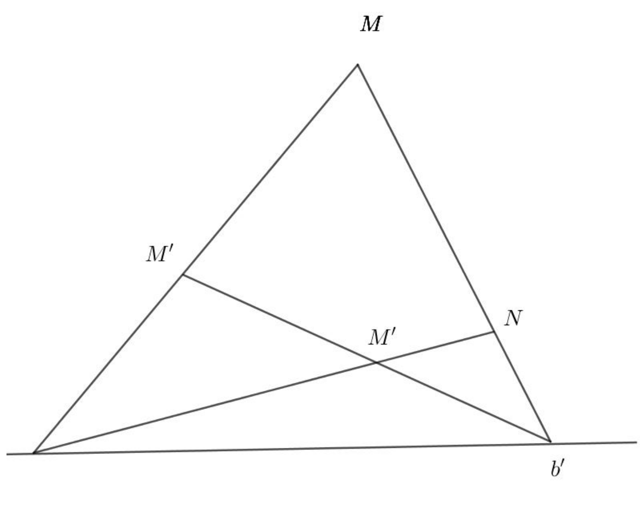
Các phép thấu xạ trong $\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3$ được mô tả trực quan dưới đây.

- Phép thấu xạ $0-$cặp (O, V) trong $\mathbf{P}^2$ (Hình 3.11).



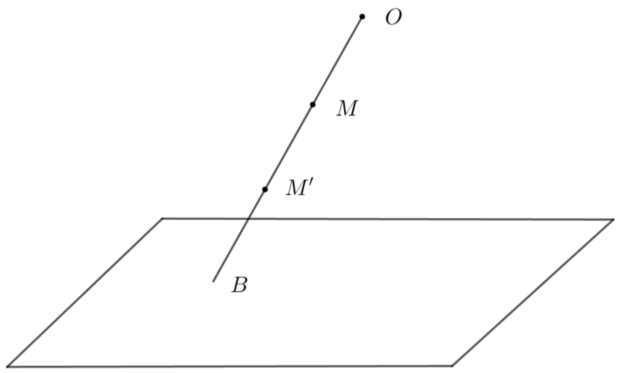
Hình 3.11

- Phép thấu xạ đơn đặc biệt trong $\mathbf{P}^2$ (Hình 3.12)



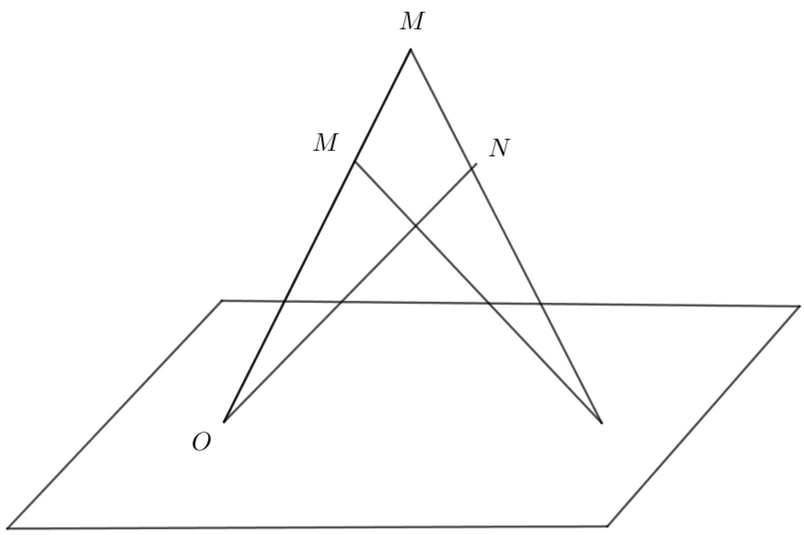
Hình 3.12

- Phép thấu xạ $0-$cặp trong $\mathbf{P}^3$ (Hình 3.13).



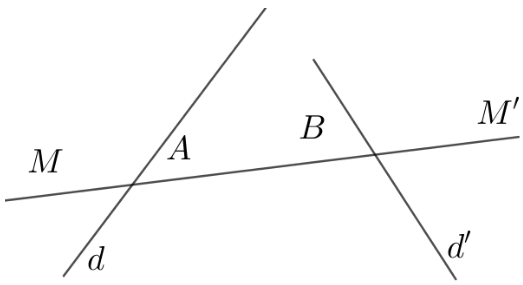
Hình 3.13

- Phép thấu xạ đơn đặc biệt trong $\mathbf{P}^3$ (Hình 3.14).



Hình 3.14

- Phép thấu xạ $1-$cặp (d, d') trong $\mathbf{P}^3$ (Hình 3.15).



Hình 3.15

f4) **Liên hệ với các phép afin trên $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash \mathbf{P}^{n-1}$**

- Giả sử f là phép thấu xạ $0-$cặp khác phép đồng nhất có cơ sở là $(O, \mathbf{V})$, trong đó O là một điểm của không gian và $\mathbf{V}$ là một siêu phẳng và giả sử tỉ số thấu xạ là k.

+ Nếu chọn V làm siêu phẳng vô tận và xét không gian afin $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash V$. M là một điểm của $\mathbf{A}^n$ khác O. Khi đó ta có $(MM'O) = k$, tức $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM'}$, hay $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM}$. Do đó $f_{|\mathbf{A}^n}$ là phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{1}{k}$.

+ Nếu chọn một siêu phẳng W đi qua O làm siêu phẳng vô tận, thì W bất biến qua f. Nếu M là điểm không thuộc V và có ảnh M' thì trong không gian afin $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash W$ đường thẳng MM' có phương không đổi (xác định bởi điểm vô tận O). Gọi B là giao điểm của MM' với V ta có $(M'MB) = (M'MBO) = (MM'OB) = k$. Do đó $f_{|\mathbf{A}^n}$ là phép thấu xạ afin tỉ số k với nền là $V \backslash W$.

- Giả sử f là phép thấu xạ đơn đặc biệt có cơ sở là siêu phẳng V và tâm thấu xạ là điểm O nằm trên V. Nếu lấy hai cặp điểm tương ứng M, M' và N, N' thì hai đường thẳng MM' và NN' đi qua O và hai đường thẳng $MN, M'N'$ cắt nhau tại một điểm I nằm trên V. Bởi vậy nếu lấy V làm siêu phẳng vô tận thì trong $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash V$ ta có $MN // M'N'$ và $MM' // NN'$, tức $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$. Do đó $f_{|\mathbf{A}^n}$ là một phép tịnh tiến.

3.3 Siêu mặt bậc hai

3.3.1 *Siêu mặt bậc hai và phân loại xạ ảnh của chúng*

a) Định nghĩa siêu mặt bậc hai

Định nghĩa 3.3.1.1. Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ với một mục tiêu xạ ảnh đã chọn, tập hợp tất cả những điểm X mà tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ của chúng thỏa mãn một phương trình bậc hai có dạng:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0, \tag{3.5}$$

với các hệ số $a_{ij} = a_{ji}$ và các $a_{ij} \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0 được gọi là một siêu mặt bậc hai của $\mathbf{P}^n$. Khi đó (3.5) được gọi là phương trình của siêu mặt bậc hai đối với mục tiêu đã chọn. Nếu ký hiệu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+11} & a_{n+12} & \ldots & a_{n+1n+1} \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

thì phương trình trên có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$[x]^T A [x] = 0.$$

trong đó $[x]$ là ma trận cột tọa độ của điểm X.

Ma trận A được gọi là ma trận của siêu mặt bậc hai đã cho. Ta có $A = A^T$ và hạng của A lớn hơn hoặc bằng 1.

Nếu $\det A \neq 0$ ta nói siêu mặt bậc hai không suy biến, nếu $\det \mathrm{A} = 0$ ta nói siêu mặt bậc hai suy biến.

Siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{P}^2$ còn gọi là đường bậc hai và siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{P}^3$ còn gọi là mặt bậc hai.

Ví dụ 3.3.1.2. Trong $\mathbf{P}^2$ cho siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}$ có phương trình

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1x_3 - x_3^2 = 0.$$

Ta có $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 9 & -1 \end{bmatrix}$, $\det A \neq 0$, do đó S không suy biến.

Nhận xét 3.3.1.3. + Định nghĩa siêu mặt bậc hai và siêu mặt bậc hai không suy biến không phụ thuộc vào việc chọn mục tiêu tọa độ. Thật vậy, nếu dùng phép biến đổi tọa độ $[x] = B\,[x']$ trong đó B là ma trận vuông cấp $n+1$ không suy biến thì siêu mặt bậc hai (2) có phương trình đối với mục tiêu mới là:

$$(B\,[x'])^T AB\,[x'] = 0 \Leftrightarrow [x']^T B^T AB\,[x'] = 0,$$

trong đó ma trận $A' = B^T AB$ là ma trận của siêu mặt bậc hai đối với mục tiêu mới. A' không suy biến khi và chỉ khi A không suy biến.

+ Cũng từ biểu thức tọa độ, suy ra qua một phép biến đổi xạ ảnh một siêu mặt bậc hai của $\mathbf{P}^n$ có ảnh là một siêu mặt bậc hai. Nói cách khác siêu mặt bậc hai là một khái niệm xạ ảnh. Hơn nữa, khái niệm "suy biến" hay "không suy biến" của một siêu mặt bậc hai là những khái niệm xạ ảnh.

b) Giao điểm của siêu mặt bậc hai với đường thẳng

Trong $\mathbf{P}^n (n > 1)$ với mục tiêu xạ ảnh cho trước, cho siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình:

$$[x]^T A[x] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = 0$$

và đường thẳng xác định bởi hai điểm $U\,(u_i)$ và $V\,(v_i)$ phân biệt có phương trình:

$$x_i = \lambda u_i + \mu v_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Để tìm giao điểm của đường thẳng và siêu mặt bậc hai ta cần giải phương trình:

$$\textstyle\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}\left(\lambda u_i + \mu v_i\right)\left(\lambda u_j + \mu v_j\right) = 0 \tag{3.7}$$

$$\Rightarrow P\lambda^2 + 2Q\lambda\mu + R\mu^2 = 0, \tag{3.8}$$

trong đó

$$P = [u]^T A[u] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}u_i u_j,$$

$$Q = [u]^T A[v] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}u_i v_j,$$

$$R = [v]^T A[v] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}v_i v_j.$$

Mỗi cặp số (λ, μ) không đồng thời bằng 0 nghiệm phương trình (3.8) cho ta một giao điểm cần tìm. Ta xét các trường hợp:

i) Trường hợp $Q^2 - PR \neq 0$:

+ Giả sử $P \neq 0$, khi đó nếu $\mu = 0$ thì $P\lambda^2 = 0$, ta có $\lambda = 0$ không thỏa mãn điều kiện $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, bởi vậy ta xét $\mu \neq 0$. Chia hai vế của phương trình (3.8) cho μ^2 ta có:

$$P\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 2Q\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + R = 0.$$

Ta được một phương trình bậc hai đối với $\dfrac{\lambda}{\mu}$. Vì $Q^2 - PR \neq 0$ nên phương trình bậc hai đó có hai nghiệm phân biệt. Nếu hai nghiệm đó là thực thì ta được hai giao điểm thực. Nếu hai nghiệm đó là phức liên hợp ta được hai giao điểm là ảo liên hợp.

+ Nếu $P = 0$ tức là $[u]^T A[u] = 0$, khi đó điểm U thuộc siêu mặt bậc hai. Vì $Q^2 - PR \neq 0$ và $P = 0$ nên ta suy ra $Q \neq 0$ và phương trình (3.8) có dạng

$$2Q\lambda\mu + R\mu^2 = 0 \Leftrightarrow (2Q\lambda + R\mu)\mu = 0.$$

Ta có một nghiệm là $(\lambda, 0)$ và đó chính là điểm U ứng với $\mu = 0$. Để tìm nghiệm thứ hai ta giả thiết $\mu \neq 0$ và được phương trình:

$$2Q\frac{\lambda}{\mu} + R = 0.$$

Phương trình này luôn cho ta một nghiệm là giao điểm thứ hai khác với U.

Tóm lại nếu $Q^2 - PR \neq 0$ đường thẳng UV sẽ cắt siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ tại hai điểm phân biệt hoặc hai điểm ảo liên hợp.

ii) Trường hợp $Q^2 - PR = 0$. Giả sử một trong các số P, Q, R khác 0 để cho phương trình bậc hai tồn tại, khi đó phương trình tìm giao điểm (3.8) chỉ có một nghiệm duy nhất và do đó đường thẳng UV và siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có một giao điểm kép duy nhất. Ta nói rằng đường thẳng UV tiếp xúc với siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$.

iii) Trường hợp $P = Q = R = 0$. Trong trường hợp này mọi cặp (λ, μ) đều nghiệm phương trình (3.8) nên toàn bộ đường thẳng UV đều thuộc siêu mặt bậc hai. Ta nói rằng đường thẳng UV là một đường sinh của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$.

Ví dụ 3.3.1.4. Tìm giao điểm của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$:

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 = 0,$$

và đường thẳng d

$$\begin{cases} x_1 = 2t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = -t_1 + t_2 \end{cases}.$$

Giải. Thay x_i từ phương trình của d vào phương trình của $(\mathcal{S})$ ta đi đến phương trình

$$t_1^2 - 3t_1t_2 + 2t_2^2 = 0.$$

Giải phương trình trên ta được $\dfrac{t_1}{t_2} = 1$ hoặc $\dfrac{t_1}{t_2} = 2$. Lấy $t_1 = t_2 = 1$ và $t_1 = 2, t_2 = 1$ và thay vào phương trình của d, ta được tọa độ hai giao điểm của $(\mathcal{S})$ và d là $(1, 1, 0)$ và $(3, 2, -1)$.

Chú ý 3.3.1.5. Có thể chứng minh được rằng, giao của một siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ và một $m-$phẳng $\mathbf{P}^m$ là một siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{P}^m$ hoặc là toàn bộ $\mathbf{P}^m$ ($m-$phẳng chứa trong siêu mặt bậc hai). Nói riêng, khi $m = 1$ ta đã nhận được kết quả về giao của đường thẳng và siêu mặt bậc hai ở trên.

c) Phân loại xạ ảnh các siêu mặt bậc hai trong không gian xạ ảnh

Định lý 3.3.1.6. *Với mọi siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, ta luôn có thể tìm được một mục tiêu xạ ảnh, sao cho đối với mục tiêu đó phương trình $(\mathcal{S})$ có dạng:*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0 \tag{3.9}$$

trong đó $r \leq n+1$ và $k \geq \dfrac{r}{2}$.

(ta luôn có thể giả sử $k \geq \dfrac{r}{2}$ tức là số các hệ số dương lớn hơn hay bằng số các hệ số âm, bởi vì nếu xảy ra trường hợp ngược lại ta chỉ cần nhân 2 vế của phương trình 3.9 với -1).

Chứng minh. Giả sử siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình đối với mục tiêu cho trước là:

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} a_i x_j = 0.$$

Vế phải của chương trình trên là một dạng toàn phương. Ta biết rằng luôn có thể tìm được một phép đổi biến tuyến tính, không suy biến $[x'] = B[x]$ sao cho dạng toàn phương đó biến thành dạng toàn phương chuẩn tắc:

$$x_1'^2 + x'{}_2'^2 + \ldots + x_k'^2 - x_{k+1}'^2 - \ldots - x'{}_r'^2.$$

Ta xem mỗi phép đổi biến tuyến tính cũng là một phép biến đổi tọa độ xạ ảnh xác định bởi hai mục tiêu xạ ảnh. Do đó đối với mục tiêu xạ ảnh mới phương trình siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có dạng chuẩn tắc (3.9). □

Một phương trình chuẩn tắc như thế sẽ được xác định bởi cặp số (k, r) trong đó k là số các hệ số dương và r là số các hệ số khác 0. Vì k và r bất biến qua phép đổi tọa độ, mỗi siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ chỉ có một phương trình dạng chuẩn tắc hoàn toàn xác định.

Định nghĩa 3.3.1.7. Hai siêu mặt bậc hai được gọi là cùng thuộc một loại nếu chúng có phương trình chuẩn tắc giống nhau, nghĩa là cặp số (k, r) của các phương trình chuẩn tắc của hai siêu mặt bậc hai đó trùng nhau.

Định lý 3.3.1.8. *Điều kiện cần và đủ để hai siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S}_1)$ và $(\mathcal{S}_2)$ tương đương xạ ảnh với nhau là chúng thuộc cùng một loại.*

Chứng minh. Giả sử hai siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S}_1)$ và $(\mathcal{S}_2)$ tương đương xạ ảnh nghĩa là có một phép biến đổi xạ ảnh f sao cho $f(\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_2$.

Chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ sao cho đối với mục tiêu đó phương trình của $(\mathcal{S}_1)$ có dạng chuẩn tắc. Gọi $\{A'_i; E'\}$ là ảnh của mục tiêu nói trên qua phép biến đổi xạ ảnh f. Khi đó phương trình của $(\mathcal{S}_2)$ đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A'_i; E'\}$ hoàn toàn giống như phương trình của $(\mathcal{S}_1)$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$. Vậy $(\mathcal{S}_1)$ và $(\mathcal{S}_2)$ thuộc cùng một loại.

Ngược lại giả sử siêu mặt phẳng bậc hai $(\mathcal{S}_1)$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ và siêu mặt phẳng bậc hai $(\mathcal{S}_2)$ đối với mục tiêu $\{A'_i; E'\}$ có phương trình chuẩn tắc hoàn toàn giống nhau, nghĩa là thuộc cùng một loại. Gọi f là phép biến đổi xạ ảnh xác định bởi hai mục tiêu xạ ảnh nói trên biến $\{A_i; E\}$ thành $\{A'_i; E'\}$. Khi đó $(\mathcal{S}_1)$ sẽ biến thành $(\mathcal{S}'_1)$ và $(\mathcal{S}'_1)$ có phương trình đối với mục tiêu $\{A'_i; E'\}$ giống hệt phương trình của $(\mathcal{S}_1)$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$, tức là giống như phương trình của $(\mathcal{S}_2)$ đối với mục tiêu $\{A'_i; E'\}$. Vậy $(\mathcal{S}'_1)$ trùng với $(\mathcal{S}_2)$. Do đó $f(\mathcal{S}_1) = (\mathcal{S}_2)$, nghĩa là $(\mathcal{S}_1)$ và $(\mathcal{S}_2)$ tương đương xạ ảnh. □

Dựa vào phương trình chuẩn tắc của siêu mặt bậc hai ta có thể phân loại tập hợp tất cả các siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ trong $\mathbf{P}^n$ theo cặp số (k, r). Mỗi loại được đặc trưng bằng cặp số (k, r) nên ta gọi chúng là loại (k, r).

(i) Loại không suy biến:

* Loại $(n+1, n+1)$:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 0. \tag{3.10}$$

Loại này được gọi là siêu mặt trái xoan không vì nó không chứa điểm thực nào.

* Loại (n, n+1):

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0. \tag{3.11}$$

Loại này được gọi là siêu mặt trái xoan.

* Loại $(k, n+1)$ với $k \leq n-1$:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{n+1}^2 = 0. \tag{3.12}$$

Ta gọi loại này siêu mặt kẻ. Vì $\dfrac{n+1}{2} \leq k \leq n-1$ nên ta suy ra $n \geq 3$. Vậy với $n < 3$ thì không có các siêu mặt kẻ. Phương trình của siêu mặt kẻ tương đương với phương trình sau đây:

$$(x_1 - x_{k+1})(x_1 + x_{k+1}) + \ldots + (x_m - x_{n+1})(x_m + x_{n+1}) +$$
$$+ x_{m+1}^2 + \ldots + x_k^2 = 0.$$

Từ phương trình này ta có thể lập được họ $(n-k)-$phẳng, chúng được gọi là $(n-k)-$phẳng sinh của mặt kẻ đã cho. Có thể tìm thấy nhiều họ $(n-k)-$phẳng sinh khác nữa bằng cách lập các hệ k phương trình bậc nhất và mỗi hệ k phương trình đó xác định một $(n-k)-$phẳng sinh.

(ii) Loại suy biến (k, r) với $r < n+1$.

Siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có các loại:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, \tag{3.13}$$

trong đó $r < n+1$ và $\dfrac{r}{2} \leq k \leq r$.

+ Trường hợp $k < r$. Ta gọi loại này là siêu nón. Trong trường hợp này vì detA $= 0$ nên ma trận A của siêu mặt bậc hai suy biến. Khi đó phương trình $A[x] = 0$ có nghiệm không tầm thường xác định một $(n-r)-$phẳng $\mathbf{Q}$, thuộc siêu nón bậc hai vì ta có:

$$[x]^T A[x] = 0.$$

Ta gọi $\mathbf{Q}$ là $(n-r)-$phẳng cho bởi phương trình:

$$x_i = 0 \text{ với } i = 1, 2, \ldots, r.$$

Số chiều lớn nhất của $\mathbf{Q}$ là $n-1$ và số chiều bé nhất của $\mathbf{Q}$ là 0, tức $\mathbf{Q}$ là một điểm.

Ta hãy chứng minh rằng nếu M là một điểm của siêu nón nhưng không nằm trên $\mathbf{Q}$ thì đường thẳng nối M với một điểm X tùy ý của $\mathbf{Q}$ đều nằm trên siêu nón.

Thật vậy, giả sử siêu nón có phương trình:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, \tag{3.14}$$

với $\dfrac{r}{2} \leq k < r$ và $r < n+1$. Vì $M\,(m_1, m_2, \ldots, m_{n+1})$ thuộc siêu nón nên:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i^2 - \sum_{i=k+1}^{r} m_i^2 = 0. \tag{3.15}$$

$X\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ thuộc $(n-r)-$phẳng $\mathbf{Q}$ nên:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0. \tag{3.16}$$

Mọi điểm của đường thẳng MX có tọa độ $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1})$,

$$\xi_i = \lambda m_i + \mu x_i, i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

trong đó λ, μ không đồng thời bằng 0.

Ta có :

$$\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2 - \sum_{i=k+1}^{k}\xi_i^2 = \sum_{i=1}^{k}(\lambda m_i - \mu x_i)^2 - \sum_{i=k+1}^{k}(\lambda m_i - \mu x_i)^2$$
$$= \lambda^2\left[\sum_{i=1}^{k} m_i^2 - \sum_{i=k+1}^{k} m_i^2\right] + \mu^2\left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{k} x_i^2\right] +$$
$$+2\lambda\mu\left[\sum_{i=1}^{k} m_i x_i - \sum_{i=k+1}^{k} m_i x_i\right] = 0 \text{ (theo (3.15) và (3.16))}.$$

Vậy điểm $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1})$ nằm trên siêu nón và do đó đường thẳng MX cũng nằm trên siêu nón. Vì lí do đó nên người ta nói rằng siêu nón có đỉnh là $(n-r)-$phẳng $\mathbf{Q}$.

+ Trường hợp $k = r$. Siêu mặt bậc hai có phương trình: $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2 = 0$ và được gọi là siêu nón ảo.

Căn cứ vào phương trình chuẩn tắc ta cũng có sự phân loại sau các siêu mặt bậc hai trong các không gian xạ ảnh có chiều thấp dưới đây.

+ Trong $\mathbf{P}^1$ ta có 3 loại siêu mặt bậc hai:

1. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ 2 điểm ảo liên hợp.
2. $x_1^2 - x_2^2 = 0$ 2 điểm thực.
3. $x_1^2 = 0$ 2 điểm thực trùng nhau.

+ Trong $\mathbf{P}^2$ ta có 5 loại sau đây:

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ đường trái xoan không (vì không chứa điểm thực nào).

2. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ đường conic hay đường trái xoan.

3. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ cặp đường thẳng ảo liên hợp có tọa độ $[i, 1, 0]$ và $[-i, 1, 0]$.

4. $x_1^2 - x_2^2 = 0$ cặp đường thẳng thực phân biệt có tọa độ $[1, 1, 0]$ và $[-1, 1, 0]$.

5. $x_1^2 = 0$ cặp đường thẳng trùng nhau có tọa độ $[1, 0, 0]$.

+ Trong $\mathbf{P}^3$ ta có 8 loại sau đây:

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ mặt trái xoan không.
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ mặt trái xoan.
3. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ mặt kẻ bậc hai, mặt loại này chứa

hai họ đường thẳng:

$$(d): \begin{cases} \lambda(x_1 + x_3) = \mu(x_4 + x_2) \\ \mu(x_1 - x_3) = \lambda(x_4 - x_2) \end{cases}. \tag{3.17}$$

$$(d'): \begin{cases} \lambda(x_1 + x_3) = \mu(x_4 - x_2) \\ \mu(x_1 - x_3) = \lambda(x_4 + x_2) \end{cases}. \tag{3.18}$$

Với mọi cặp λ, μ không đồng thời bằng 0 hệ (3.17) và (3.18) cho ta hai đường thẳng nằm trên mặt kẻ bậc hai nói trên. Cũng có thể thấy rằng qua mỗi điểm của mặt kẻ đó ta có một đường thẳng của họ (3.17) và một đường thẳng của họ (3.18). Bởi vậy có thể xem hai họ của đường thẳng (3.17) và (3.18) nói trên sinh ra mặt bậc hai. Ta gọi đó là hai họ đường sinh thẳng của mặt kẻ bậc hai.

4. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ mặt nón ảo.
5. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ mặt nón bậc hai.
6. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ cặp mặt phẳng ảo liên hợp.
7. $x_1^2 - x_2^2 = 0$ cặp mặt phẳng thực.
8. $x_1^2 = 0$ cặp mặt phẳng thực trùng nhau.

d) Siêu mặt bậc hai trong không gian afin $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash \mathbf{P}^{n-1}$

d1) **Siêu mặt bậc hai trong không gian n chiều**

Trong $\mathbf{P}^n$ đối với mục tiêu xạ ảnh cho trước cho siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình:

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0$$

và siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ có phương trình $x_{n+1} = 0$. Xét tập hợp các điểm của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ nằm trong $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash \mathbf{P}^{n-1}$, nghĩa là tập hợp các điểm X thuộc $(\mathcal{S})$ có tọa độ thỏa mãn phương trình đã cho của $(\mathcal{S})$ với điều kiện $x_{n+1} \neq 0$. Ta có thể viết phương trình của $(\mathcal{S})$ dưới dạng sau đây bằng cách chia hai vế của phương trình cho

$x_{n+1}x_{n+1}$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}X_iX_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{in+1}X_i + a_{n+1n+1} = 0.$$

với $X_i = \dfrac{x_i}{x_{n+1}}; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Ta nhận thấy với tọa độ afin (tức tọa độ xạ ảnh không thuần nhất) phương trình của $(\mathcal{S})$ trở thành phương trình tổng quát của siêu mặt bậc hai trong không gian afin $\mathbf{A}^n$, tức $(\mathcal{S})\backslash\mathbf{P}^{n-1}$ là một siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{A}^n$. Hơn nữa, siêu mặt bậc hai afin là không suy biến khi và chỉ khi siêu mặt bậc hai xạ ảnh là không suy biến.

Ngược lại, mỗi siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{A}^n$ đều nhận được từ một siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{P}^n$ sau khi bỏ đi các điểm thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ (các điểm vô tận).

Phương trình tiệm cận của một siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ là phương $\vec{c}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ sao cho

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_ic_j = 0.$$

Do đó vectơ $\vec{c}(c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq \vec{0}$ là phương tiệm cận của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ trong $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n\backslash\mathbf{P}^{n-1}$ khi và chỉ khi $(c_1, c_2, \ldots, c_n, 0)$ là nghiệm khác $(0, 0, \ldots, 0)$ của hệ sau:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = 0 \\ x_{n+1} = 0 \end{cases}.$$

Vậy phương tiệm cận của siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{A}^n$ tương ứng với giao điểm của siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{P}^n$ với siêu phẳng vô tận $\mathbf{P}^{n-1}$ (điểm vô tận của siêu mặt bậc hai).

d2) **Đường conic trong $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2\backslash\mathbf{P}^1$**

Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ ta xét đường conic $(\mathcal{S})$ có phương trình:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

+ Xét mặt phẳng afin sinh ra bởi mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ sau khi bỏ đi đường thẳng vô tận có phương trình $x_3 = 0$. Chuyển sang tọa độ afin (X_1, X_2) bằng cách chia hai vế của phương trình conic $(\mathcal{S})$ cho x_3^2 ta có:

$$X_1^2 + X_2^2 - 1 = 0$$

với $X_i = \dfrac{x_i}{x_3}; i = 1, 2$. Ta thấy đó chính là đường elip trong $\mathbf{A}^2$ (chú ý rằng trong trường hợp này đường conic không cắt đường thẳng $x_3 = 0$ vì hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

vô nghiệm).

+ Bằng cách hoán vị các đỉnh của mục tiêu tọa độ ta đưa phương trình conic $(\mathcal{S})$ về dạng: $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$.

Khi đó đường thẳng vô tận $x_3 = 0$ cắt conic tại hai điểm $(1, 1, 0)$ và $(1, -1, 0)$. Những điểm còn lại của đường conic có phương trình đối với tọa độ afin là:

$$X_1^2 - X_2^2 + 1 = 0, \text{ với } X_i = \frac{x_i}{x_3}; \quad i = 1, 2.$$

Đây chính là phương trình của đường hypebol.

+ Bằng phép biến đổi tọa độ:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(x_2' - x_3') \\ x_3 = \dfrac{1}{2}(x_2' + x_3') \end{cases}$$

khi đó conic $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ trở thành

$$x_1'^2 + \left[\frac{1}{2}(x_2' - x_3')\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(x_2' + x_3')\right]^2 = x_1'^2 - x_2'x_3' = 0.$$

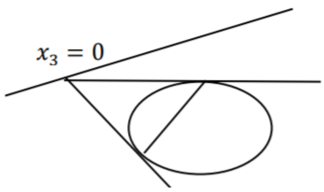
Chọn $x_3' = 0$ làm đường thẳng vô tận ta thấy đường conic khi đó tiếp xúc với đường thẳng $x_3' = 0$ tại điểm $(0, 1, 0)$. Những điểm còn lại của conic có phương trình đối với tọa độ afin là:

$$X_1^2 - X_2 = 0, \text{ với } X_i = \frac{x_i'}{x_3'}; \quad i = 1, 2.$$

Đây chính là phương trình của đường parabol.

Kết luận. Nếu conic không cắt đường thẳng vô tận (hay cắt tại hai điểm ảo liên hợp) thì nó là đường elip trong mặt phẳng afin. Hai tiếp tuyến vẽ từ một điểm trên đường thẳng vô tận tiếp xúc với elip tại hai điểm. Đường thẳng nối hai tiếp điểm này biểu thị một đường kính của elip (Hình 3.16). Nếu vẽ hai đường kính của elip ta sẽ xác định được tâm của elip.

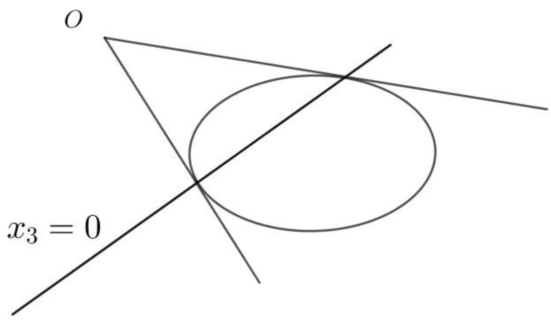
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$



Hình 3.16

Nếu conic cắt đường thẳng vô tận tại hai điểm thực ta có đường hypebol trong mặt phẳng afin. Hai tiếp tuyến của conic tại hai giao điểm là hai tiệm cận của hypebol. Giao điểm của hai đường tiệm cận chính là tâm O của hypebol (Hình 3.17).

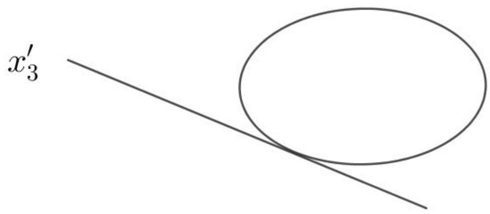
$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$



Hình 3.17

Nếu conic tiếp xúc với đường thẳng vô tận, đường conic chỉ có một điểm vô tận, ta có đường parabol trong mặt phẳng afin. Các đường thẳng song song với trục của parabol đều đồng quy tại điểm vô tận này (Hình 3.18).

$$\begin{cases} x_1'^2 - x_2'x_3' = 0 \\ x_3' = 0 \end{cases}.$$



Hình 3.18

3.3.2 *Siêu phẳng đối cực, siêu mặt lớp hai*

a) Cực điểm và siêu phẳng đối cực

Định nghĩa 3.3.2.1. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh cho trước, cho siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình:

$$[x]^T A[x] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0$$

và điểm U có tọa độ $(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$. Xét phương trình:

$$[u]^T A[x] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} u_i x_j = 0.$$

Nếu n+1 hệ số $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} u_i$ với $j = 1, 2, \ldots, n+1$ không đồng thời bằng 0, tức $[u]^T A \neq 0$ thì phương trình $\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} u_i x_j = 0$ là phương trình của một siêu phẳng $\mathbf{P}$. Khi đó siêu phẳng $\mathbf{P}$ được gọi là siêu phẳng đối cực của điểm U đối với siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$, điểm U được gọi là điểm cực hay cực điểm của siêu phẳng $\mathbf{P}$ đối với siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$.

Ví dụ 3.3.2.2. Trong $\mathbf{P}^2$ đối với mục tiêu cho trước, cho một đường bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình: $2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0$, điểm U có tọa độ $(2, -1, 5)$ và đường thẳng d có phương trình $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$.

a) Tìm siêu phẳng đối cực của điểm U đối với đường bậc hai $(\mathcal{S})$.

b) Tìm điểm V sao cho d là đường thẳng đối cực của V đối với $(\mathcal{S})$.

Giải. a) Ta có thể viết phương trình của đường bậc hai $(\mathcal{S})$ dưới dạng $[x]^T A[x] = 0$ như sau:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Do đó siêu phẳng đối cực của $U(2, -1, 5)$ có phương trình dạng $[u]^T A[x] = 0$ là:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

hay

$$7x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 0.$$

b) Giả sử tọa độ của V là (v_1, v, v_3). Khi đó đường thẳng đối cực của V có phương trình $[v]^T A[x] = 0$. Thế thì d là đường thẳng đối cực của V khi và chỉ khi

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

hay $\begin{cases} 2v_1 - 3v_2 = 1, \\ -3v_1 + v_2 + 2v_3 = 3, \\ 2v_2 - 2v_3 = -2. \end{cases}$

Giải hệ trên ta được tọa độ của điểm cực V của d là $\left(-2, -\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Chú ý 3.3.2.3. Nếu $n+1$ hệ số $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}u_i$ với $j = 1, 2, \ldots, n+1$ đều bằng 0, tức $[u]^T A = 0$, thì điểm U được gọi là điểm kỳ dị của siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$. Như vậy sẽ không có siêu phẳng đối cực của điểm kỳ dị của $(\mathcal{S})$ vì không tồn tại phương trình của siêu phẳng đó.

Định lý 3.3.2.4. *Nếu $U = (u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$ là điểm kỳ dị của $(\mathcal{S})$ thì $(\mathcal{S})$ suy biến và điểm $U \in (\mathcal{S})$.*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}u_i = 0$ với mọi $j = 1, 2, \ldots, n+1$. Vì các u_i không đồng thời bằng 0 nên hệ phương trình:

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}x_i = 0; j = 1, 2, \ldots, n+1$$

có nghiệm không tầm thường, tức là $\det[a_{ij}] = 0$. Do đó siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ suy biến.

Từ $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}u_i = 0$ với mọi $j = 1, 2, \ldots, n+1$, hay $[u]^T A = 0$ ($A = [a_{ij}]$), suy ra $[u]^T A[u] = 0$, chứng tỏ rằng điểm $U = (u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$ thuộc siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$. □

Nhận xét 3.3.2.5. Từ định lý trên suy ra rằng, nếu siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ không suy biến thì bất kì một điểm nào của không gian cũng có một siêu phẳng đối cực đối với $(\mathcal{S})$.

Định lý 3.3.2.6. *Nếu $(\mathcal{S})$ là một siêu mặt bậc hai không suy biến thì bất kì siêu phẳng nào của $\mathbf{P}^n$ cũng có một điểm cực duy nhất đối với $(\mathcal{S})$.*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = 0$$

với $\det[\mathrm{a_{ij}}] \neq 0$, và siêu phẳng $\mathbf{P}$ có phương trình

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_jx_j = 0. \tag{3.19}$$

Nếu $U = (u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$ là điểm cực của siêu phẳng $\mathbf{P}$ nói trên đối với siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ thì phương trình của $\mathbf{P}$ là:

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}u_ix_j = 0. \tag{3.20}$$

Từ (3.19) và (3.20) ta suy ra:

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}u_i = c_j; j = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Đây là một hệ n phương trình tuyến tính có $\det[\mathrm{a_{ij}}] \neq 0$ nên có nghiệm duy nhất là $(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ (vì theo giả thiết các c_j không đồng thời bằng 0). Vậy siêu phẳng $\mathbf{P}$ có một điểm cực $U\,(u_i)$ duy nhất đối với $(\mathcal{S})$. □

Định lý 3.3.2.7. *Nếu điểm V nằm trên siêu phẳng đối cực của điểm U đối với siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ thì điểm U nằm trên siêu phẳng đối cực của điểm V đối với $\mathcal{S}$.*

Chứng minh. Giả sử đối với mục tiêu đã cho trong $\mathbf{P}^n$ siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình:

$$[x]^T A[x] = 0.$$

Khi đó điều kiện để cho V nằm trên siêu phẳng đối cực của U là:

$$[u]^T A[v] = 0.$$

Suy ra

$$[v]^T A^T[u] = 0$$

hay

$$[v]^T A[u] = 0.$$

Đẳng thức trên chứng tỏ rằng điểm U nằm trên siêu phẳng đối cực của V đối với $(\mathcal{S})$. □

Nhận xét 3.3.2.8. Sử dụng định lý này trong $\mathbf{P}^2$ để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng khi biết ba đường thẳng đối cực của chúng (đối với một đường bậc hai) đồng quy và ngược lại.

Định lý 3.3.2.9. *Các khái niệm "điểm cực", "siêu phẳng đối cực" trong định nghĩa nêu ở trên là các khái niệm xạ ảnh.*

Chứng minh. Ta chứng minh qua phép biến đổi xạ ảnh, điểm cực và siêu phẳng đối cực đối với siêu mặt bậc hai lại biến thành điểm cực và siêu phẳng đối cực đối với siêu mặt bậc hai.

Cho siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}$ có phương trình:

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0$$

hay

$$[x]^T A[x] = 0 \text{ với } \det A \neq 0 \;\; (A = [a_{ij}])$$

và điểm $U\left(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}\right)$. Khi đó siêu phẳng đối cực của điểm U có phương trình $[u]^T A[x] = 0$.

Qua biến đổi xạ ảnh f có biểu thức tọa độ $[x] = B[x']$, siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}$ biến thành siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}' = f(\mathcal{S})$ có phương trình $[x']^T B^T AB[x'] = 0$, điểm U biến thành điểm $f(U) = U'$ với $[u] = B\,[u']$ và siêu phẳng đối cực của U biến thành siêu phẳng có phương trình

$$(B\,[u'])^T A\,(B\,[x']) = 0$$

hay

$$[u']^T B^T AB\,[x'] = 0.$$

Đây chính là phương trình siêu phẳng đối cực của điểm U' đối với siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}'$. □

Định nghĩa 3.3.2.10. Hai điểm U, V được gọi liên hợp với nhau đối với $(\mathcal{S})$ nếu $[u]^T A[v] = 0$.

Ta nhận thấy siêu phẳng đối cực của U đối với $\mathcal{S}$ bao gồm tập tất cả các điểm liên hợp với U.

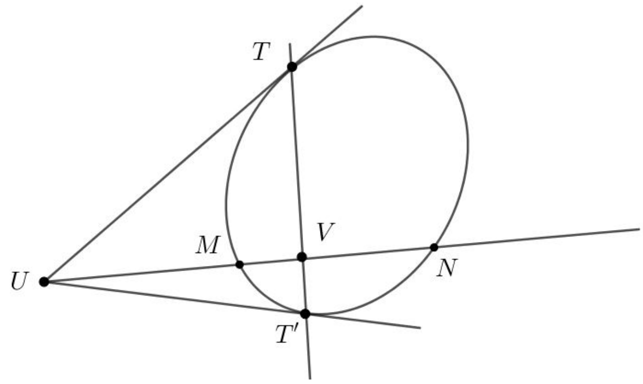
Định lý 3.3.2.11. *Giả sử U, V liên hợp với nhau đối với $\mathcal{S}$. Khi đó:*
i) Nếu đường thẳng UV cắt $\mathcal{S}$ tại hai điểm phân biệt M, N (thực hoặc ảo liên hợp) thì

$$(UVMN) = -1.$$

ii) Nếu UV cắt $\mathcal{S}$ tại điểm một điểm duy nhất thì điểm đó chính là U hoặc V.

Chứng minh. i) Giả sử đối với mục tiêu xạ ảnh đã cho trong $\mathbf{P}^n$ siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$ có phương trình:

$$[x]^T A[x] = 0.$$



Hình 3.19

Nếu đường thẳng UV cắt $(\mathcal{S})$ tại hai điểm M, N phân biệt (Hình 3.19) thì

$$[U] = k_1[M] + l_1[N]$$
$$[V] = k_2[M] + l_2[N]$$

và

$$\left(k_1[M]^T + \left(l_1[N]^T\right) A \left(k_2[M] + l_2[N]\right) = 0 \ .$$

Vì M, N thuộc $\mathcal{S}$ nên

$$[M]^T A[M] = [N]^T A[N] = 0.$$

Do đó $(k_1 l_2 + k_2 l_1)\,[M]^T A[N] = 0$. Vì M, N là hai điểm phân biệt thuộc $(\mathcal{S})$ nên $[M]^T A[N] \neq 0$ (vì trái lại, đường thẳng UV cắt $(\mathcal{S})$ tại vô số điểm). Do đó

$$(k_1 l_2 + k_2 l_1) = 0.$$

Vậy $(UVMN) = (MNUV) = -1$.

ii) Nếu UV cắt $(\mathcal{S})$ tại một điểm duy nhất X thì $[X] = k[U] + l[V]$ và $[X]^T A[X] = 0$. Do đó

$$[U]^T A[U] k^2 + 2[U]^T A[V] kl + [V]^T A[V] l^2 = 0.$$

Để ý rằng $[U]^T A[V] = 0$, ta có

$$[U]^T A[U]k^2 + [V]^T A[V]l^2 = 0.$$

Vì phương trình này chỉ có một cặp nghiệm duy nhất (sai khác một hằng số nhân khác 0) nên $[U]^T A[U] = 0$ hoặc $[V]^T A[V] = 0$, tức X trùng U hoặc V. $\square$

Trường hợp phổ biến i) giải thích thuật ngữ "liên hợp" đối với siêu mặt bậc hai của hai điểm.

Nhận xét 3.3.2.12. Trên không gian afin $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \setminus W$, xét siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}$ trong $\mathbf{P}^n$ và siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus W$ trong $\mathbf{A}^n$. Giả sử P, Q là hai điểm liên hợp đối với $\mathcal{S}$ và đường thẳng PQ giao với $\mathcal{S}'$ tại hai điểm phân biệt M, N. Khi đó Q là điểm vô tận của $\mathbf{A}^n$ khi và chỉ khi P là trung điểm của MN. Từ đó suy ra điểm I là tâm của siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}'$ khi và chỉ khi I liên hợp với mọi điểm của W đối với $\mathcal{S}$, tức I là cực điểm của W. Đặc biệt, nếu $\mathcal{S}$ là siêu mặt bậc hai không suy biến và $\mathcal{S}$ không tiếp xúc với W thì $\mathcal{S}'$ có tâm I duy nhất chính là cực điểm của W đối với $\mathcal{S}$.

b) Siêu phẳng tiếp xúc, siêu mặt lớp hai

Nếu điểm U nằm trên siêu phẳng bậc hai $(\mathcal{S})$ nhưng không phải điểm kỳ dị của $(\mathcal{S})$ thì U có siêu phẳng đối cực và U thuộc siêu phẳng đối cực đó. Khi đó siêu phẳng đối cực của U được gọi là siêu phẳng tiếp xúc của $(\mathcal{S})$ tại U và U được gọi là tiếp điểm.

Mọi $r-$phẳng $(1 \leq r \leq n-1)$ đi qua U và nằm trong siêu phẳng tiếp xúc được gọi là $r-$phẳng tiếp xúc của $(\mathcal{S})$ tại U. Đường thẳng tiếp xúc với $(\mathcal{S})$ tại U được gọi là tiếp tuyến của $(\mathcal{S})$ tại U.

Định lý 3.3.2.13. *Điều kiện cần và đủ để cho một đường thẳng l là tiếp tuyến của một siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}$ tại điểm $M \in \mathcal{S}$ là hoặc l nằm trên $\mathcal{S}$ hoặc l cắt $\mathcal{S}$ theo điểm kép M.*

Chứng minh. Giả sử siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}$ có phương trình $[x]^T A[x] = 0$ và điểm M có ma trận cột tọa độ là $[u]$. Khi đó vì $M \in \mathcal{S}$ nên

$[u]^T A[u] = 0$. Siêu phẳng tiếp xúc với $\mathcal{S}$ tại M có phương trình $[u]^T A[x] = 0$. Ta gọi N là một điểm nào đó khác M có ma trận cột tọa độ là $[v]$ và gọi l là đường thẳng đi qua M và N. Phương trình của l là $[x] = \lambda[u] + \mu[v]$ và phương trình để tìm tọa độ giao điểm của l và $\mathcal{S}$ là

$$2[u]^T A[v]\lambda\mu + [v]^T A[v]\mu^2 = 0.$$

Theo định nghĩa l là tiếp tuyến của $\mathcal{S}$ khi và chỉ khi l nằm trên siêu phẳng tiếp xúc, tức là khi và chỉ khi N nằm trên siêu phẳng đó, tức là $[u]^T A[v] = 0$. Khi đó phương trình tìm giao điểm trở thành $[v]^T A[v]\mu^2 = 0$. Phương trình này có nghiệm kép $\mu = 0$ (nếu $[v]^T A[v] \neq 0$, tức là nếu $N \notin \mathcal{S}$) và vô số nghiệm (nếu $N \in \mathcal{S}$). Suy ra đường thẳng l cắt $\mathcal{S}$ tại điểm kép M hoặc nằm hoàn toàn trên $\mathcal{S}$. Định lý được chứng minh. □

Định nghĩa 3.3.2.14. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh đã chọn, một tập các siêu phẳng được gọi là một siêu mặt lớp hai nếu tọa độ $(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1})$ của chúng thỏa mãn phương trình:

$$[u]^T A[u] = 0,$$

hoặc

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} u_i u_j = 0,$$

trong đó $a_{ij} = a_{ji}$ và các a_{ij} không đồng thời bằng 0. Nếu ma trận $A = [a_{ij}]$ không suy biến siêu mặt lớp hai được gọi là không suy biến, nếu A suy biến siêu mặt lớp hai được gọi là suy biến.

Ví dụ 3.3.2.15. Cho siêu mặt lớp hai trong $\mathbf{P}^2$ có phương trình $u_1^2 - u_2^2 = 0$. Khi đó siêu mặt lớp hai gồm các đường thẳng có tọa độ $(0, 0, 1)$, $(1, 1, a)$, $(1, -1, a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Định lý 3.3.2.16. *Tập hợp tất cả các siêu phẳng tiếp xúc với siêu mặt bậc hai không suy biến*

$$[x]^T A[x] = 0,$$

là một siêu mặt lớp hai có phương trình

$$[u]^T A^{-1}[u] = 0.$$

Chứng minh. Giả sử siêu phẳng $[u]^T[x] = 0$ tiếp xúc với siêu mặt bậc hai ta cần chứng minh siêu phẳng đó thuộc siêu mặt bậc hai $[u]^T A^{-1}[u] = 0$. Gọi $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ là tọa độ của một điểm nào đó thuộc siêu mặt bậc hai, siêu phẳng tiếp xúc với siêu mặt bậc hai tại điểm đó có phương trình $[a]^T A[x] = 0$. Suy ra $[u]^T = [a]^T A$ nên $[u] = A^T[a] = A[a]$ (vì $A^T = A$). Do đó $[u]^T A^{-1}[u] = [a]^T A A^{-1} A[a] = [a]^T A[a] = 0$. Điều đó chứng tỏ siêu phẳng $[u]^T[x] = 0$ thuộc siêu mặt lớp hai $[u]^T A^{-1}[u] = 0$.

Ngược lại, giả sử $[u]^T[x] = 0$ là siêu phẳng thuộc siêu mặt lớp hai $[u]^T A^{-1}[u] = 0$. Ta sẽ chứng minh rằng siêu phẳng đó tiếp xúc với siêu mặt bậc hai $[x]^T A[x] = 0$. Lấy một điểm $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ sao cho $[a] = A^{-1}[u]$. Suy ra: $A[a] = AA^{-1}[u] = [u]$ hay $[a]^T A = [u]^T$. Thay vào phương trình siêu mặt lớp hai $[u]^T A[u] = 0$ ta có: $[a]^T A A^{-1} A[a] = [a]^T A[a] = 0$. Điều đó chứng tỏ điểm $A\,(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ thuộc siêu mặt bậc hai có phương trình $[x]^T A[x] = 0$.

Khi đó siêu phẳng đối cực của điểm $A\,(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ đối với siêu mặt bậc hai là siêu phẳng tiếp xúc tại A và có phương trình $[a]^T A[x] = 0$. Vì $[a] = A^{-1}[u]$ nên $[a]^T = [u]^T A^{-1}$. Do đó $[u]^T[x] = 0$ tương đương $[u]^T A^{-1} A[x] = 0$ hay $[a]^T A[x] = 0$, tức $[u]^T[x] = 0$ chính là siêu phẳng tiếp xúc của siêu mặt bậc hai $[x]^T A[x] = 0$. □

Hệ quả 3.3.2.17. *Mỗi siêu mặt lớp hai không suy biến có phương trình $[u]^T A[u] = 0$ đều có thể xem là tập hợp tất cả các siêu phẳng tiếp xúc của siêu mặt bậc hai $[x]^T A^{-1}[x] = 0$.*

3.3.3 *Ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm, giữa hai chùm đường thẳng trong* P^2 *và một số định lí cổ điển về đường bậc hai xạ ảnh*

a) Ánh xạ xạ ảnh và phép phối cảnh giữa hai hàng điểm, giữa hai chùm đường thẳng

a1) **Hàng điểm, chùm đường thẳng**

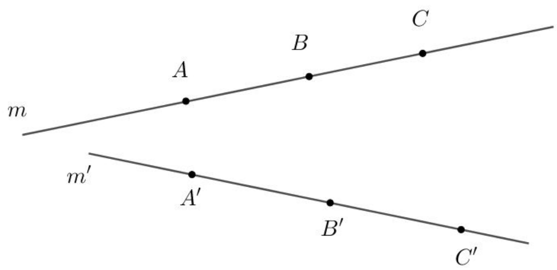
Ta gọi các điểm cùng thuộc một đường thẳng là một hàng điểm, đường thẳng đó được gọi là giá của hàng điểm. Hàng điểm $A, B, C, \ldots$ thuộc đường thẳng m ký hiệu là $\{A, B, C, \ldots\}$ hay $\{m\}$.

Trong $\mathbf{P}^2$ đối ngẫu với hàng điểm, ta gọi các đường thẳng cùng đi qua một điểm là chùm đường thẳng. Chùm đường thẳng $a, b, c, \ldots$ cùng đi qua điểm S (được gọi là tâm của chùm) ký hiệu là $\{a, b, c, \ldots\}$ hay $\{S\}$.

a2) **Ánh xạ xạ ảnh**

Ánh xạ $f : \{m\} \to \{m'\}$ biến mỗi điểm của đường thẳng m thành một điểm của đường thẳng m' được gọi là ánh xạ xạ ảnh nếu nó bảo tồn tỉ số kép 4 điểm bất kỳ thuộc hàng.

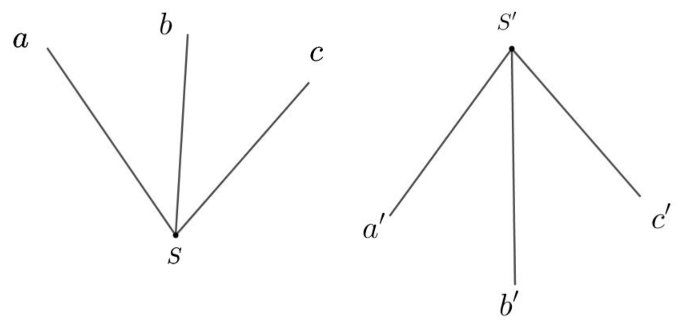
Ánh xạ $f : \{\mathcal{S}\} \to \{\mathcal{S}'\}$ biến mỗi đường thẳng của chùm tâm S thành một đường thẳng của chùm tâm S' được gọi là ánh xạ xạ ảnh nếu nó bảo tồn tỉ số kép 4 đường thẳng bất kỳ thuộc chùm.



Hình 3.20: $\{A, B, C, \ldots\} \barwedge \{A', B', C', \ldots\}$ hoặc $\{m\} \barwedge \{m'\}$.

Khi có ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm hay giữa hai chùm đường thẳng, ta nói rằng có một liên hệ xạ ảnh giữa hai hàng điểm hoặc giữa hai chùm đường thẳng. Ta ký hiệu sự liên hệ xạ ảnh giữa hai hàng điểm m và m' như Hình 3.20.

Tương tự ta cũng ký hiệu sự liên hệ xạ ảnh giữa hai chùm tâm $\mathcal{S}$ và tâm $\mathcal{S}'$ như Hình 3.21



Hình 3.21: $\{a, b, c, \ldots\} \overline{\wedge} \{a', b', c', \ldots\}$ hoặc $\{\mathcal{S}\} \overline{\wedge} \{\mathcal{S}'\}$.

Chú ý 3.3.3.1. Ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm chính là đẳng cấu xạ ảnh giữa hai không gian xạ ảnh 1 chiều.

Từ định lý về sự xác định ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm, ta có định lý đối ngẫu sau trong $\mathbf{P}^2$.

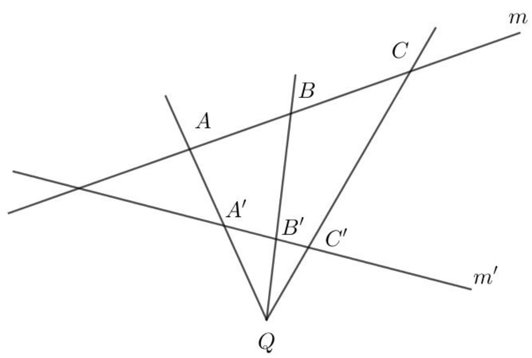
Định lý 3.3.3.2. *Trong $\mathbf{P}^2$ cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c thuộc chùm tâm $\mathcal{S}$ và ba đường thẳng phân biệt a', b', c' thuộc chùm tâm $\mathcal{S}'$. Khi đó có một ánh xạ xạ ảnh duy nhất $f : \{\mathcal{S}\} \to \{S'\}$ sao cho $f(a) = a'; f(b) = b'; f(c) = c'$.*

a3) **Phép phối cảnh**

Định nghĩa 3.3.3.3. Một ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm được gọi là phép phối cảnh (hay phép chiếu xuyên tâm) nếu đường thẳng nối các điểm tương ứng luôn đi qua một điểm O cố định. Ta gọi O là tâm phối cảnh.

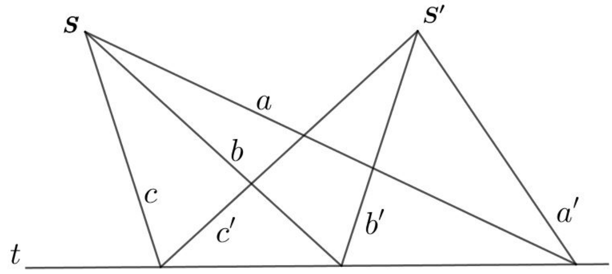
Một ánh xạ xạ ảnh giữa hai chùm đường thẳng được gọi là phép phối cảnh nếu giao điểm của các cặp đường thẳng tương ứng luôn nằm trên một đường thẳng t cố định. Ta gọi t là trục phối cảnh.

Khi có phép phối cảnh giữa hai hàng điểm hay giữa hai chùm đường thẳng, ta nói rằng có một liên hệ phối cảnh giữa hai hàng điểm hoặc giữa hai chùm đường thẳng.



Hình 3.22

Ta ký hiệu sự liên hệ phối cảnh giữa hai hàng điểm là: $\{A, B, C, \ldots\} \bar{\bar{\wedge}} \{A', B', C', \ldots\}$ hay là $\{m\} \bar{\bar{\wedge}} \{m'\}$ (Hình 3.22) và ký hiệu sự liên hệ phối cảnh giữa hai chùm đường thẳng là $\{a, b, c, \ldots\} \bar{\bar{\wedge}} \{a', b', c', \ldots\}$ hay là $\{S\} \bar{\bar{\wedge}} \{S'\}$ (Hình 3.23).

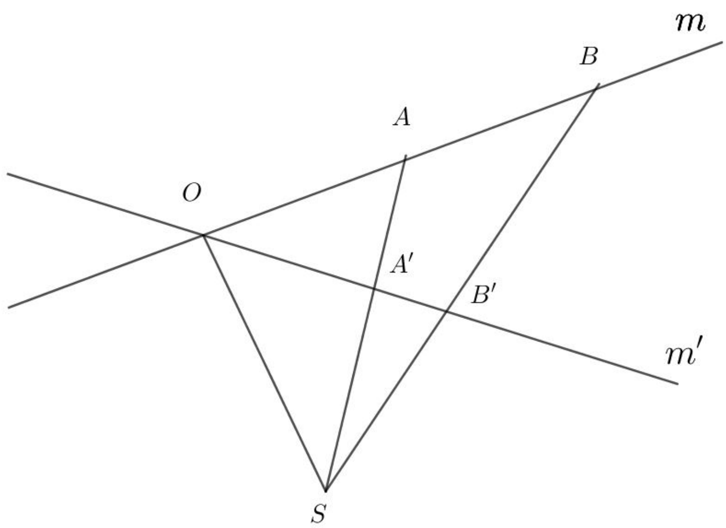


Hình 3.23

Định lý 3.3.3.4. *Điều kiện cần và đủ để ánh xạ xạ ảnh* $f : \{m\} \to$

$\{m'\}$ giữa hai hàng điểm trở thành phép phối cảnh là giao điểm O của hai giá tự ứng, nghĩa là $f(O) = O$.

Chứng minh. Nếu f là phép phối cảnh (phép chiếu xuyên tâm) thì rõ ràng điểm $O = m \cap m'$ là tự ứng (Hình 3.24).



Hình 3.24

Ngược lại, nếu ánh xạ xạ ảnh f có điểm O tự ứng, ta cần chứng minh f là phép phối cảnh.

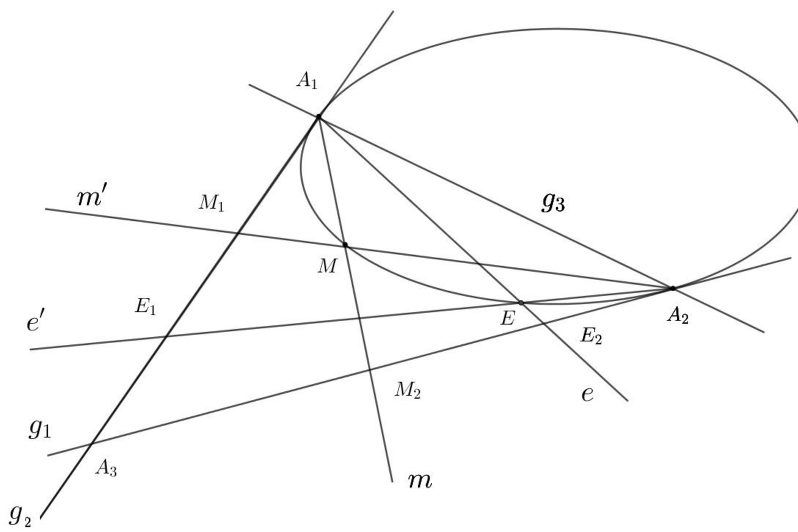
Trên đường thẳng m ta lấy hai điểm A, B sao cho ba điểm O, A, B phân biệt. Gọi $A' = f(A), B' = f(B)$ và ta có $O = f(O)$. Khi đó ba điểm O, A', B' cũng phân biệt. Ánh xạ xạ ảnh f hoàn toàn được xác định bởi hai bộ ba điểm O, A, B và O, A', B'. Gọi $\mathcal{S} = AA' \cap BB'$ thì f là phép chiếu xuyên tâm với tâm chiếu $\mathcal{S}$. Vậy f là phép phối cảnh giữa hai hàng điểm m và m'. □

Định lý 3.3.3.5 (Định lý đối ngẫu)**.** *Điều kiện cần và đủ để ánh xạ xạ ảnh f giữa hai chùm đường thẳng $\{\mathcal{S}\}$ và $\{\mathcal{S}'\}$ trở thành phép phối cảnh là đường thẳng nối hai tâm tự ứng, tức $f(\mathcal{S}\mathcal{S}') = \mathcal{S}\mathcal{S}'$.*

b) Định lý Steiner

Định lý 3.3.3.6 (Định lý thuận). *Nếu ánh xạ xạ ảnh $f : \{A_1\} \to \{A_2\}$ giữa hai chùm tâm A_1 và tâm A_2 không phải là một phép phối cảnh thì giao điểm của các đường thẳng tương ứng nằm trên một đường conic.*

Chứng minh. Xét ánh xạ xạ ảnh f giữa hai chùm tâm A_1 và tâm A_2. Gọi đường thẳng $g_3 = A_1A_2$ (Hình 3.25). Vì f không phải phép phối cảnh nên ta có $f(g_3) = g_1, f(g_2) = g_3$. Ta có g_1, g_2, g_3 là ba đường thẳng phân biệt.



Hình 3.25

Gọi $A_3 = g_1 \cap g_2$. Lấy một đường thẳng e thuộc chùm tâm A_1 mà không trùng với g_2 và g_3. Ta có $e' = f(e)$ thuộc chùm tâm A_2. Một đường thẳng m bất kì thuộc chùm tâm A_1 sẽ biến thành đường thẳng m' thuộc chùm tâm A_2. Vì f là ánh xạ xạ ảnh nên ta có : $(g_3g_2em) = (g_1g_3e'm')$.

Gọi $E = e \cap e'$, $M = m \cap m', E_1 = g_2 \cap e', E_2 = g_1 \cap e, M_1 = g_2 \cap m', M_2 = g_1 \cap m$.

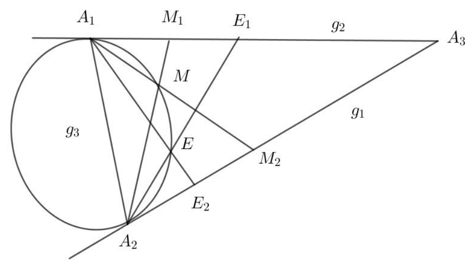
Suy ra $(A_2A_3E_2M_2) = (A_3A_1E_1M_1)$.

Chọn $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ làm mục tiêu xạ ảnh và gọi (x_1, x_2, x_3) là tọa độ của điểm M đối với mục tiêu vừa chọn ta có: $(A_2A_3E_2M_2) = \frac{x_2}{x_3}$ và $(A_3A_1E_1M_1) = \frac{x_3}{x_1}$ nên suy ra $\frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_1}$ hay $x_3^2 - x_1x_2 = 0$.

Đây là phương trình của một đường conic. Conic này đi qua điểm E (vì điểm E có tọa độ thỏa mãn phương trình của conic) đồng thời tiếp xúc với các đường thẳng g_2 và g_1 tại các điểm A_1 và A_2. □

Định lý 3.3.3.7 (Định lý đảo)**.** *Nếu A_1, A_2 là hai điểm cố định của một đường conic $(\mathcal{S})$ và M là một điểm thay đổi trên $(\mathcal{S})$ thì ánh xạ $f : \{A_1\} \to \{A_2\}$ giữa hai chùm sao cho $f(A_1M) = A_2M$ là một ánh xạ xạ ảnh nhưng không phải là phép phối cảnh.*

Chứng minh. Gọi g_3 là đường thẳng A_1A_2 và g_1, g_2 lần lượt là các tiếp tuyến của $(\mathcal{S})$ tại A_2 và A_1, $A_3 = g_1 \cap g_2$ (Hình 3.26). Lấy một điểm E cố định trên $(\mathcal{S})$ mà không trùng với A_1 và A_2. Gọi $E_2 = A_1E \cap A_2A_3, E_1 = A_2E \cap A_1A_3$. Với một điểm M thuộc $(\mathcal{S})$ khác với A_1, A_2, gọi $M_2 = A_1M \cap A_2A_3, M_1 = A_2M \cap A_1A_3$.



Hình 3.26

Nếu chọn $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ làm mục tiêu xạ ảnh ta có thể chứng minh được (bằng cách buộc điều kiện các điểm A_1, A_2, A_3, E thuộc $(\mathcal{S})$ và các đường thẳng g_1, g_2 là các tiếp tuyến của $(\mathcal{S})$ tại A_2 và A_1) phương trình của $(\mathcal{S})$ là

$$x_3^2 - x_1x_2 = 0.$$

Ta suy ra: $\frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_1}$. Mặt khác: $\frac{x_2}{x_3} = (A_2A_3E_2M_2)$ và $\frac{x_3}{x_1} = (A_3A_1E_1M_1)$
Do đó: $(A_2A_3E_2M_2) = (A_3A_1E_1M_1)$, hay

$$(A_1A_2, A_1A_3, A_1E_2, A_1M_2) = (A_2A_3, A_2A_1, A_2E_1, A_2M_1).$$

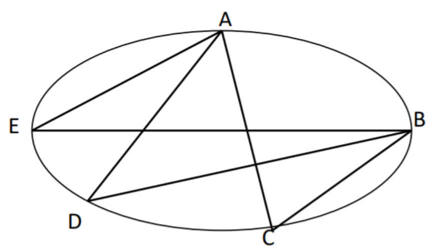
Như vậy ánh xạ f có tính chất bảo tồn tỉ số kép biến chùm tâm A_1 thành chùm tâm A_2, trong đó đường thẳng A_1A_2 nối hai tâm không tự ứng. Vậy f là ánh xạ xạ ảnh mà không phải là phép phối cảnh. □

Định lý 3.3.3.8 (Định lý thuận đối ngẫu). *Nếu $f : \{m_1\} \to \{m_2\}$ là ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm có giá là các đường thẳng m_1, m_2 nhưng không phải là phép phối cảnh thì các đường thẳng nối các cặp điểm tương ứng sẽ tiếp xúc với một đường conic.*

Định lý 3.3.3.9 (Định lý đảo đối ngẫu). *Nếu m_1 và m_2 là hai tiếp tuyến khác nhau của một đường conic và m là một tiếp tuyến thay đổi của nó thì ánh xạ $f : \{m_1\} \to \{m_2\}$ sao cho giao điểm của m_1 và m biến thành giao điểm của m_2 và m là một ánh xạ xạ ảnh nhưng không phải là phép phối cảnh.*

c) Vấn đề xác định một conic

Định lý 3.3.3.10. *Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong $\mathbf{P}^2$, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, bao giờ cũng có một đường conic duy nhất đi qua 5 điểm đó.*



Hình 3.27

Chứng minh. Xét hai chùm tâm A, tâm B và ánh xạ xạ ảnh f : $\{A\} \to \{B\}$ sao cho $f(AC) = BC, f(AD) = BD, f(AE) = BE$.

Ánh xạ f như vậy hoàn toàn được xác định và không phải là phép phối cảnh (Hình 3.27).

Do theo định lý Steiner thuận, giao điểm của các cặp đường thẳng tương ứng là một conic $(\mathcal{S})$. Đường conic này đi qua 5 điểm A, B, C, D, E đã cho. Sự duy nhất của $(\mathcal{S})$ được suy ra từ sự duy nhất của ánh xạ f. □

Định lý 3.3.3.11 (Định lý đối ngẫu)**.** *Cho 5 đường thẳng a, b, c, d, e trong $\mathbf{P}^2$, trong đó không có ba đường nào đồng quy, bao giờ cũng có một đường conic duy nhất tiếp xúc với 5 đường thẳng đó.*

Dưới đây là các trường hợp đặc biệt của các định lý trên khi hai điểm trùng nhau hay hai đường thẳng trùng nhau, cách chứng minh tương tự như trên.

+ Cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và một đường thẳng a đi qua A nhưng không đi qua các điểm còn lại. Khi đó có một conic duy nhất đi qua A, B, C, D và tiếp xúc với a tại A.

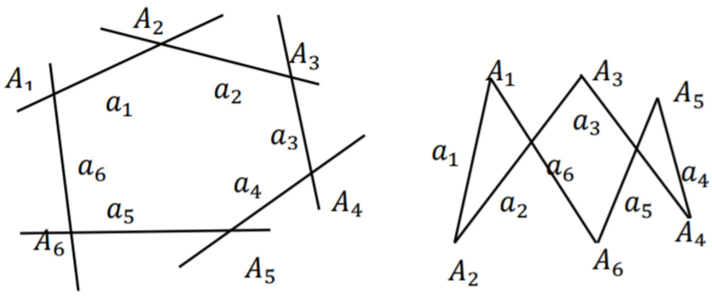
+ Cho 4 đường thẳng a, b, c, d trong đó không có ba đường nào đồng quy và một điểm A thuộc a nhưng không thuộc các đường thẳng còn lại. Khi đó có một conic duy nhất tiếp xúc với a, b, c, d và đi qua A.

+ Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng, đường thẳng a đi qua A nhưng không đi qua B và C, đường thẳng b đi qua B nhưng không đi qua A và C. Khi đó có một conic duy nhất đi qua C tiếp xúc với a tại A và tiếp xúc với b tại B.

+ Cho ba đường thẳng a, b, c không đồng quy, điểm A thuộc đường thẳng a nhưng không thuôc b và c, điểm B thuộc đường thẳng b nhưng không thuộc a và c. Khi đó có một đường conic duy nhất tiếp xúc với c, tiếp xúc với a tại A và tiếp xúc với b tại B.

d) Định lý Pascal

Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$, tập hợp 6 điểm và 6 đường thẳng sao cho mỗi điểm là giao của hai đường thẳng, mỗi đường thẳng đi qua hai và chỉ hai điểm, được gọi là một hình lục giác. Các điểm đã cho được gọi là đỉnh và các đường thẳng đã cho được gọi là cạnh của hình lục giác (Hình 3.28)



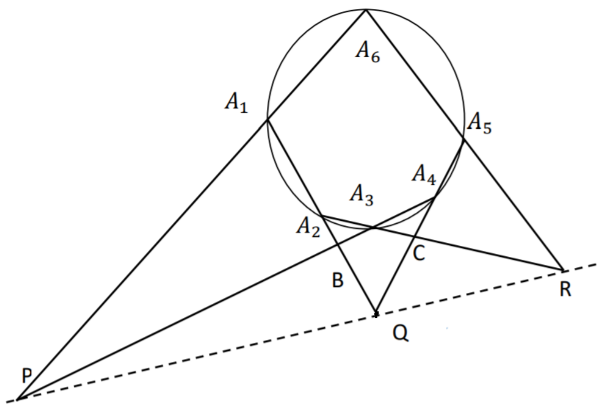
Hình 3.28

Ta có thể sắp xếp các đỉnh và các cạnh của lục giác theo một thứ tự nhất định nào đó bằng cách đánh số thứ tự. Thí dụ A_1, a_1, A_2, a_2, A_3, $a_3, A_4, a_4, A_5, a_5, A_6, a_6$ (A_i là đỉnh và a_i là cạnh sao cho cạnh a_i đi qua hai đỉnh A_i và A_{i+1} (xem đỉnh A_{6+1} là A_1) và do đó cạnh a_i và a_{i+1} đi qua đỉnh A_{i+1} (xem cạnh a_{6+1} là a_1). Khi đó các cặp đỉnh A_1 và A_4, A_2 và A_5, A_3 và A_6 được gọi là các cặp đỉnh đối diện, các cặp cạnh a_1 và a_4, a_2 và a_5, a_3 và a_6 được gọi là các cặp cạnh đối diện.

Định lý 3.3.3.12. *Điều kiện cần và đủ để một lục giác nội tiếp trong một conic (các đỉnh của nó thuộc conic) là giao điểm của các cặp cạnh đối diện nằm trên một đường thẳng (đường thẳng này được gọi là đường thẳng Pascal).*

Chứng minh. Giả sử lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ nội tiếp trong một conic (Hình 3.29). Theo định lý Steiner đảo ta có chùm tâm A_1 và chùm tâm A_5 có liên hệ xạ ảnh với nhau, có nghĩa là:

$$\{A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_6\} \barwedge \{A_5A_2, A_5A_3, A_5A_4, A_5A_6\}.$$



Hình 3.29

Cắt chùm tâm A_1 bởi đường thẳng A_3A_4 và cắt chùm tâm A_5 bởi đường thẳng A_2A_3. Gọi $B = A_3A_4 \times A_1A_2, P = A_3A_4 \times A_1A_6, Q = A_1A_2 \times A_4A_5, R = A_2A_3 \times A_5A_6, C = A_2A_3 \times A_5A_4$. Giữa hai hàng điểm nằm trên các đường thẳng A_3A_4 và A_2A_3 ta có:

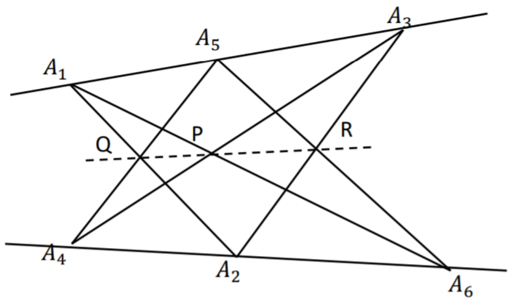
$$\{B, A_3, A_4, P\} \barwedge \{A_2, A_3, C, R\}$$

Liên hệ xạ ảnh giữa hai hàng điểm này có điểm A_3 là giao của hai giá tự ứng nên nó là phép phối cảnh.

Ta có $A_2B \times CA_4 = Q$ nên Q là tâm phối cảnh. Vậy đường thẳng PR phải đi qua tâm phối cảnh là Q, nghĩa là ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

Ngược lại, giả sử lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ có giao điểm của các cặp cạnh đối diện là P, Q, R thẳng hàng. Gọi $\mathcal{S}'$ là conic xác định bởi 5 điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 và giả sử conic cắt đường thẳng A_1A_6 tại A'_6. Cần chứng minh A'_6 trùng với A_6. Theo phần thuận của định lý Pascal, vì lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A'_6$ nội tiếp conic $\mathcal{S}$' nên đường thẳng PQ chính là đường thẳng Pascal. Ta có $R = PQ \times A_2A_3$ và $A_6 = A_1P \times A_5R = A_6'$. Vậy A_6' trùng với A_6. $\square$

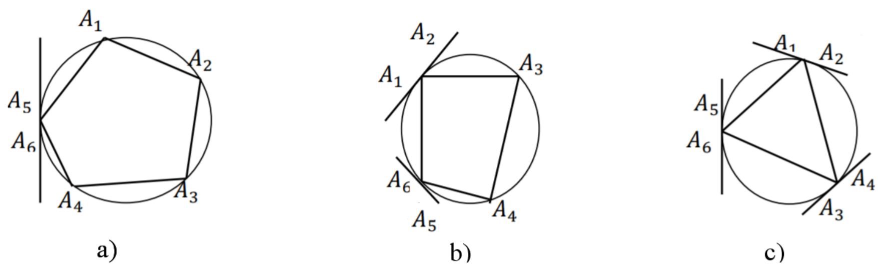
Nhận xét 3.3.3.13. Nếu thay đường conic bởi đường bậc hai suy biến, là hai đường thẳng phân biệt, ta có định lý Pappus, phép chứng minh nó có thể thực hiện như đối với định lý Pascal (Hình 3.30).



Hình 3.30

e) Các trường hợp đặc biệt của định lý Pascal

Ta có thể xem ngũ giác, tứ giác, tam giác nội tiếp conic là trường hợp đặc biệt của lục giác nội tiếp conic khi một cặp đỉnh, hai cặp đỉnh hay ba cặp đỉnh trùng nhau. Khi đó ta xem cạnh của lục giác chứa cặp đỉnh trùng nhau là tiếp tuyến của conic tại điểm đó. Người ta chứng minh được định lý Pascal vẫn đúng trong các trường hợp đặc biệt đó. Các trường hợp suy biến của lục giác minh họa bằng các hình vẽ sau đây (Hình 3.31 a, b, c).



Hình 3.31

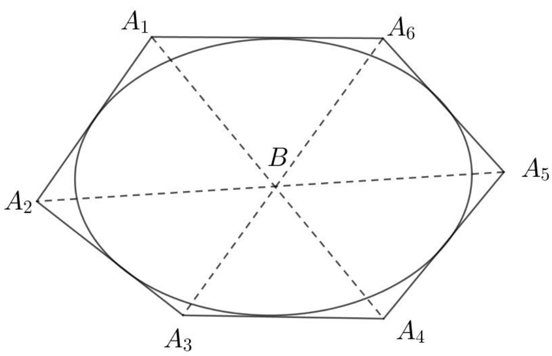
Ví dụ 3.3.3.14. Áp dụng định lý Pascal cho trường hợp suy biến giải bài toán sau: Trên conic cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D. Gọi giao điểm của các tiếp tuyến với conic tại A và C là I, giao điểm của AB và CD là J, giao điểm của AD và BC là K. Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng.

Giải. Xét lục giác nội tiếp suy biến $AADCCB$. Ta có $AA \times CC = I, AD \times CB = K, DC\times\ BA = J$. Theo định lí Pascal cho trường hợp lục giác suy biến ta có I, J, K thẳng hàng.

f) Định lý Brianchon

Định lý 3.3.3.15. *Điều kiện cần và đủ để một lục giác ngoại tiếp một đường conic (có các cạnh tiếp xúc với conic) là các đường thẳng nối các cặp đỉnh đối diện đồng quy tại một điểm (được gọi là điểm Brianchon) (Hình 3.32).*

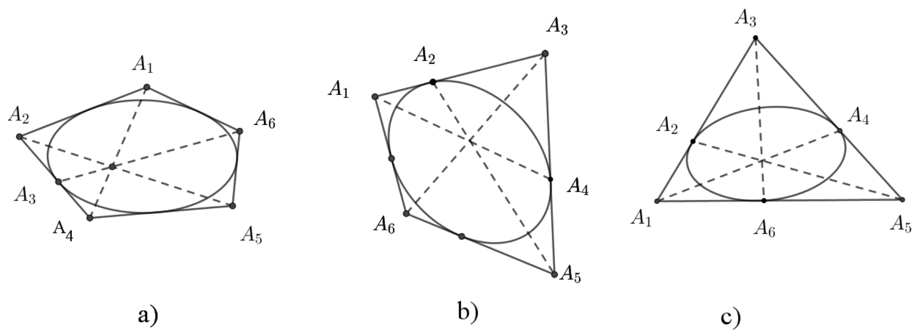
Nhận xét 3.3.3.16. Định lý Brianchon là định lý đối ngẫu của định lý Pascal trong $\mathbf{P}^2$.



Hình 3.32

g) Các trường hợp đặc biệt của định lý Brianchon

Tương tự đối với định lý Pascal, ta có thể xem ngũ giác, tứ giác, tam giác ngoại tiếp conic là những trường hợp đặc biệt của lục giác ngoại tiếp conic khi có một cặp cạnh, hai cặp cạnh hay ba cặp cạnh trùng nhau, khi đó ta xem đỉnh, là giao của cặp cạnh trùng nhau, là tiếp điểm của conic với cặp cạnh đó. Các trường hợp suy biến của lục giác ngoại tiếp conic được minh họa bằng các hình vẽ sau đây (Hình 3.33 a, b, c):



Hình 3.33

Ví dụ 3.3.3.17. Áp dụng định lý Brianchon cho trường hợp suy biến giải bài toán sau: Trong $\mathbf{P}^2$ cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp conic $\mathcal{S}$. Các đường thẳng CD, DA tiếp xúc với S tương ứng tại P, Q. Ký hiệu $I = AP \cap CQ$. Chứng minh các điểm D, I, B thẳng hàng.

Giải. Đặt $a = AD, b = AB, c = BC, d = CD$. Xét lục giác ngoại tiếp suy biến $aabcdd$. Ta có $Q = a \times a$ đối diện với $C = c \times d, A = a \times b$ đối diện với $P = d \times d, B = b \times c$ đối diện với $D = d \times a$. Theo định lý Brianchon cho trường hợp lục giác suy biến, ta có 3 đường thẳng QC, AP, BD đồng qui, có nghĩa là giao điểm I của QC, AP và hai điểm B, D thẳng hàng.

Chú ý 3.3.3.18. Từ mối liên hệ giữa đường conic trong mặt phẳng xạ ảnh và các đường bậc hai trong mặt phẳng afin, suy ra định lý Pascal và định lý Brianchon có thể áp dụng đối với các đường bậc hai (elip, hypebol, parabol) trong mặt phẳng afin và đường tròn trong mặt phẳng Euclid.

Ví dụ. Từ kết quả cho trường hợp suy biến thành tam giác của định lý Brianchon ta suy ra kết quả sau trong mặt phẳng Euclid: trong một tam giác ba đường thẳng nối ba đỉnh với ba tiếp điểm của các cạnh đối diện với đường tròn nội tiếp tam giác là đồng qui.

3.3.4 *Mô hình xạ ảnh của không gian Euclid*

a) Xây dựng mô hình

Trong $\mathbf{P}^n$ là không gian xạ ảnh n chiều. Lấy một siêu phẳng W nào đó của $\mathbf{P}^n$ thì ta có thể xây dựng tập hợp $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash W$ thành một mô hình của không gian afin n chiều liên kết với không gian vectơ $\mathbb{R}^n$.

Bây giờ ta đưa vào không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ một tích vô hướng thì không gian afin $\mathbf{A}^n$ trở thành không gian Euclid $\mathbf{E}^n$, nói đúng hơn, trở thành mô hình của không gian Euclid n chiều.

Gọi $\{S_{n+1}; \vec{e}_i\}$ là một mục tiêu trực chuẩn của $\mathbf{E}^n$ tức là $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$ và $\delta_{ij} = 1$ nếu $i = j$), mục tiêu đó sinh ra bởi mục tiêu xạ ảnh $\{S_i; E\}$ của $\mathbf{P}^n$. Ta nhớ rằng, nếu điểm $X \in \mathbf{E}^n$ có toạ độ xạ ảnh không thuần nhất là $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ thì nó có toạ độ xạ ảnh đối với mục tiêu xạ ảnh $\{S_i : E\}$ là $X = (x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1})$ sao cho $X_i = x_i / x_{n+1}$, bởi vậy, có thể lấy toạ độ xạ ảnh của X là $X = (X_1 : \ldots : X_n : 1)$.

b) Cái tuyệt đối của không gian Euclid

Xét mô hình $\mathbf{E}^n = \mathbf{P}^n \backslash W$ đã nói ở trên. Trong siêu phẳng vô tận W xét một siêu mặt trái xoan ảo (T), có phương trình đối với mục tiêu xạ ảnh $\{S_i : E\}$ của $\mathbf{P}^n$ là:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \end{cases} . \tag{3.21}$$

Ta nhắc lại rằng $\{S_i : E\}$ là mục tiêu xạ ảnh sinh ra mục tiêu trực chuẩn. Siêu mặt trái xoan (T) được gọi là cái tuyệt đối của không gian Euclid $\mathbf{E}^n$.

Trước hết ta chứng minh rằng: Cái tuyệt đối (T) là bất biến đối với mọi phép biến đổi đồng dạng của $\mathbf{E}^n$ (nói rõ hơn: (T) là bất biến đối với mọi phép xạ ảnh sinh ra phép đồng dạng).

Thật vậy, ta giả sử $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ là phép đồng dạng, sinh ra bởi phép biến đổi xạ ảnh $F : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ có ma trận đối với mục tiêu xạ ảnh $\{S_i : E\}$ là:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn+1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(Ma trận của F phải có dạng đó vì F biến siêu phẳng vô tận W thành chính nó).

Như vậy, biểu thức toạ độ của F là:

$$\begin{cases} kx'_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j, \\ kx'_{n+1} = x_{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Ta chú ý đến ma trận $A = (a_{ij})\,, i, j = 1, 2, \dots, n$. Ma trận A có được bằng cách bỏ đi từ ma trận A' dòng thứ $n+1$ và cột thứ $n+1$. Ma trận A chính là ma trận của phép đồng dạng f đối với mục tiêu trực chuẩn nên $AA^T = kI_n$, với $k \neq 0$. Từ đó, dễ dàng suy ra F biến (T) thành chính nó.

Bằng lập luận tương tự ta nhận thấy định nghĩa của cái tuyệt đối (T) không phụ thuộc vào việc chọn mục tiêu trực chuẩn.

Ta chú ý tới trường hợp $n = 2$: nếu $\mathbf{E}^2 = \mathbf{P}^2 \backslash W$, trong đó W là đường thẳng vô tận, thì cái tuyệt đối (T) bây giờ là tập: $x_1^2 + x_2^2 = 0, x_3 = 0$.

Như vậy (T) không chứa điểm nào của $\mathbf{P}^2$. Nếu ta xét không gian mở rộng (phức) của $\mathbf{P}^2$ (không gian bổ sung thêm các điểm có tọa độ mà các thành phần là các số phức) thì cái tuyệt đối (T) gồm hai điểm ảo: $I = (1 : i : 0)$ và $J = (1 : -i : 0)$. Hai điểm đó được gọi là hai điểm xiclic của mặt phẳng Euclid.

c) Ý nghĩa xạ ảnh của tính vuông góc trong $\mathbf{E}^n$

Trong $\mathbf{E}^2$ cho hai đường thẳng a và b lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Điều đó có nghĩa là nếu gọi A và B lần lượt là các điểm vô tận trên a và b thì tọa độ xạ ảnh của chúng là $A = (a_1 : a_2 : \ldots : a_n : 0)\,, B = (b_1 : b_2 : \ldots : b_n : 0)$.

Hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = (A)^T(B) = 0.$$

Điều này chứng tỏ rằng hai điểm A và B (trên W) liên hợp với nhau đối với cái tuyệt đối (T). Ta kết luận: Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi hai điểm vô tận của chúng liên hợp với nhau đối với cái tuyệt đối (T).

Đặc biệt, khi $n = 2$, ta có hai đường thẳng trong mặt phẳng Euclid vuông góc với nhau khi và chỉ khi hai điểm vô tận của chúng chia điều hòa hai điểm xiclic I, J.

d) Công thức Laghe (Laguerre)

Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai đường thẳng a và b với các vectơ chỉ phương như mục trên thì số đo góc giữa a và b là số được xác định bởi:

$$\cos\varphi = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n|}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)}} \tag{3.22}$$

$$= \frac{\left|(A)^T(B)\right|}{\sqrt{(A)^T(A)(B)^T(B)}}. \tag{3.23}$$

Nếu a và b song song thì $\varphi = 0$. Nếu a không song song với b thì hai điểm vô tận của chúng là $A = (a_1 : a_2 : \ldots : a_n : 0)$ và $B = (b_1 : b_2 : \ldots : b_n : 0)$ không trùng nhau. Ta hãy tìm toạ độ giao điểm X của đường thẳng AB với cái tuyệt đối (T). Vì X nằm trên AB nên $(X) = (A) + k(B)$, và vì X nằm trên (T) nên $(X)^T(X) = 0$ hay

$$\left[(A)^T + k(B)^T\right] \cdot [(A) + k(B)] = 0.$$

Ta đi đến phương trình:

$$(B)^T(B)k^2 + 2(A)^T(B)k + (A)^T(A) = 0. \tag{3.24}$$

Phương trình có hai nghiệm phức liên hợp k_1 và k_2. Do đó, ta có hai giao điểm liên hợp P và Q, trong đó,

$$(P) = (A) + k_1(B) \quad \text{và } (Q) = (A) + k_2(B).$$

Từ đó suy ra:

$$k_1k_2 = \frac{(A)^T(A)}{(B)^T(B)}, \quad k_1 + k_2 = \frac{-2(A)^T(B)}{(B)^T(B)}. \tag{3.25}$$

Đặt $k_1 = re^{it} = r(\cos t + i\sin t)$, thì $k_2 = re^{-it} = r(\cos t - i\sin t)$. Ta được:

$$r^2 = k_1k_2 = \frac{(A)^T(A)}{(B)^T(B)},$$
$$\cos t = \frac{k_1 + k_2}{2r} = \frac{-2(A)^T(B)}{2(B)^T(B)} \cdot \frac{\sqrt{(B)^T(B)}}{\sqrt{(A)^T(A)}} = \frac{-(A)^T(B)}{\sqrt{(A)^T(A)(B)^T(B)}}.$$

Suy ra $\cos\varphi = |\cos t|$. Mặt khác, ta có: $(PQAB) = \frac{k_1}{k_2} = e^{2it}$ nên

$$\ln(PQAB) = 2it. \tag{3.26}$$

Bởi vậy, ta đi đến công thức Laghe:

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\frac{1}{2i}\ln(PQAB)\right)\right|. \tag{3.27}$$

e) Ý nghĩa xạ ảnh của siêu cầu trong $\mathbf{E}^n$

Trong không gian Euclid $\mathbf{E}^n = \mathbf{P}^n \backslash W$ một siêu cầu tổng quát (C) là tập hợp những điểm $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ thỏa mãn phương trình

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + a_0 = 0. \tag{3.28}$$

Chuyển sang toạ độ xạ ảnh $X = (x_1 : x_2 : \ldots : x_n : x_{n+1})$ với $X_i = x_i/x_{n+1}$, phương trình trở thành:

$$a_0x_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_ix_{n+1} = 0. \tag{3.29}$$

Giao của (C) với siêu phẳng vô tận $x_{n+1} = 0$ là tập hợp

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \\ x_{n+1} = 0 \end{cases}. \tag{3.30}$$

Như vậy, $(C) \cap W = (T)$ hay (C) đi qua (T). Ta đi đến kết luận: siêu cầu tổng quát trong $\mathbf{E}^n$ là một siêu mặt bậc hai đi qua cái tuyệt đối (T).

Ngược lại, cho (S) là một siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{E}^n$, có phương trình đối với mục tiêu trực chuẩn là:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_{in+1} X_i + a_{n+1n+1} = 0. \tag{3.31}$$

Chuyển sang toạ độ xạ ảnh ta đi đến phương trình:

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0.$$

Giao của (C) với siêu phẳng vô tận W là tập hợp:

$$x_{n+1} = 0, \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0.$$

Nếu giao đó trùng với (T) thì $a_{ij} = k\delta_{ij},\ k \neq 0$. Vậy $(\mathcal{S})$ là một siêu cầu tổng quát.

Tóm lại, một siêu mặt bậc hai trong không gian $\mathbb{E}^n$ là siêu cầu tổng quát khi và chỉ khi nó cắt siêu phẳng vô tận theo cái tuyệt đối (T).

Trong trường hợp $n = 2$, đường elip trong mặt phẳng Euclid là đường tròn khi và chỉ khi nó đi qua hai điểm xiclic.

Chú ý rằng, tâm của siêu cầu chính là điểm đối cực của siêu phẳng vô tận đối với siêu cầu đó.

f) Phương chính của siêu cầu bậc hai trong $\mathbf{E}^n$

Trong $\mathbf{E}^n$ cho siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S}')$ sinh ra bởi siêu mặt bậc hai $(\mathcal{S})$. Ta biết rằng phương $\vec{c}$ của $\mathbf{E}^n$ là phương chính của $(\mathcal{S}')$ nếu nó vuông góc với siêu phẳng kính γ liên hợp với phương $\vec{c}$. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi điểm vô tận C ứng với phương $\vec{c}$ liên hợp với mọi điểm thuộc $\gamma \cap W$, hay nói cách khác: trong không gian xạ ảnh $n-1$ chiều W, C là điểm đối cực của siêu phẳng $\gamma \cap W$ đối với (T). Từ đó ta suy ra:

- Nếu $(\mathcal{S})$ là siêu cầu thì mọi phương đều là phương chính.

- Trong $\mathbf{E}^2$ mọi đường conic khác đường tròn đều có hai phương chính.

g) Tiêu điểm của đường conic trong $\mathbf{E}^n$

Xét mô hình xạ ảnh $\mathbf{E}^2 = \mathbf{P}^2 \backslash W$, trong đó W là đường thẳng của $\mathbf{P}^2$, với hai điểm xiclic trên đó là I và J. Giả sử (C') là một đường conic của $\mathbf{E}^2$ sinh ra bởi đường conic (C) của $\mathbf{P}^2$.

Điểm F và $\mathbf{E}^2$ được gọi là tiêu điểm của conic (C') nếu trong không gian mở rộng phức của $\mathbf{P}^2$ hai đường thẳng FI và FJ là hai tiếp tuyến của conic (C). Đường thẳng d của $\mathbf{E}^2$ được gọi là đường chuẩn của đường conic (C') ứng với tiêu điểm F nếu d sinh ra bởi đường thẳng trong $\mathbf{P}^2$ là đường đối cực của F đối với conic (C). Như vậy tiêu điểm F là giao điểm của hai tiếp tuyến vẽ từ I và J tới conic (C), đó là các đường thẳng ảo. Nếu (C') là đường tròn thì (C) đi qua hai điểm xiclic I, J. Khi đó, tiêu điểm F chính là giao điểm của hai tiếp tuyến tại I và J. Như vậy, F là điểm đối cực của đường thẳng W đối với (C), nếu nó là tâm của đường tròn (C'). Trong trường hợp này không có đường chuẩn, hay có thể nói, đường chuẩn là đường thẳng vô tận W. Nếu (C') không phải là đường tròn thì qua I, cũng như qua J, có hai tiếp tuyến với (C).

Khi (C') là một parabol thì W tiếp xúc với (C) nên trong bốn tiếp tuyến nói trên có hai tiếp tuyến trùng nhau và trùng với W, hai tiếp tuyến kia là ảo liên hợp nên cắt nhau tại điểm thực F.

Vậy parabol có một tiêu điểm và một đường chuẩn.

Khi (C') không phải là một parabol, bốn tiếp tuyến nói trên là phân biệt và chia thành hai cặp ảo liên hợp. Bởi vậy, chúng cắt nhau tại hai điểm thực F_1 và F_2. Vậy (C') có hai tiếp điểm và hai đường chuẩn.

Định nghĩa nói trên về tiêu điểm và đường chuẩn trùng với định nghĩa đã biết ở môn Hình học Giải tích. Ta biết rằng, đường conic là quỹ tích những điểm M mà tỉ số khoảng cách từ nó tới một điểm F cố định và một đường thẳng d cố định luôn bằng một số $e > 0$ không đổi. Điểm F được gọi là tiêu điểm, đường thẳng d (không đi qua F) được gọi là đường chuẩn, e được gọi là tâm sai.

Ta chọn hệ mục tiêu trực chuẩn trong $\mathbf{E}^2$ sao cho OX_2 là d, OX_1 đi qua F. Giả sử $F = (p, 0)$. Điểm $M(X_1, X_2)$ thuộc đường conic khi và chỉ khi $MF = e.MH$ (trong đó, H là hình chiếu vuông góc của F trên d). Từ đó suy ra phương trình conic:

$$(X_1 - p)^2 + X_2^2 = e^2 X_1^2$$

hay

$$p^2 + \left(1 - e^2\right) X_1^2 + X_2^2 - 2pX_1 = 0 \qquad (3.32)$$

Chuyển sang toạ độ xạ ảnh ta có phương trình conic (C) sinh ra đường conic nói trên là: $p^2 x_3^2 + \left(1 - e^2\right) x_1^2 + x_2^2 - 2px_1x_3 = 0$.

Ta dễ thấy, hai đường thẳng FI và FJ đều là tiếp tuyến của (C) và đường thẳng $x_1 = 0$ là đường thẳng đối cực của F. Vậy F cũng là tiêu điểm và d là đường chuẩn theo định nghĩa mới của ta.

TÓM TẮT CHƯƠNG 3

Nội dung chính của chương này bao gồm:

1. Khái niệm không gian xạ ảnh, phẳng, hệ điểm độc lập, mục tiêu và tọa độ xạ ảnh.

2. Tỉ số kép của hàng bốn điểm và chùm bốn siêu phẳng.

3. Nguyên tắc đối ngẫu trong không gian xạ ảnh.

4. Khái niệm và các tính chất của ánh xạ xạ ảnh, biến đổi xạ ảnh.

5. Mô hình xạ ảnh của không gian afin. Mối quan hệ giữa hình học xạ ảnh và hình học afin.

6. Siêu mặt bậc hai xạ ảnh và các khái niệm liên quan: cực điểm và siêu phẳng đối cực; siêu diện lớp hai.

7. Ánh xạ xạ ảnh và ánh xạ phối cảnh giữa hai hàng điểm và hai chùm đường thẳng trong $\mathbf{P}^2$.

8. Các định lý cổ điển về đường bậc hai trong mặt phẳng xạ ảnh: định lý Stainer, định lý Pascal, định lý Brianchon.

TÀI LIỆU ĐỌC THÊM CHƯƠNG 3

[1] Văn Như Cương (1999), *Hình học xạ ảnh*, Nxb Giáo dục, Hà Nội (Chương 3).

[2] M. Audin (2002), *Geometry*, Springer Science - Business Media (Chương 5, 6).

[3] Nguyễn Mộng Hy (1999), *Hình học cao cấp*, Nxb Giáo dục, Hà Nội (Chương 3).

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 3

1. Thế nào là không gian xạ ảnh? Thế nào là hệ điểm độc lập?

2. Thế nào là mục tiêu xạ ảnh? Cơ sở đại diện của mục tiêu xạ ảnh?

3. Tọa độ xạ ảnh của một điểm là gì? Tọa độ đó có đặc điểm gì?

4. Thế nào là $m-$phẳng xạ ảnh? Hai phẳng xạ ảnh có các quan hệ nào? Phương trình tổng quát của $m-$phẳng xạ ảnh có đặc điểm gì? Tọa độ của siêu phẳng là gì?

5. Thế nào là nguyên tắc đối ngẫu trong không gian xạ ảnh?

6. Không gian afin n chiều và không gian xạ ảnh n chiều có quan hệ như thế nào? Trong mối quan hệ đó, quan hệ giữa các phẳng afin và các phẳng xạ ảnh; giữa tỉ số kép và tỉ số đơn thể hiện như thế nào?

7. Ánh xạ xạ ảnh là gì? Phép xạ ảnh là gì? Quan hệ giữa ánh xạ xạ ảnh và ánh xạ tuyến tính đại diện như thế nào?

8. Thế nào là siêu mặt bậc hai xạ ảnh? Đường bậc hai xạ ảnh? Loại của một siêu mặt bậc hai được xác định như thế nào? Quan hệ giữa đường conic xạ ảnh và conic afin trong không gian 2 chiều là gì?

9. Thế nào cực điểm và siêu phẳng đối cực đối với một siêu mặt bậc hai? Siêu phẳng tiếp xúc của siêu mặt bậc hai là gì?

10. Siêu mặt lớp hai là gì? Tại sao nói siêu mặt lớp hai là khái niệm đối ngẫu của siêu mặt bậc hai?

11. Thế nào là ánh xạ xạ ảnh, ánh xạ phối cảnh giữa hai hàng điểm, giữa hai chùm đường thẳng trong $\mathbf{P}^2$?

12. Định lý Stainer liên quan đến ánh xạ giữa hai chùm đường thẳng thế nào?

13. Định lý Pascal nói về tính chất gì của hình lục giác nội tiếp một conic?

14. Định lý Brianchon nói về tính chất gì của hình lục giác ngoại tiếp một conic?

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Không gian xạ ảnh, mục tiêu và tọa độ, phẳng và phương trình phẳng

3.1. Trong không gian Euclid n chiều đã cho một mục tiêu trực chuẩn, cho một siêu cầu $\mathcal{S}$ có phương trình:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Gọi $\mathcal{S}'$ là tập hợp các cặp điểm xuyên tâm đối của $\mathcal{S}$. Hãy xây dựng $\mathcal{S}'$ trở thành một không gian xạ ảnh $n-1$ chiều.

3.2. Gọi $\mathcal{S}$ và $\mathcal{S}'$ là các tập hợp như ở Bài 3.1, còn B là tập hợp các điểm nằm trong siêu cầu $\mathcal{S}$

$$B = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{E}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1\right\}.$$

Hãy xây dựng $B' = B \cup \mathcal{S}'$ trở thành một không gian xạ ảnh n chiều.

3.3. Chứng minh rằng tập hợp các siêu phẳng cùng đi qua một điểm cố định của không gian afin $\mathbf{A}^n$ có thể được xây dựng thành một không gian xạ ảnh n chiều.

3.4. Chứng minh rằng hai đường thẳng trong mặt phẳng xạ ảnh (không gian $\mathbf{P}^2$) luôn cắt nhau.

3.5. Chứng minh rằng nếu một $m-$phẳng xạ ảnh đi qua $m+1$ điểm độc lập của một $p-$phẳng thì nó nằm trên $p-$phẳng đó.

3.6. Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu cho trước, cho các điểm

$$A(1, 0, 1), B(2, -1, 2), C(2, 3, 1).$$

a) Chứng minh hệ 3 điểm A, B, C là độc lập.

b) Hãy bổ sung 1 điểm vào hệ 3 điểm trên để được một mục tiêu.

3.7. Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ cho mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ và các điểm

$$A_1' = (0, 1, 1), A_2' = (2, 0, 1), A_3' = (1, 1, 0), E' = (1, 1, 1).$$

a) Chứng tỏ hệ điểm $\{A'_1, A'_2, A'_3; E'\}$ là mục tiêu xạ ảnh của $\mathbf{P}^2$.

b) Lập công thức đổi mục tiêu từ $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ sang $\{A'_1, A'{}_2, A'_3; E'\}$.

3.8. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu $\{A_i; E\}$ cho trước:

a) Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của $m-$phẳng đi qua $m+1$ đỉnh đầu tiên của mục tiêu.

b) Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của $m-$phẳng đi qua $m+1$ điểm cuối của mục tiêu.

c) Lập phương trình tổng quát của siêu phẳng đi qua tất cả các đỉnh của mục tiêu trừ đỉnh thứ k.

3.9. Trong $\mathbf{P}^n$ cho một $(n-2)-$phẳng α có phương trình

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n+1}x_{n+1} = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_{n+1}x_{n+1} = 0 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng một siêu phẳng β là chứa α khi và chỉ khi phương trình của β có dạng $p\left(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n+1}x_{n+1}\right) +$

$+q\left(b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_{n+1}x_{n+1}\right) = 0$ trong đó p, q là hai số không đồng thời bằng 0.

3.10. Trong $\mathbf{P}^3$ viết phương trình của một đường thẳng đi qua một điểm M đã cho và cắt hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cho trước không chứa M.

3.11. Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ cho hai cái phẳng $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$. Tổng của hai cái phẳng này là một cái phẳng có số chiều bé nhất chứa cả $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$. Giao của hai cái phẳng này là một cái phẳng có số chiều lớn nhất chứa trong $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$. Chứng minh rằng nếu p và q là số chiều của tổng và giao thì:

a) $r + s = p + q$ nếu $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ cắt nhau.

b) $r + s = p + q - 1$ nếu $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ chéo nhau.

3.12. Tìm điều kiện cần và đủ để hai cái phẳng $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ của không gian $\mathbf{P}^n$ chéo nhau.

3.13. Cho hai cái phẳng $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ của không gian $\mathbf{P}^n$. Chứng minh rằng tập hợp tất cả các điểm nằm trên tất cả các đường thẳng MN

với $M \in \mathbf{P}^r, N \in \mathbf{P}^s$ là tổng của $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$.

3.14. Trong $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho các điểm $A'_1(1,1,0)$, $A'_2(0,1,-2)$, $A'_3(1,1,1)$, $E'(2,3,-5)$.

a) Tìm ma trận chuyển mục tiêu từ mục tiêu $\{A_i; E\}$ sang mục tiêu $\{A'_i; E'\}$.

b) Cho điểm $N(0,1,1)$, tìm tọa độ của N đối với mục tiêu $\{A'_i; E'\}$.

3.15. Trong mặt phẳng $\mathbf{A}^2$ của không gian afin $\mathbf{A}^3$, xét mục tiêu $\{A_3; E_1, E_2\}$ và điểm $E(1,1)$. Lấy điểm $O \in \mathbf{A}^3 \setminus \mathbf{A}^2$, ta gọi $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_3E_1}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{A_3E_2}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{OA_3}, \vec{e} = \overrightarrow{OE}$. Ta có $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ là một cơ sở của $\overrightarrow{\mathbf{A}}^3$. Bây giờ ta bổ sung các phần tử vô tận vào mặt phẳng afin đã cho để có mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$. Gọi $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ là mục tiêu xạ ảnh ứng với cơ sở nói trên.

a) Nếu một điểm X của mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ có tọa độ afin là (x_1, x_2) thì điểm đó có tọa độ xạ ảnh là bao nhiêu?

b) Các điểm vô tận được bổ sung vào mặt phẳng afin có tọa độ xạ ảnh là bao nhiêu?

3.16. Mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ được bổ sung các điểm vô tận để trở thành một mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$. Trong $\mathbf{A}^2$ ta chọn một mục tiêu afin và xét các điểm có tọa độ đối với mục tiêu đó như sau: $A_1 = (1,0), A_2 = (0,1), A_3 = (0,0)$ và $E = (1,1)$. Xem $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ là mục tiêu xạ ảnh của $\mathbf{P}^2$. Nếu một điểm M có tọa độ afin là (x_1, x_2) thì tọa độ xạ ảnh bằng bao nhiêu? Điểm vô tận của mỗi đường thẳng afin Δ sẽ có tọa độ xạ ảnh là bao nhiêu nếu cho biết phương trình của đường thẳng Δ đối với mục tiêu afin?

3.17. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hai điểm $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ phân biệt. Chứng tỏ rằng tọa độ của đường thẳng AB là:

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

3.18. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hai đường thẳng a và b khác nhau có tọa độ là (a_1, a_2, a_3) và (b_1, b_2, b_3).Chứng tỏ rằng hai đường thẳng đó cắt nhau tại một điểm và tọa độ giao điểm là:

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

3.19. Trong $\mathbf{P}^2$ cho ba điểm $A\left(a_1, a_2, a_3\right), B\left(b_1, b_2, b_3\right), C\left(c_1, c_2, c_3\right)$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3.20. Trong $\mathbf{P}^2$ có ba đường thẳng a, b, c lần lượt có tọa độ (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) và (c_1, c_2, c_3). Chứng minh điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng a, b, c đồng quy là:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3.21. Giải bài toán sau bằng phương pháp tọa độ: "Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$, cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng đường thẳng nối ba đỉnh AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi các giao điểm $AB \times A'B', BC \times B'C', AC \times A'C'$ thẳng hàng" (Định lý Desargues).

3.22. Trong $\mathbf{P}^2$ cho một tam giác ABC và một điểm S khác A, B, C. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng: AS và BC; BS và CA; CS và AB. Chứng minh rằng các điểm $AB \times A'B', BC \times B'C', AC \times A'C'$ thẳng hàng.

3.23. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho $\mathbf{P}$ là cái phẳng đi qua các đỉnh A_1, A_2, ..., A_m và điểm E của mục tiêu và Q là cái phẳng đi qua các đỉnh $A_{m+2}, \ldots, A_{n+1}$.

a) Lập phương trình tổng quát của $\mathbf{P}$ và $\mathbf{Q}$.

b) Xét vị trí tương đối của $\mathbf{P}$ và $\mathbf{Q}$.

c) Tìm số chiều của phẳng tổng $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$.

3.24. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho $\mathbf{P}^{n-1}$ là siêu phẳng đi qua n đỉnh đầu tiên của mục tiêu và gọi E' là giao điểm của đường thẳng $A_{n+1}E$ với siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$.

a) Chứng minh rằng $\{A_1, A_2, \ldots, A_n; E'\}$ là mục tiêu xạ ảnh trong $\mathbf{P}^{n-1}$.

b) Chứng minh rằng nếu điểm X thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ có tọa độ $(x_1, \ldots, x_n, 0)$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ trong $\mathbf{P}^n$ thì điểm đó có tọa độ đối với mục tiêu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n; E'\}$ trong $\mathbf{P}^{n-1}$ là $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

3.25. Trong $\mathbf{P}^2$ cho tam giác $A_1A_2A_3$ và một đường thẳng e không đi qua các đỉnh của tam giác đó. Chứng minh rằng luôn tồn tại một điểm E sao cho đối với mục tiêu $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ đường thẳng e có phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (đường thẳng e này được gọi là đường thẳng đơn vị).

3.26. Trong $\mathbf{P}^3$ cho hai đường thẳng có phương trình:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = 0, \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4 = 0. \end{cases}$$

Tìm điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng đó chéo nhau.

Tỷ số kép

3.27. Trong mặt phẳng xạ ảnh, với mục tiêu đã chọn, cho các điểm $A(1, 2, 0), B(2, 1, 1)$, $C(5, 4, 2)$.

a) Tính tỷ số kép (ABCD) biết rằng D có tọa độ $(4, 5, 1)$.

b) Tìm điểm M sao cho $(ABCM) = -1$.

3.28. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho 3 điểm A, B, C phân biệt và cùng nằm trên một đường thẳng. Chỉ bằng cách dựng các đường thẳng, hãy dựng điểm D sao cho $(ABCD) = -1$.

3.29. Trong mặt phẳng xạ ảnh, cho hai đường thẳng a, b phân biệt và một điểm $M \notin a, b$. Tìm quĩ tích những điểm N sao cho $(MNUV) =$

k không đổi, trong đó U, V là giao điểm của đường thẳng MN lần lượt với a và b.

3.30. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho hai đường thẳng phân biệt a, b và một điểm M không thuộc chúng. Hai đường thẳng m, m' biến thiên qua M cắt a và b lần lượt tại A, A' và B, B'. Tìm quĩ tích điểm $N = AB' \times A'B$.

3.31. Trên đường thẳng xạ ảnh cho 4 điểm A, B, C, D sao cho $(ABCD) > 0$. Chứng minh rằng có hai điểm P và Q sao cho $(ABPQ) = (CDPQ) = -1$.

3.32. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho tam giác $A_1A_2A_3$ và một đường thẳng không đi qua các đỉnh của nó. Ký hiệu $K_1 = d \times A_2A_3, K_2 = d \times A_3A_1, K_3 = d \times A_1A_2$. Giả sử L_1, L_2, L_3 là 3 điểm lần lượt nằm trên 3 đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Chứng minh rằng:

a) L_1, L_2, L_3 thẳng hàng khi và chỉ khi

$$(A_2A_3K_1L_1)\,(A_3A_1K_2L_2)\,(A_1A_2K_3L_3) = 1.$$

b) A_1L_1, A_2L_2, A_3L_3 đồng qui khi và chỉ khi

$$(A_2A_3K_1L_1)\,(A_3A_1K_2L_2)\,(A_1A_2K_3L_3) = -1.$$

Nguyên tắc đối ngẫu

3.33. Phát biểu khái niệm đối ngẫu của khái niệm hình bốn cạnh toàn phần và định lý đối ngẫu của Định lý 3.1.4.5 trong mặt phẳng xạ ảnh.

3.34. Trong $\mathbf{P}^2$ cho 4 đường thẳng a, b, c, d cùng đi qua một điểm O. Một đường thẳng không đi qua O cắt a, b, c, d lần lượt tại A, B, C, D thì tỉ số kép (ABCD) không phụ thuộc vào m. Hãy phát biểu mệnh đề đối ngẫu.

3.35. Phát biểu định lý đối ngẫu của định lý Pappus.

3.36. Phát biểu định lý đối ngẫu của định lý Desargues.

3.37. Phát biểu bài toán đối ngẫu của bài toán sau: "Trong mặt phẳng xạ ảnh, cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ sao cho AA', BB', CC'

đồng qui tại I, AB', BC', CA' đồng qui tại J. Chứng minh rằng các đường thẳng AC', BA', CB' cũng đồng qui tại một điểm".

Ánh xạ và biến đổi xạ ảnh

3.38. Cho f là phép biến đổi xạ ảnh trong $\mathbf{P}^n$ xác định bởi hai mục tiêu $\{A_i; E\}$ và $\{A';\ E'\}$ sao cho $f(A_i) = A'_i, i = 1, 2, \ldots, n+1$ và $f(E) = E'$. Chứng minh rằng nếu một điểm $X \in \mathbf{P}^n$ có tọa độ $(x_1, x_2, .., x_{n+1})$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ thì điểm $X' = f(X)$ cũng có tọa độ $(x_1, x_2, .., x_{n+1})$ đối với mục tiêu $\{A';\ E'\}$.

3.39. Chứng minh các tính chất sau:

a) Ánh xạ xạ ảnh biến $m-$phẳng thành $m-$phẳng.

b) Ánh xạ xạ ảnh bảo toàn tỉ số kép của 4 điểm.

3.40. Phép biến đổi xạ ảnh f trong $\mathbf{P}^2$ có phương trình đối với một mục tiêu cho trước là

$$\begin{cases} kx'_1 = 2x_2 + x_3 \\ kx'_2 = 2x_1 + x_3 \\ kx'_3 = 2x_1 + x_2 \end{cases}.$$

Tìm ảnh của điểm $M(0, 1, 2)$ và ảnh của đường thẳng d có phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ qua f.

3.41. Phép biến đổi xạ ảnh f trong $\mathbf{P}^1$ có phương trình đối với một mục tiêu cho trước là

$$\begin{cases} kx'_1 = x_1 + 2x_2 \\ kx'_2 = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}.$$

a) Tìm ảnh và nghịch ảnh của điểm $M(2, 1)$.

b) Tìm điểm kép của f.

3.42. Tìm phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f của $\mathbf{P}^n$ biến các đỉnh của mục tiêu $\{A_i; E\}$ thành chính nó.

3.43. Tìm phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f của $\mathbf{P}^n$ biến các đỉnh A_i của mục tiêu $\{A_i; E\}$ thành chính nó và biến các điểm của siêu phẳng $x_{n+1} = 0$ thành chính nó.

Chứng minh rằng mỗi phép biến đổi xạ ảnh như thế biến các đường thẳng đi qua điểm A_{n+1} thành chính nó.

3.44. Trong $\mathbf{P}^2$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình:

$$\begin{cases} kx'_1 = 4x_1 - x_2 \\ kx'_2 = 6x_1 - 3x_2 \\ kx'_3 = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}.$$

Hãy tìm các điểm kép và các đường thẳng bất biến qua f.

3.45. Tìm điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh sau đây:

$$\begin{cases} kx'_1 = & ax_1 + a_1x_{n+1} \\ kx'_2 = & ax_2 + a_2x_{n+1} \\ \dots & \\ kx'_{n+1} = & ax_{n+1} + a_{n+1}x_{n+1}. \end{cases}.$$

3.46. Trong $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu $\{A_i; E\}$ cho phép biến đổi xạ ảnh f xác định bởi $f(A_1) = A_3; f(A_2) = E; f(A_3) = A_1; f(E) = A_2$.

a) Viết phương trình của f đối với mục tiêu đã chọn.

b) Tìm các điểm kép của f.

c) Cho một điểm M tùy ý trong $\mathbf{P}^2$, gọi N là ảnh của M. Chứng minh rằng M là ảnh của N.

3.47. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh đã chọn $\{A_i; E\}$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình $k[x'] = B[x]$. Chứng minh rằng siêu phẳng có tọa độ $[a] = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ biến thành siêu phẳng có tọa độ $[a]B^{-1}$.

3.48. Trong $\mathbf{P}^2$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình

$$\begin{cases} kx'_1 = x_2 + x_3 \\ kx'_2 = x_1 + x_3 \\ kx'_3 = x_1 + x_2 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng f là một phép thấu xạ $0-$cặp. Xác định tâm và nền của nó.

3.49. Trong $\mathbf{P}^2$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình

$$\begin{cases} kx'_1 = x_2 - x_3 \\ kx'_2 = x_1 + x_3 \\ kx'_3 = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng f là một phép thấu xạ đơn đặc biệt. Xác định tâm và cơ sở của nó.

3.50. a) Chứng minh rằng trong $\mathbf{P}^2$ nếu một phép biến đổi xạ ảnh f có 3 điểm kép thẳng hàng thì nó là một phép thấu xạ.

b) Chứng minh rằng trong $\mathbf{P}^2$ nếu một phép biến đổi xạ ảnh f có 3 đường thẳng bất động đồng qui thì nó là một phép thấu xạ.

3.51. Trong $\mathbf{P}^2$ hãy lập phương trình của phép thấu xạ $0-$cặp, biết tâm thấu xạ là điểm $A_3(0,0,1)$ và nền thấu xạ có phương trình $x_3 = 0$.

Siêu mặt bậc hai

3.52. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho mục tiêu $\{A_i; E\}$.

a) Hãy lập phương trình của đường bậc hai đi qua A_1, A_2, A_3, E.

b) Chứng minh rằng có vô số đường bậc hai nói ở câu a) và với mỗi điểm M không nằm trên các đường thẳng A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3, A_1E, A_2E, A_3E bao giờ cũng có duy nhất đường bậc hai nói ở câu a) đi qua.

3.53. Hãy xác định loại của các đường bậc hai sau đây:

a) $4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$.

b) $2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$.

c) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$.

3.54. Với những giá trị nào của λ thì đường bậc hai sau đây suy biến:

$$x_1^2 - \lambda x_2^2 + (\lambda - 1)x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0.$$

3.55. Tìm giao của đường bậc hai:

$$2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0,$$

với các đường thẳng sau đây:

a) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

b) $x_1 = 5\lambda - \mu, x_2 = -3\mu, x_3 = -2\lambda + \mu, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3.56. Tìm giao của một siêu mặt bậc hai với một siêu phẳng trong không gian xạ ảnh.

3.57. Tập hợp $m + 1$ điểm độc lập của không gian xạ ảnh được gọi là một đơn hình m chiều, các điểm đó được gọi là các đỉnh của đơn hình.

a) Chứng minh rằng, đối với một siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}$ trong $\mathbf{P}^n$ ta luôn tìm được một đơn hình n chiều sao cho bất kỳ cặp đỉnh nào của nó cũng liên hợp với nhau đối với $\mathcal{S}$ (nó được gọi là đơn hình tự đối cực).

b) Chứng minh rằng, nếu lấy các đỉnh của một $n-$đơn hình tự đối cực đối với siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}$ trong $\mathbf{P}^n$ là các đỉnh của một mục tiêu thì phương trình của $\mathcal{S}$ đối với mục tiêu đó sẽ có dạng chính tắc

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_{n+1} x_{n+1}^2 = 0.$$

Sau đó chọn điểm đơn vị của mục tiêu một cách thích hợp, ta sẽ đưa được phương trình nói trên về dạng chuẩn tắc.

3.58. Trong mặt phẳng xạ ảnh, cho đường bậc hai $\mathcal{S}$:

$$2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0.$$

a) Viết phương trình đường thẳng đối cực của các điểm sau đây đối với $\mathcal{S}$:

$$A_1(1, 0, 0), A_2(0, 1, 0), A_3(0, 0, 1), E(1, 1, 1), M(2, -1, 5)$$

b) Tìm tọa độ cực điểm của đường thẳng

$$7x_1 + 4x_2 - 10x_3 = 0$$

đối với $\mathcal{S}$.

3.59. Trong mặt phẳng xạ ảnh, cho điểm $A(-1,2,1)$, đường thẳng $a : 2x_1 - x_2 - 9x_3 = 0$ và đường bậc hai $\mathcal{S}$

$$x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0.$$

Hãy tìm trên a điểm liên hợp với A đối với $\mathcal{S}$.

3.60. Trong không gian xạ ảnh cho siêu mặt bậc hai $\mathcal{S}$. Chứng minh rằng các siêu phẳng đối cực $\Pi_A, \Pi_B, \Pi_C, \ldots$ của các điểm $A, B, C, \ldots$ đối với S cùng đi qua một điểm I (không phải là điểm kỳ dị) khi và chỉ khi các điểm $A, B, C, \ldots$ nằm trên siêu phẳng đối cực Π_I của điểm I đối với $\mathcal{S}$.

3.61. Chứng minh rằng nếu 4 đỉnh của một hình 4 đỉnh toàn phần nằm (xem Bài tập 3.33) trên một đường bậc hai thì 3 điểm chéo của nó làm thành một tam giác tự đối cực đối với $\mathcal{S}$.

Từ đó suy ra cách dựng đường thẳng đối cực của điểm P cũng như cách dựng tiếp tuyến của $\mathcal{S}$ từ một điểm P mà chỉ dùng thước (P không thuộc $\mathcal{S}$).

3.62. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho một đường bậc hai $\mathcal{S}$ và một tam giác tự đối cực ABC đối với $\mathcal{S}$. Một đường thẳng m cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại P, Q, R (không trùng với các đỉnh của tam giác). Gọi P', Q', R' là các điểm tương ứng nằm trên BC, CA, AB và theo thứ tự liên hợp với P, Q, R đối với $\mathcal{S}$. Chứng minh rằng 3 đường thẳng AP', BQ', CR' đồng qui.

3.63. Trong mặt phẳng xạ ảnh, tam giác ABC được gọi là đối cực với tam giác $A'B'C'$ đối với đường bậc hai không suy biến $\mathcal{S}$ nếu $B'C', C'A', A'B$ ' lần lượt là đối cực của các điểm A, B, C đối với $\mathcal{S}$. Chứng minh rằng, khi đó $A'B'C'$ cũng là đối cực của tam giác ABC đối với S và các đường AA', BB', CC' đồng qui.

3.64. Trong mặt phẳng xạ ảnh, cho điểm $A(3,-2,2)$ và đường bậc hai $\mathcal{S}$:

$$3x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0.$$

Lập phương trình của các đường thẳng qua A và là tiếp tuyến của $\mathcal{S}$.

3.65. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho mục tiêu $\{A_i; E\}$. Lập phương trình của đường bậc hai đi qua A_2, A_3 và nhận A_1A_2, A_1A_3 làm các tiếp tuyến.

3.66. Trong mặt phẳng xạ ảnh, cho mục tiêu $\mathcal{R} = \{A_i; E\}$. Có thể viết phương trình các đường sau đây theo tọa độ không thuần nhất đối với $\mathcal{R}$ được không?

a) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

b) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$.

Nếu được thì hãy làm điều đó.

Liên hệ xạ ảnh giữa hai hàng điểm, giữa hai chùm đường thẳng và một số định lí cổ điển về đường bậc hai xạ ảnh

3.67. Cho $\{O\}\bar{\Lambda}_f\,\{O'\}$ và hai đường thẳng $a \not\ni O, a' \not\ni O'$. Xét ánh xạ $\overline{f} : a \to a'$ như sau: với $M \in a$ lấy $M' = \overline{f}(M) = f(OM) \times a'$.

a) Chứng minh $\{a\}\bar{\Lambda}_{\overline{f}}\,\{a'\}$.

b) Xác định vị trí của a và a' để $\overline{f}$ là phép phối cảnh.

3.68. Trong $\mathbf{P}^2$ cho liên hệ xạ ảnh f giữa hai hàng điểm m và m' và O, O' là hai điểm cố định không nằm trên m và m'. Xét ánh xạ $\overline{f}$: $\{0\} \to \{O'\}$ như sau: Với đường thẳng $d \in \{0\}, d \times m = M, M' = f(M)$. Ta đặt $\overline{f}(d) = O'M'$.

a) Chứng minh $\overline{f}$ là ánh xạ xạ ảnh giữa hai chùm $\{0\}$ và $\{0'\}$.

b) Với điều kiện nào thì $\overline{f}$ là phép phối cảnh.

3.69. Trong $\mathbf{P}^2$ cho conic $\mathcal{S}$ và hai đường thẳng phân biệt a, a' không cắt $\mathcal{S}$. A, B là hai điểm phân biệt, cố định trên conic $\mathcal{S}$. Ta xây dựng ánh xạ $f : a \to a'$ như sau: với $M \in a$, gọi giao điểm thứ hai của đường thẳng AM với $\mathcal{S}$ là X (nếu AM là tiếp tuyến thì ta lấy $X \equiv A$. Đặt $M' = f(M) = BX \times a'$ (nếu $X \equiv B$ thì lấy BX là tiếp tuyến tại B của $\mathcal{S}$).

a) Chứng minh f là ánh xạ xạ ảnh.

b) Tìm vị trí của a và a' để f là phép chiếu xuyên tâm.

3.70. Trong $\mathbf{P}^2$ một tam giác ABC có hai đỉnh A, B chạy trên hai đường thẳng a, b cố định và ba cạnh BC, CA, AB tương ứng đi qua ba điểm cố định α, β, γ không nằm trên a và b. Tìm quĩ tích đỉnh C.

3.71. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hai đường thẳng a, b và điểm A nằm trên a, điểm B nằm trên b, điểm P không nằm trên a và b. Một đường thẳng thay đổi qua P cắt a tại M, cắt b tại N. Tìm quỹ tích giao điểm K của AN và BM.

3.72. Trong $\mathbf{P}^2$ cho conic $\mathcal{S}$ và một đường thẳng d không cắt $\mathcal{S}$. A, B là hai điểm cố định trên $\mathcal{S}, X$ là một điểm biến thiên trên d. Ký hiệu M, N lần lượt là giao điểm thứ hai của AX và BX với $\mathcal{S}$ (nếu AX là tiếp tuyến với $\mathcal{S}$ thì lấy $M \equiv A, BX$ là tiếp tuyến với $\mathcal{S}$ thì lấy $N \equiv B$). Tìm quĩ tích $I = AN \times BM$.

3.73. Chứng minh rằng nếu hai tam giác ABC và KLM cùng nội tiếp một conic thì chúng cùng ngoại tiếp một conic nào đó.

3.74. Trong $\mathbf{P}^2$ cho tam giác ABC và conic S tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Ký hiệu $P = AB \times A'B', Q = AC \times A'C', R = PQ \times BC$. Chứng minh rằng B', C', R thẳng hàng.

3.75. Trong $\mathbf{P}^2$ cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp conic S. Các đường thẳng AB, BC, CD, DA tiếp xúc với S tương ứng tại M, N, P, Q. Ký hiệu $I = AP \times CQ, J = AN \times CM$. Chứng minh các điểm D, I, J, B thẳng hàng.

3.76. Trong $\mathbf{P}^2$ cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp một conic S. Gọi các tiếp điểm của CD với S là P và của CB với S là Q. Chứng minh các đường thẳng AC, BP, DQ đồng qui.

3.77. Trong $\mathbf{P}^2$ cho 4 đường thẳng a, b, c, d trong đó không có 3 đường nào đồng qui. S là một conic thay đổi luôn tiếp xúc với 4 đường thẳng đó. Gọi M là tiếp điểm của a với S, N là tiếp điểm của c với S. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

3.78. Trên conic cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D. Gọi giao điểm của các tiếp tuyến với conic tại A và C là I, giao điểm của AB và CD

là J. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BC và IJ đồng qui.

3.79. Trong $\mathbf{P}^2$ cho 4 điểm A, B, C, D, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Một conic $\mathcal{S}$ thay đổi luôn đi qua 4 điểm A, B, C, D. Gọi I là giao điểm của hai tiếp tuyến với $\mathcal{S}$ tại A và C. Chứng minh rằng I luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

3.80. Trong $\mathbf{P}^2$ cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. $\mathcal{S}$ là một conic biến thiên luôn đi qua 4 điểm đó. Tiếp tuyến $\mathcal{S}$ tại B cắt AC tại B'; tiếp tuyến của $\mathcal{S}$ tại C cắt BD tại C'. Chứng minh rằng đường thẳng $B'C'$ luôn đi qua một điểm cố định.

3.81. Trong $\mathbf{P}^2$ cho conic $\mathcal{S}$ và 6 tiếp tuyến khác nhau a, a', b, b', c, c'. Ký hiệu $A = a \times c, B = b \times c, A' = a' \times c', B' = b' \times c'$. Chứng minh rằng 3 điểm $P = a \times a', Q = b \times b', R = AB' \times BA'$ cùng nằm trên một đường thẳng.

Mô hình xạ ảnh của không gian afin

3.82. Xét bài toán afin sau: "Trong một tam giác 3 đường trung tuyến đồng qui". Hãy chuyển bài toán trên sang bài toán xạ ảnh.

3.83. Xét bài toán afin sau: "Trên các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lấy các điểm M, N, P tương ứng sao cho $(BCM)(CAN)(ABP) = 1$. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng" (định lý Menelaus). Hãy chuyển bài toán trên sang bài toán xạ ảnh.

3.84. Xét bài toán sau: "Trong mặt phẳng afin, cho hypebol H và một tiếp tuyến của H tại A cắt hai đường tiệm cận của H tại C, D. Chứng minh $AC = AD$". Hãy chuyển bài toán trên sang bài toán xạ ảnh và giải bài toán ấy.

3.85. Chuyển bài toán afin sau thành bài toán xạ ảnh tương ứng "Chứng minh rằng giao điểm của hai đường tiệm cận của một hypebol là trung điểm của dây cung tạo bởi một cát tuyến đi qua giao điểm đó với hypebol".

3.86. Chuyển bài toán afin sau thành bài toán xạ ảnh tương ứng:

"Chứng minh rằng giao điểm của hai đường chéo của một hình thang là trung điểm của đoạn thẳng tạo bởi đường thẳng đi qua giao điểm đó và song song với hai đáy cắt hai cạnh hình thang".

3.87. Cho bài toán xạ ảnh sau: "Trên conic trong $\mathbf{P}^2$ cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D. Gọi giao điểm của các tiếp tuyến tại A và C là I, giao điểm của AB và CD là J. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BC và JI đồng qui".

Phát biểu bài toán afin tương ứng với bài toán xạ ảnh trên trong không gian $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \backslash AC$.

3.88. Sử dụng mô hình xạ ảnh của mặt phẳng afin chứng minh định lý sau trong hình học afin: "Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ cho parabol $(\mathcal{P})$, chứng minh rằng mọi đường kính của $(\mathcal{P})$ có cùng một phương".

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Không gian afin

1.1. Ta có **C** với phép cộng hai số phức và phép nhân một số thực với số phức là một không gian vectơ thực hai chiều với cơ sở $\{1, i\}$. Do đó **C** là không gian afin thực hai chiều với cấu trúc afin chính tắc.

1.2. Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} \psi : \mathbf{B} \times \mathbf{B} &\to \overrightarrow{\mathbf{A}} \\ (M, N) &\mapsto \overline{f^{-1}(M) f^{-1}(N)} \end{aligned}.$$

Kiểm tra ψ thỏa mãn hai tiên đề về định nghĩa không gian afin.

1.3. Chứng minh trực tiếp $\left((\mathbf{A} \times \mathbf{A}'), \Phi, \overrightarrow{\mathbf{A}} \times \overrightarrow{\mathbf{A}'}\right)$ thỏa mãn hai tiên đề của một không gian afin.

1.4. b) Chứng minh trực tiếp $(\mathbf{A}/\overrightarrow{\alpha}, \Phi, \overrightarrow{\mathbf{A}}/\overrightarrow{\alpha})$ thỏa mãn hai tiên đề của một không gian afin.

1.5. Ta có thể định nghĩa phép toán trên **A** như sau để **A** là trở thành một không gian vectơ:

$$\begin{matrix} A + B := C \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \\ \lambda.A := B \Leftrightarrow \lambda \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \end{matrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Khi đó **A** là một không gian vectơ.

1.6. + Điều kiện cần: giả sử rằng hệ $m + 1$ điểm $A_0, A_1, \ldots, A_m$ là độc lập, O là điểm bất kì và

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA}_i = \vec{0} \text{ và } \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0\,(\lambda_i \in \mathbb{R})\,.$$

Từ hai đẳng thức trên ta có:

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA}_i - \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i\right) \overrightarrow{OA}_0 = \vec{0}$$

hay $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{A_0A}_i = \vec{0}$ Vì $A_0, A_1, \ldots, A_m$ là hệ điểm độc lập và $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$ suy ra $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = \lambda_0 = 0$.

+ Điều kiện đủ: Xét đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{A_0A}_i = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\overrightarrow{OA}_i - \overrightarrow{OA}_0\right) = \vec{0},\ O \text{ là điểm bất kỳ.}$$

hay

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA}_i - \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right) \overrightarrow{OA}_0 = \vec{0}.$$

Đặt

$$\lambda_0 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_m$$

Ta có

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA}_i = \vec{0} \text{ và } \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0.$$

Do đó $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = \lambda_0 = 0$. Suy ra hệ điểm $A_0, A_1, \ldots, A_m$ là độc lập.

1.7. Giả sử hệ điểm $M_0, M_1, \ldots, M_m$ là $m+1$ điểm độc lập, khi đó ta có hệ vectơ $\overrightarrow{M_0M}_1, \overrightarrow{M_0M}_2, \ldots, \overrightarrow{M_0M}_m$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Hệ điểm $M_0, M_1, \ldots, M_m, M_{m+1}$ là phụ thuộc nếu hệ vectơ $\overrightarrow{M_0M}_1$, $\overrightarrow{M_0M}_2$, ..., $\overrightarrow{M_0M}_{m+1}$ là hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính, tức là tồn tại

các số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{M_0M}_{m+1} = \lambda_1\overrightarrow{M_0M}_1 + \lambda_2\overrightarrow{M_0M}_2 + \ldots + \lambda_m\overrightarrow{M_0M}_m$ hay $\overrightarrow{OM}_{m+1} - \overrightarrow{OM}_0 = \lambda_1\left(\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{OM}_0\right) + \lambda_2\left(\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_0\right) + \ldots + \lambda_m\left(\overrightarrow{OM}_m - \overrightarrow{OM}_0\right)$ (với O là điểm tùy ý). Điều này tương đương với
$\overrightarrow{OM}_{m+1} = (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_m)\overrightarrow{OM}_0 + \lambda_1\overrightarrow{OM}_1 + \lambda_2\overrightarrow{OM}_2 + \ldots + \lambda_m\overrightarrow{OM}_m$.
Đặt $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_m$. Ta có:

$$\overrightarrow{OM}_{m+1} = \lambda_0\overrightarrow{OM}_0 + \lambda_1\overrightarrow{OM}_1 + \lambda_2\overrightarrow{OM}_2 + \ldots + \lambda_m\overrightarrow{OM}_m,$$

với $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$.

1.8. Công thức đổi mục tiêu từ mục tiêu thứ nhất sang mục tiêu thứ hai:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + \quad x_3' + a_1 \\ x_2 = x_1' + x_2' + \quad a_2 \\ x_3 = \quad x_2' + x_3' + a_3 \end{cases},$$

trong đó $E(a_1, a_2, a_3)$.

1.9. b) Ma trận chuyển từ cơ sở tương ứng mục tiêu (1) sang cơ sở tương ứng mục tiêu (2) là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Công thức đổi mục tiêu từ (1) sang (2) là:

$$[x] = A[x'] + [a_0]\,(*)$$

hay

$$\begin{cases} x_1 = x_1' & +1 \\ x_2 = -x_1' - x_2' & +1 \\ x_3 = -x_1' + x_2' - x_3' & +1 \end{cases}.$$

Ma trận chuyển từ cơ sở tương ứng mục tiêu (1) sang cơ sở tương ứng mục tiêu (3) là:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Công thức đổi mục tiêu từ (1) sang (3) là:

$$[x] = B\,[x''] + [a'_0]\,(**)$$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có: $A\,[x'] + [a_0] = B\,[x''] + [a'_0]$

$$\Leftrightarrow [x'] = A^{-1}B\,[x''] + A^{-1}\left([a'_0] - [a_0]\right)$$

Hay

$$\begin{cases} x'_1 = x''_1 + 2x''_2 + x''_3 + 1 \\ x'_2 = -2x''_1 - 2x''_2 - x''_3 + 1 \\ x'_3 = x''_1 - x''_2 - x''_3 \end{cases}.$$

Chú ý: Có thể tìm ma trận chuyển trực tiếp từ (2) sang (3) rồi viết công thức đổi mục tiêu.

1.10. Cho trước một mục tiêu afin, ta có mục tiêu thứ hai sao cho ma trận chuyển từ mục tiêu thứ nhất sang mục tiêu thứ hai là A^{-1} và điểm gốc của mục tiêu thứ hai có ma trận tọa độ cột đối với mục tiêu thứ nhất là $-A^{-1}[a]$. Khi đó công thức đổi mục tiêu từ mục tiêu thứ nhất sang mục tiêu thứ hai là:

$$[x] = A^{-1}[x'] - A^{-1}[a],$$

hay

$$[x'] = Ax + [x],$$

trong đó $[x], [x']$ tương ứng là ma trận tọa độ cột của một điểm đối với mục tiêu thứ nhất và mục tiêu thứ hai.

1.11. Sử dụng trong không gian vectơ m chiều tồn tại hệ m vectơ độc lập tuyến tính.

1.13. Với $\forall \vec{x} \in \overrightarrow{\alpha}, \exists M, N \in \alpha$ sao cho: $\overrightarrow{MN} = \vec{x}$. Giả sử $\vec{x}_{|\{\vec{e}_i\}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $M_{|\{O;\vec{e}_i\}} = \left(x_1^M, x_2^M, \ldots, x_n^M\right)$,
$N_{|\{O;\vec{e}_i\}} = \left(x_1^N, x_2^N, \ldots, x_n^N\right)$.

Ta có: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(x_1^N - x_1^M, x_2^N - x_2^M, \ldots, x_n^N - x_n^M\right)$.

$M, N \in \alpha$ nên

$$a_{i1}x_1^M + \ldots + a_{in}x_n^M + b_i = 0,\ i = 1, \ldots, m,$$
$$a_{i1}x_1^N + \ldots + a_{in}x_n^N + b_i = 0,\ i = 1, \ldots, m.$$

Trừ theo vế ta được:

$$a_{i1}\left(x_1^N - x_1^M\right) + \ldots + a_{in}\left(x_n^N - x_n^M\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

hay

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

1.16. Viết phương trình tổng quát từ phương trình tham số của các phẳng.

1.17. a) Cách 1. Hệ hai phương trình của MN và PQ vô nghiệm, nên $MN \cap PQ = \emptyset$. Mặt khác $\{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}\}$ độc lập tuyến tính nên hai đường thẳng MN và PQ chéo nhau.

Cách 2. Hệ $\{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{MP}\}$ độc lập tuyến tính nên 2 đường thẳng MN và PQ chéo nhau.

b) $PQ \cap \{x_1 = 0\} = \left\{A\left(0, -1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$, $PQ \cap \{x_2 = 0\} = \{B(1, 0, 0, 1)\}$ $PQ \cap \{x_3 = 0\} = \{C(1, 0, 0, 1)\}$ $PQ \cap \{x_4 = 0\} = \{D(-1, -2, -3, 0)\}$.

1.18. Các phẳng α và β đều song song với cái phẳng γ nên xảy ra một trong các trường hợp sau:

1) $\begin{cases} \overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\gamma} \\ \overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\gamma} \Rightarrow \alpha \cap \beta // \gamma.$

2) $\begin{cases} \overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\gamma} \\ \overrightarrow{\gamma} \subset \overrightarrow{\beta} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\alpha} \subset \overrightarrow{\gamma} \Rightarrow \alpha \cap \beta // \gamma$

3) $\begin{cases} \overrightarrow{\gamma} \subset \overrightarrow{\alpha} \\ \overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\gamma} \Rightarrow \alpha \cap \beta // \gamma.$

4) $\begin{cases} \overrightarrow{\gamma} \subset \overrightarrow{\alpha} \\ \overrightarrow{\gamma} \subset \overrightarrow{\beta} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{\gamma} \subset \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} \Rightarrow \alpha \cap \beta // \gamma$

1.19. Nếu hai trong ba siêu phẳng α, β và γ trùng nhau thì có ngay kết quả.

Giả sử α, β và γ là ba siêu phẳng phân biệt đôi một cắt nhau. Khi đó: $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\gamma}$ Suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\gamma}, \\ \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} \subset \overrightarrow{\beta} \cap \overrightarrow{\gamma}. \end{cases}$

Vì $\dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta}) = \dim(\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\gamma}) = \dim(\overrightarrow{\beta} \cap \overrightarrow{\gamma}) = n - 2$ nên $\overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\beta} \cap \overrightarrow{\gamma}$.

Do đó $\gamma \cap \alpha$ và $\gamma \cap \beta$ song song với nhau.

1.20. Giả sử $\beta \cap \alpha' = \emptyset$, Khi đó:

$$\begin{aligned}\dim(\beta + \alpha') &= \dim\beta + \dim\alpha' - \dim\left(\overrightarrow{\beta} \cap \overrightarrow{\alpha}'\right) + 1\\ &= \dim\beta + \dim\alpha - \dim(\overrightarrow{\beta} \cap \overrightarrow{\alpha}) + 1\\ &= \dim(\beta + \alpha) + 1 > n \quad \text{(mâu thuẫn).}\end{aligned}$$

1.21. Giả sử α và β song song với nhau và có số chiều lần lượt là m và l. Ta có

$$\begin{array}{rc} & \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\alpha} \\ \text{hoặc} & \overrightarrow{\alpha} \cap \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\beta} \end{array}.$$

Áp dụng công thức về số chiều của tổng $\alpha + \beta$ suy ra:

+ Nếu $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ thì $\dim(\alpha + \beta) = \max\{\mathrm{m}, \mathrm{l}\}$;

+ Nếu $\alpha \cap \beta = \emptyset$ thì $\dim(\alpha + \beta) = \max\{\mathrm{m}, \mathrm{l}\} + 1$.

1.22. Gọi G^* là tâm tỉ cự của hệ hai điểm G, G' gắn với họ hệ số

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i; \lambda' = \sum_{j=k+1}^{m} \lambda_j.$$

Ta có:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \overrightarrow{G^*G} + \left(\sum_{j=k+1}^{m} \lambda_j\right) \overrightarrow{G^*G'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \left(\overrightarrow{G^*P_i} - \overrightarrow{GP_i}\right) + \left(\sum_{j=k+1}^{m} \lambda_j\right) \left(\overrightarrow{G^*P_j} - \overrightarrow{G'P_j}\right) = \vec{0}.$$

Vì

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}; \sum_{j=k+1}^{m} \lambda_j \overrightarrow{G'P_j} = \vec{0}.$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{G^*P_i} = \vec{0}.$$

Do đó G^* trùng với G'', là tâm tỉ cự của hệ điểm $M_1, M_2, \ldots, M_m$ gắn với họ hệ số λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

1.23. $b), c)$ áp dụng bài 1.22.

1.24. a) Gọi $\{P_0, P_1, \ldots, P_m\}$ là $m+1$ đỉnh của đơn hình S. S' là $k-$mặt bên lập bởi $k+1$ đỉnh $\{P_0, P_1, \ldots, P_k\}$, S'' là $(m-k-1)-$mặt bên đối diện lập bởi $m-k$ đỉnh $\{P_{k+1}, \ldots, P_m\}$. Gọi α và β lần lượt là bao afin của S' và S''. Sử dụng công thức về chiều của $\alpha + \beta$ suy ra $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Vì hệ $P_0, P_1, \ldots, P_m$ độc lập nên $\overrightarrow{\alpha} \not\subset \overrightarrow{\beta}$ và $\overrightarrow{\beta} \not\subset \overrightarrow{\alpha}$, tức $\alpha \not\parallel \beta$. Do đó α và β chéo nhau.

b) Theo bài 1.20, các đường thẳng nối mỗi đỉnh với trọng tâm của biên đối diện đồng qui tại trọng tâm của hệ các đỉnh của đơn hình.

c) Từ bài 1.20 suy ra $(k+1)\overrightarrow{GG'} + (m-k)\overrightarrow{GG''} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{GG'} = \frac{k-m}{k+1}\overrightarrow{GG''} \Leftrightarrow (G'G''G) = \frac{k-m}{k+1}.$$

1.25. Chia hệ 4 điểm thành hai hệ, mỗi hệ 2 điểm. Sử dụng bài 1.20 ta thấy rằng các đường thẳng nói trong bài toán đồng quy tại trọng tâm của hệ 4 điểm đã cho.

1.26. Gọi $\overrightarrow{\alpha}$ là không gian con chứa phương của ba $m-$phẳng song song sao cho

$$\overrightarrow{A^n} = \overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{d'}.$$

Xét phép chiếu song song f từ A^n lên đường thẳng d' theo phương $\overrightarrow{\alpha}$. Khi đó f là ánh xạ afin, A', B', C' tương ứng là ảnh của A, B, C. Qua f tỉ số đơn của 3 điểm được bảo toàn, tức $(ABC) = (A'B'C')$. Thật vậy, giả sử $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{f}(k\overrightarrow{BC}) = k\overrightarrow{f}(\overrightarrow{BC}) \Rightarrow \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{B'C'}$, tức $(ABC) = k = (A'B'C')$.

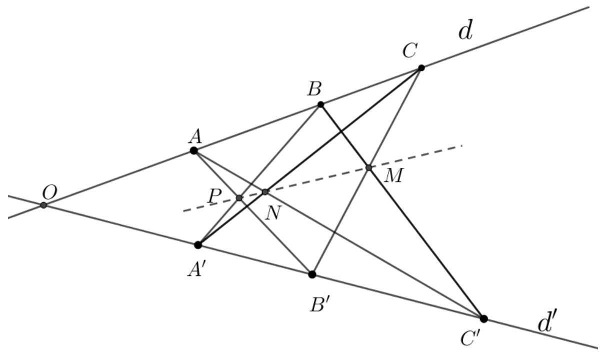
1.27. Xảy ra 2 khả năng: hoặc 3 đường A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 song song với nhau, hoặc 3 đường cắt nhau tại một điểm thuộc $(n-2)-$phẳng (giao của 3 siêu phẳng). Tương ứng với mỗi trường hợp, việc chứng minh tiếp theo là dễ dàng.

1.28. Biểu thị $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_i} + \overrightarrow{M_iM}$. Tiếp tục chứng minh $\overrightarrow{OM_i} = x_i\overrightarrow{OE_i}$, từ đó suy ra kết quả.

1.29. Chọn mục tiêu afin $\{O; A, A'\}$, ta có $O(0,0)$; $A(1,0)$; $A'(0,1)$; $B(b,0)$; $C(c,0)$; $B'(0,b)$; $C'(0,c')$, $b, c, b', c' \neq 0$. Khi đó phương trình của đường thẳng d là $x_2 = 0$ và phương trình của đường thẳng d' là $x_2 = 0$. Xác định tọa độ giao điểm P của AB' và $A'B$, tọa độ giao điểm N của AC' và $A'C$, tọa độ giao điểm M của BC' và $B'C$. Ta có

$$\frac{x_N - x_M}{x_P - x_M} = \frac{y_N - y_M}{y_P - y_M}.$$

Do đó $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ phụ thuộc tuyến tính, nên 3 điểm M, N, P thẳng hàng (Hình 3.34).



Hình 3.34

1.30. Chứng minh nếu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ là nghiệm của một phương trình hoặc một bất phương trình tuyến tính thì $\lambda (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (1 - \lambda) (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ cũng là nghiệm của phương trình hoặc bất phương trình này. Từ đó nghiệm của phương trình hay bất phương trình tuyến tính là tập lồi. Tiếp tục sử dụng giao các tập lồi là tập lồi suy ra kết quả.

Nhận xét. Tập điểm có tọa độ là nghiệm của một bất phương trình tuyến tính là một nửa không gian, theo trên suy ra nửa không gian là tập lồi.

1.31. Biểu thị mỗi tập dưới dạng giao các tập lồi như đối với bài trên.

Ánh xạ afin

1.32. Gọi $\overrightarrow{f}$ là ánh xạ nền của ánh xạ afin f, $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{A} \to \overrightarrow{A'}$.

a) Suy từ f là đơn ánh khi và chỉ khi $\overrightarrow{f}$ là đơn ánh, và $\overrightarrow{f}$ là đơn ánh khi và chỉ khi $\dim \overrightarrow{A} = \dim \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A})$.

b) Suy từ f là toàn ánh khi và chỉ khi $\overrightarrow{f}$ là toàn ánh, và $\overrightarrow{f}$ là toàn ánh khi và chỉ khi $\dim \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A}) = \dim \overrightarrow{A'}$.

1.33. Ánh xạ afin bảo toàn quan hệ cắt nhau, song song, biến đổi afin bảo toàn thêm quan hệ chéo nhau.

1.34. Xét phép thấu xạ tỉ số k có nền là $m-$phẳng α và phương $\overrightarrow{\beta}$. Khi đó ánh xạ

$$\begin{array}{c} \varphi : \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta} \to \overrightarrow{\alpha} \oplus \overrightarrow{\beta} \\ \vec{u} + \vec{v} \mapsto \vec{u} + k\overrightarrow{v} \end{array}.$$

là ánh xạ tuyến tính liến kết với phép thấu xạ.

1.35 c) +Lập phương trình của f (nói trong câu b) đối với mục tiêu $(*)$.

Cách 1: Phương trình có dạng

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \end{cases}. \qquad (**)$$

Trong đó (x_1, x_2) và (x'_1, x'_2) theo thứ tự là tọa độ của một điểm và của điểm ảnh đối với mục tiêu $(*)$. Do

$$A \mapsto A' \text{ nên ta có: } \begin{cases} a_{11} + b_1 = 2 \\ a_{21} + b_2 = 3 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$B \mapsto B' \text{ nên ta có: } \begin{cases} 2a_{12} + b_1 = -1 \\ 2a_{22} + b_2 = 4 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$$C \mapsto C' \text{ nên ta có: } \begin{cases} -3a_{11} + b_1 = -2 \\ -3a_{21} + b_2 = -1 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

Giải hệ phương trình tạo bởi 3 hệ (I), (II), (III) ta có:

$$a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{21} = 1, a_{22} = 1, b_1 = 1, b_2 = 2.$$

Thay vào $(**)$ ta có phương trình của f đối với mục tiêu $(*)$.

Cách 2: Từ $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$ tìm ma trận chuyển M từ cơ sở $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ liên kết của mục tiêu ban đầu sang cơ sở $\{\overrightarrow{f}(\vec{e}_1), \overrightarrow{f}(\vec{e}_2)\}$. Từ dạng phương trình $[x'] = M[x] + [a]$ khi $f(A) = A'$ tìm $[a]$.

+ Lập phương trình của f (nói trong câu b) đối với mục tiêu $\{A; B, C\}$.

Tọa độ của A' đối với mục tiêu $\{A; B, C\}$ là $\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{8}\right)$.

$$\overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{8}\overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{A'C'} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Vậy phương trình của f đối với mục tiêu $\{A; B, C\}$ là:

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + \frac{3}{2} \\ x'_2 = \frac{5}{8}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{8} \end{cases}.$$

1.36. Xét ánh xạ $\overrightarrow{f}$ có phương trình

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = 2x_1 + 2x_2 \end{cases}.$$

Dễ thấy $\overrightarrow{f}$ là đẳng cấu tuyến tính của $\overrightarrow{\mathbf{A}}^2$ nên f là phép biến đổi afin của $\mathbf{A}^2$.

Phương trình của f^{-1} là:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2 + 1 \\ x'_2 = -x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2} \end{cases}.$$

b) $f(M) = (5, 5), f^{-1}(M) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$.

c) Ảnh của d có phương trình: $x_1 - 4 = 0$. Tạo ảnh của d có phương trình: $13x_1 + 10x_2 - 14 = 0$.

1.37. a) Đường thẳng có phương bất biến đối với f có vectơ chỉ phương là vectơ riêng của $\overrightarrow{f}$. Phương trình của $\overrightarrow{f}$:

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 6x_2 \\ x_2' = 4x_1 + 9x_2 \end{cases}.$$

Các vectơ riêng của $\overrightarrow{f}$ là: $\vec{v}_1 = (-2, 1), \vec{v}_2 = (3, 4)$. Các đường thẳng có phương bất biến đối với f có phương trình đối với mục tiêu đã cho là: $x_1 + 2x_2 + a = 0$ và $4x_1 - 3x_2 + b = 0$; với a, b là các số tùy ý.

b) Tọa độ điểm kép $M(x_1, x_2)$ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 = 4x_1 + 6x_2 + 3 \\ x_2 = 4x_1 + 9x_2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + 1 = 0 .$$

Vậy toàn bộ các điểm thuộc đường thẳng $x_1 + 2x_2 + 1 = 0$ là điểm kép.

1.38. Vì f, f^{-1} là các phép afin, ta chỉ cần xét ảnh của đoạn thẳng và tập lồi là đủ. Sử dụng tính chất tỉ số đơn bảo toàn qua phép afin.

1.39. a) Trọng tâm tam giác ABC là điểm kép của phép afin f và là điểm kép duy nhất. Đường thẳng qua A và trung điểm BC gồm toàn điểm kép và chỉ có các điểm đó.

1.40. Giải tương tự bài 1.27. Phương trình của phép biến đổi afin $f : \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^3$:

+ Đối với mục tiêu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ là

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 - x_2 - x_3 + 4 \\ x_2' = -x_1 - 1 \\ x_3' = -x_1 - x_3 + 2 \end{cases}.$$

+ Đối với mục tiêu $\{A_0; A_1, A_2, A_3\}$ là

$$\begin{cases} x_1' = & 2x_2 + x_3 - 1 \\ x_2' = & -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2 \\ x_3' = & x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}.$$

1.41. $[x'] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

1.42. Xét ánh xạ tuyến tính $\varphi : \overrightarrow{\mathbf{A}}^n \to \overrightarrow{\mathbf{A}}^n$ biến hệ vectơ $\vec{e}_i, i = 1, 2, .., n$ tương ứng thành $\vec{0}, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Thế thì f là ánh xạ afin nhận φ là ánh xạ liên kết. Ảnh của f là siêu phẳng tọa độ qua O, có phương $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

1.43. Cách 1: Chứng minh ánh xạ $\overrightarrow{f}$ (ánh xạ liên kết của f) là ánh xạ đồng nhất trên $\overrightarrow{\mathbf{A}}^n$. Tiếp theo, với mọi $M \in \mathbf{A}^n$, gọi A là một điểm kép của f, khi đó:

$$\overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM} \Rightarrow f(M) = M.$$

Cách 2: Suy từ sự xác định duy nhất của ánh xạ afin.

1.44. f là phép chiếu song song thì $f \circ f = f$ là hiển nhiên. Ngược lại, từ điều kiện $f \circ f = f$ suy ra $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}$, chứng minh $\overrightarrow{\mathbf{A}}^n = \mathrm{Im}\overrightarrow{f} \oplus \mathrm{Ker}\overrightarrow{f}$. Lấy một điểm $P \in \mathbf{A}^n$ và $P' = f(P)$. Gọi α là phẳng qua P' có phương là $Im\overrightarrow{f}$. Thế thì f là phép chiếu song song lên α theo phương $\mathrm{Ker}\overrightarrow{f}$.

1.45. Sử dụng phép biến đổi tuyến tính luôn có không gian con 1 chiều hoặc 2 chiều bất biến, do đó phẳng qua điểm kép có phương bất biến là bất biến qua phép afin.

1.46. a) Tích phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} + \vec{v}$.

b) Phép tịnh tiến có ánh xạ liên kết là ánh xạ đồng nhất id, phép vị tự tỉ số k có ánh xạ liên kết là k.id. Do đó tích của chúng có ánh xạ liên kết là k.id. Lấy điểm I bất kỳ, khi đó xác định duy nhất điểm O thỏa mãn

$$\overrightarrow{IO} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{Ig \circ f(I)}.$$

Khi đó O là điểm kép và tích của hai phép sẽ là phép vị tự tâm O tỉ số k.

c) Thông qua ánh xạ tuyến tính liên kết của phép tích suy ra: nếu hai phép vị tự có tỉ số vị tự là nghịch đảo nhau thì tích của chúng là phép tịnh tiến, trong trường hợp trái lại, lý luận như câu b) suy ra tích hai phép là phép vị tự.

1.47. Xét mục tiêu $\{O; E_i\}$ có ảnh $\{O'; E_i'\}$. Khi đó $\overrightarrow{O'E_i'} = x_i\overrightarrow{OE_i}, i = 1, 2, \ldots, n$.

$\overrightarrow{E_i'E_j'} = \overrightarrow{O'E_j'} - \overrightarrow{O'E_i'} = x_j\overrightarrow{OE_j} - x_i\overrightarrow{OE_i} = k\overrightarrow{E_iE_j} = k\left(\overrightarrow{OE_j} - \overrightarrow{OE_i}\right)$

$\Rightarrow x_i = x_j, \forall i \neq j$.

Từ đó phương trình của phép afin có dạng

$$[x'] = k[x] + [a].$$

Khi $k = 1$, đó là phép tịnh tiến.

Khi $k \neq 1$, là tích của một phép vị tự tỉ số khác 1 và phép tịnh tiến, do đó cũng là phép vị tự (theo bài tập 1.47).

1.48. Hai hệ gồm 3 điểm độc lập hoặc 3 điểm phụ thuộc và có cùng tỉ số đơn.

1.49. Hai hình bình hành bất kỳ là tương đương afin. Hai hình thang bất kỳ nói chung không tương đương afin. Hai hình thang là tương đương afin khi và chỉ khi tỉ lệ giữa hai đáy trong hai hình thang là như nhau.

Siêu mặt bậc hai

1.50. Suy từ tính chất nghiệm của phương trình tìm tọa độ điểm kép.

1.51. Viết phương trình của d dưới dạng tham số và thay vào phương trình siêu mặt bậc hai tìm được các giao điểm là $(0, 0, 0)$ và $(1, 1, 1)$.

1.52. Chọn mục tiêu afin $\{0; E_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sao cho O, E_1, E_2, …, $E_n \in \alpha$. Khi đó α có phương trình

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0.$$

Giả sử $\mathcal{S}$ có phương trình đối với mục tiêu $\{O; E_i\}$ là:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_0 = 0.$$

Khi đó giao β của $\mathcal{S}$ và α có phương trình là:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_0 = 0, \\ x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

a) Nếu $a_{ij}(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ không đồng thời bằng 0 thì β là siêu mặt bậc hai trong α;

b) Nếu $a_{ij} = 0$ (với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, m$) và tồn tại $a_i \neq 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ thì β là siêu phẳng trong α;

c) Nếu $a_{ij} = 0$ (với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, m$) và $a_i = 0$, (với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$) suy ra $a_0 = 0$ (vì $\alpha \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$). Khi đó hệ (1) tương đương với $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$. Vậy $\beta \equiv \alpha$.

1.53. a) Tâm $I(0, 1, -2)$, điểm kì dị $I(0, 1, -2)$.

b) Tâm $I(0, k, k+1)$, với k tùy ý thuộc $\mathbb{R}$. Không có điểm kì dị.

c) Tâm $I(2, -1, 2)$. Không có điểm kì dị.

1.54. a) Siêu phẳng kính của S liên hợp với phương $\vec{e}$ có phương trình:

$$7x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

b) Phương trình siêu tiếp diện của $\mathcal{S}$ tại M là:

$$16x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3 = 0.$$

1.55. Vì điểm kì dị có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} A[x] + [a] = 0 \\ [a]^T[x] + a_0 = 0 \end{cases}. \tag{*}$$

Suy ra hạng của ma trận hệ số và ma trận hệ số bổ sung bằng nhau. Vì hạng của ma trận hệ số bé hơn hoặc bằng n nên ma trận hệ số bổ sung

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a_0 \end{bmatrix}$$

cũng có hạng bé hơn $n+1$. Vậy $\det\bar{\mathrm{A}} = 0$. Điều ngược lại không đúng vì $\det\bar{\mathrm{A}} = 0$ không suy ra hệ phương trình (*) có nghiệm.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Không gian vectơ Euclid

2.1. a) Kiểm tra trực tiếp 4 tiên đề của tích vô hướng đối với ξ.

b) $\{a, b\}$ là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^2$ đối với tích vô hướng ξ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \xi(a,a) = 1 \\ \xi(a,b) = 0 \\ \xi(b,b) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + a_1a_2 + \dfrac{a_2^2}{3} = 1 \\ a_1b_1 + \dfrac{a_1b_2 + a_2b_1}{2} + \dfrac{a_2b_2}{3} = 0. \\ b_1^2 + b_1b_2 + \dfrac{b_2^2}{3} = 1 \end{cases}$$

Từ (1) chọn $a_1 = 1, a_2 = 0$ thay vào (2) và (3) ta được:

$$\begin{cases} b_1 + \dfrac{b_2}{2} = 0 \\ b_1^2 + b_1b_2 + \dfrac{b_2^2}{3} = 1 \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được $b_1 = \pm\sqrt{3}, b_2 = \pm 2\sqrt{3}$. Ta có thể chọn cơ sở trực chuẩn $\{a, b\}$ với $a = (1, 0), b = (\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$.

2.2. Xây dựng ánh xạ $\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ cho bởi $\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. trong đó $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\,, \vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ là tọa độ của $\vec{a}, \vec{b}$ đối với cơ sở ε.

+ Kiểm tra φ là một tích vô hướng trên $\mathbf{V}$ và nhận ε là cơ sơ trực chuẩn.

+ Giả sử có một tích vô hướng ξ trên $\mathbf{V}$ cũng thỏa mãn điều kiện bài toán. Khi đó

$$\xi(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Suy ra $\varphi = \xi$.

2.4. a) Vận dụng Bổ đề 2.1.5.4, tính $\mathrm{Gr}\,(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ và kết luận.

b) Tính $\vec{u}\cdot\vec{v} = (\vec{a}_2 - \vec{a}_3)\,(2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 3\vec{a}_3)$ và sử dụng giả thiết $\vec{a}_1^2 = 1$, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = -1, \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = 0, \vec{a}_2^2 = 3, \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = 0, \vec{a}_3^2 = 2$. Suy ra $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5$.

c) Giả sử có cơ sở trực chuẩn để đối với nó các vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ nói ở câu b) có tọa độ $\vec{u} = (1, 0, 4), \vec{v} = (0, 0, -1)$. Suy ra

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1.0 + 0.0 + 4 \cdot (-1) = -4.$$

Điều này là vô lý vì theo câu b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5$.

2.5. a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

b) Gọi hai vectơ cần tìm là $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ và $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$. Tìm $\vec{c}$ từ điều kiện

$$\begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}.$$

Tiếp tục tìm $\vec{d}$ từ điều kiện

$$\begin{cases} \vec{d} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{d} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{d} \cdot \vec{c} = 0 \end{cases}.$$

2.6. a) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ là hệ trực giao.

b) $\mathbf{W}$ và $\mathbf{Z}$ là hai không gian con bù trực giao.

2.7. a) Từ

$$\cos\alpha_i = \frac{\vec{x} \cdot \vec{e}_i}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{e}_i\|} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j\right) \cdot \vec{e}_i}{\|\vec{x}\|} = \frac{x_i}{\|\vec{x}\|}.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

b) Suy từ câu a).

2.8. Hệ phương trình có hạng bằng 2, xác định một cơ sở $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ của không gian 2 chiều $\mathbf{W}$. Khi đó phương trình của $\mathbf{W}^{\perp}$ xác định bởi $\vec{x} \in \mathbf{W}^{\perp} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{a}_1 = 0, \vec{x} \cdot \vec{a}_2 = 0$.

Không gian Euclid

2.9. Suy từ $d^2(A, C) = \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \leq \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi B thuộc đoạn AC.

2.10. Phân tích các vectơ thành hiệu của các vectơ "chung gốc" (chẳng hạn $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$) rồi biến đổi.

2.11. Sử dụng Bài 2.9.

2.12. $\mathbf{P}$ bù vuông góc với $\mathbf{Q}$ nên $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}$ là một điểm. Sử dụng định lí về số chiều của tổng và giao các phẳng với lưu ý $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset$ và $\dim(\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}) = 0$ để suy ra $\dim(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = $ n.

2.13. Do sự tồn tại duy nhất của không gian $\overrightarrow{\mathbf{Q}} = \overrightarrow{\mathbf{P}}^{\perp}$ suy ra tồn tại duy nhất phẳng $\mathbf{Q}$ đi qua A và bù vuông góc với $\mathbf{P}$.

2.14. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên phẳng $\mathbf{P}$. Chứng minh H là điểm duy nhất thỏa mãn điều kiện bài toán.

2.15. Phân tích $[d(A,B)]^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\|^2$ với lưu ý $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$.

2.16. a) Vì phương trình của $\overrightarrow{\mathbf{P}}$ là $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ nên $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{P}$ khi và chỉ khi $\vec{v} \cdot \vec{x} = 0$. Suy ra $\vec{v} \perp \vec{x}$ với mọi $\vec{x} \in \overrightarrow{\mathbf{P}}$. Hay $\vec{v} \perp \overrightarrow{\mathbf{P}}$.

b) Đường thẳng cần lập đi qua $M\,(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ và nhận $\vec{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ làm vectơ chỉ phương.

2.17. Vectơ $\vec{v}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là vectơ pháp tuyến của $\mathbf{P}$ nên phương trình của $\mathbf{P}$ có dạng: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0$. Sử dụng giả thiết $M\,(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbf{P}$ suy ra phương trình của $\mathbf{P}$ là

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - \left(a_1x_1^0 + a_2x_2^0 + \ldots + a_nx_n^0\right) = 0.$$

2.18. - Lập phương trình của siêu phẳng $\mathbf{P}$ đối với mục tiêu $\{O;$ $E_1,$ $E_2,$ $\ldots,$ $E_n\}$. Xác định tọa độ trọng tâm G đối với mục tiêu $\{O; E_1, E_2, \ldots, E_n\}$. Chứng minh $\overrightarrow{OG}$ là vectơ pháp tuyến của $\mathbf{P}$.

- Tương tự, lập phương trình của siêu phẳng $\mathbf{P}$ đối với mục tiêu $\{O'; E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, xác định tọa độ trọng tâm G đối với mục tiêu $\{O'; E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ và chứng minh $\overrightarrow{O'G}$ là vectơ pháp tuyến của $\mathbf{P}$. Từ đó suy ra OO' trực giao với $\mathbf{P}$ và cắt $\mathbf{P}$ tại trọng tâm G của đơn hình đó.

2.19. Lập phương trình tổng quát của các phẳng $\mathbf{P}$ và $\mathbf{Q}$. $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}$ là phẳng có phương trình được xác định bởi hệ gồm các phương trình của **P** và **Q**.

2.20. a) Xét phương trình của $\overrightarrow{\mathbf{P}}$ là:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n-m).$$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \overrightarrow{\mathbf{P}} \Leftrightarrow \vec{a}_k \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i = 0$. Suy ra $\vec{a}_k \perp \vec{x}$ với mọi $\vec{x} \in \overrightarrow{\mathbf{P}}$ hay $\overrightarrow{\mathbf{P}}$ trực giao với các vectơ $\vec{a}_k\,(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})\,, (k = 1, 2, \dots, n-m)$.

b) Vì $\overrightarrow{\mathbf{P}}$ trực giao với các vectơ $\vec{a}_k\,(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})\,, (k = 1, 2, \dots, n-m)$ và **Q** bù trực giao với **P** nên $\vec{a}_k \in \overrightarrow{\mathbf{Q}}$.

Hạng $(a_{kj})_{(n-m)\times n} = n-m$ nên hệ $\{\vec{a}_k\}$ $(k = 1, 2, \dots, n-m)$ độc lập tuyến tính. Mặt khác dim$\mathbf{Q} = n-m$ nên hệ vectơ $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots,$ $\vec{a}_{n-m}\}$ là một cơ sở của $\overrightarrow{\mathbf{Q}}$.

c) Lập phương trình của phẳng **Q** từ điều kiện đi qua $A\,(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ và hệ vectơ $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{n-m}\}$ là cơ sở của $\overrightarrow{\mathbf{Q}}$.

2.23. Từ phương trình của **P** ta có một hệ vectơ pháp tuyến của **P**, là cơ sở của $\overrightarrow{\mathbf{P}}^{\perp}$. Tương tự, có cơ sở của $\overrightarrow{\mathbf{Q}}^{\perp}$. Kiểm tra trực tiếp cho thấy $\overrightarrow{\mathbf{P}}^{\perp}$ và $\overrightarrow{\mathbf{Q}}^{\perp}$ là bù trực giao, từ đó $\overrightarrow{\mathbf{Q}}^{\perp} = \overrightarrow{\mathbf{P}}$ và $\overrightarrow{\mathbf{P}}^{\perp} = \overrightarrow{\mathbf{Q}}$. Điều này cho thấy **P** trực giao **Q**.

2.24. c) Hệ phương trình xác định $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}$ có hạng bằng 4, do đó $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}$ là một đường thẳng.

2.26. a) Vì $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\}$ độc lập tuyến tính nên $\dim(P+d) = 4$, do đó P và d chéo nhau.

b) - Xác định phương $\vec{x}$ của đường vuông góc chung của **P** và d: $\vec{x} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{x} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{x} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$. Gọi α là $2-$phẳng đi qua D có phương $\overrightarrow{DE}$ và $\vec{x}$. Gọi β là $3-$phẳng đi qua A có phương là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\vec{x}$. Khi đó $\Delta = \alpha \cap \beta$ là đường vuông góc chung của P và d.

- Sử dụng công thức tính khoảng cách giữa hai phẳng để tính độ dài đoạn vuông góc chung.

2.28. Lập phương trình của siêu phẳng **P** và sử dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến siêu phẳng.

Ánh xạ đẳng cự

2.29. + Điều kiện cần. Hiển nhiên.

+ Điều kiện đủ. Sử dụng điều kiện $d\left(A_i, A_j\right) = d\left(A'_i, A'_j\right), \forall i, j = 0, 1, \ldots, n \Leftrightarrow \overrightarrow{A_iA_j}^2 = \overrightarrow{A'_iA'_j}^2$ suy ra $\overrightarrow{A_0A_i} \cdot \overrightarrow{A_0A_j} = \overrightarrow{A'_0A'_i} \cdot \overrightarrow{A'_0A'_j}$. Do đó $\overrightarrow{f}$ là ánh xạ tuyến tính trực giao.

2.30. Hai hệ điểm $A_0, A_1, \ldots, A_n$ và $A'_0, A'_1, \ldots, A'_n$ là độc lập nên tồn tại duy nhất phép afin $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ sao cho $f\left(A_i\right) = A'_i$ và theo Bài 2.29, f là đẳng cự.

2.31. Do f không phải là phép đồng nhất nên nếu điểm $X \notin \alpha$ thì $f(X) \neq X$. Giả sử $f(X) = X', H$ là chân đường vuông góc hạ từ X xuống $\alpha, f(H) = H$. Sử dụng tính chất phép đẳng cự suy ra $X'H \perp \alpha$ và $HX = HX'$. Vì $X \neq X'$ nên X' đối xứng X qua α.

2.32. Xét phép quay f trong $\mathbf{E}^2$ có tâm O. Lấy điểm $A \neq O$ và $A' = f(A)$. Gọi I là trung điểm của AA', f_1 là phép đối xứng qua đường thẳng OA, f_2 là phép đối xứng qua đường thẳng OI. Khi đó $f = f_2 \circ f_1$.

2.33. Xét các trường hợp f có điểm bất động và f không có điểm bất động.

Trường hợp 1: f có điểm bất động. Chọn mục tiêu thích hợp có gốc là điểm bất động và ma trận của f là ma trận trực giao có dạng chính tắc, giả sử ma trận này có p số $1, q$ số -1 và k ma trận khối cấp 2 trên đường chéo $(p + q + 2k = n)$. Khi đó f là tích của q phép đối xứng qua siêu phẳng và k phép quay quanh $(n-2)$-phẳng, Vì mỗi phép quay phân tích được thành tích của hai phép đối xứng qua siêu phẳng nên f phân tích được thành tích của $q + 2k \leq n$ phép đối xứng qua siêu phẳng.

Trường hợp 2: f không có điểm bất động. Lấy một điểm A và $A' = f(A)$. Gọi f_2 là phép đối xứng qua siêu phẳng trung trực của AA'. Đặt $f_1 = f_2^{-1} \circ f$. Khi đó A là điểm bất động của f_1 và

$f = f_2 \circ f_1$. Kết hợp trường hợp đầu suy ra f phân tích được thành tích của không quá $n+1$ phép đối xứng qua siêu phẳng.

2.34. Với $X(x_i) \in \mathbf{E}^n$ và $X'(x_i') = f(X)$. Sử dụng điều kiện $\overrightarrow{XX'} = k\vec{n}$ và trung điểm I của XX' thuộc α để tìm mối liên hệ của (x_i) và (x_i'). Phương trình phép đối xứng là

$$x_i' = x_i - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0\right) \cdot a_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

2.36. Từ giả thiết f không có điểm bất động suy ra có $\vec{v} \neq \vec{0}$ để $\overrightarrow{f}(\vec{v}) = \vec{v}$.

- $f = t_{\vec{v}} \circ g$, trong đó g có điểm bất động A.

- Đường thẳng Δ qua A với phương $\vec{v}$ là đường thẳng bất động đối với f.

2.37. Giả sử $f(I) = I', f(I') = I''$. Vì f là phép đẳng cự nên $II' = I'I'' = r$. Khi đó I, I', I'' thẳng hàng. Giả sử I, I', I'' trái lại, I'' thuộc đường tròn tâm I' bán kính r. Lấy M là trung điểm của II', khi đó $M' = f(M)$ là trung điểm của $I'I''$. Ta có $MM' = \dfrac{1}{2}II'' < r$. Suy ra $MM' < II'$ (mâu thuẫn). Do đó I, I', I'' thẳng hàng, hay đường thẳng II' bất động.

2.38. Chứng minh bằng phản chứng:

- Nếu hai đường thẳng bất động cắt nhau tại I thì I là điểm bất đông (vô lý).

- Nếu hai đường thẳng bất động chéo nhau. Khi đó đường vuông góc chung của 2 đường thẳng có ảnh cũng là đường vuông góc chung của 2 đường thẳng đó nên nó cũng là đường thẳng bất động. Vì vậy có 2 đường thẳng bất động cắt nhau, vô lý.

2.39. Lập biểu thức tọa độ của $f \circ t_{\vec{v}} \circ f^{-1}$ và $t_{\overrightarrow{f}(\vec{v})}$.

2.40. Chọn mục tiêu trực chuẩn $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ trong đó O là giao của 3 đường thẳng, $\vec{e}_1$ thuộc phương của a, $\vec{e}_2$ thuộc phương của b, $\vec{e}_3$ thuộc phương của c. Phép đẳng cự trong $\mathbf{E}^3$ biến P thành P nếu: $O \mapsto O, \vec{e'}_1 = \overrightarrow{f}(\vec{e}_1), \vec{e'}_2 = \overrightarrow{f}(\vec{e}_2), \vec{e'}_3 = \overrightarrow{f}(\vec{e}_3) \in \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, -\vec{e}_1,$

$-\vec{e}_2, -\vec{e}_3\}$ và $\left\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3\right\}$ cũng là cơ sở trực chuẩn. Có 6 khả năng chọn trước $\vec{e'}_1$, từ đó có 4 khả năng chọn $\vec{e'}_2$ và tiếp theo có 2 khả năng cho $\vec{e'}_3$. Vậy số khả năng để lấy cơ sở trực chuẩn $\left\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3\right\}$, tức số phép đẳng cự để biến P thành chính nó, là $6.4.2 = 48$.

2.41. Hình lập phương biến thành chính nó khi và chỉ khi biến tập hợp 3 đường thẳng đôi một vuông góc, là các đường thẳng nối tâm của các mặt đối diện, thành chính tập đó. Theo Bài 2.40 có tất cả 48 phép đẳng cự.

2.42. Tương tự Bài 2.40 với chú ý phép đẳng cự biến trục lớn thành trục lớn và trục bé thành trục bé.

2.43. Sử dụng tương đương afin chứng minh bài toán trong trường hợp tam giác là đều. Khi đó 3 đường chéo lục giác nằm trên 3 đường cao của tam giác đều.

2.44. Sử dụng tương đương afin chứng minh kết quả trong trường hợp tam giác đều.

2.45. Xét ánh xạ liên kết $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathbf{E}}^n \to \overrightarrow{\mathbf{E}}^n, \vec{x} \mapsto \vec{x'}$. Khi đó: $||\vec{x'}|| = k||\vec{x}||$. Suy ra $\mathrm{Inv}\overrightarrow{f} = \{\vec{0}\}$. Do đó f có điểm bất động duy nhất.

2.46. Xét phép đồng dạng $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ với tỉ số $k \neq 1$. Gọi I là điểm bất động của $f, f_2 = V_I^k$ là phép vị tự tâm I tỉ số k. Khi đó $f_1 = f \circ (f_2)^{-1}$ là phép đẳng cự và $f = f_2 \circ f_1$.

2.47. Theo Bài 2.46, $f = f_2 \circ f_1$ với f_2 là phép vị tự và f_1 là phép dời có điểm bất động trong $\mathbf{E}^2$, tức f_1 là phép quay.

Siêu mặt bậc hai trong không gian Euclid

2.48

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} = 1$$

$\mathcal{S}$ là elip.

2.49

$$\frac{Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + \frac{Z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1$$

$\mathcal{S}$ là trụ eliptic

2.50. Đưa $\mathcal{S}$ về dạng chính tắc

$$(1+\alpha)X^2 + (1-\alpha)Y^2 = 1.$$

Nếu $\alpha = 1$ hoặc $\alpha = -1$ thì $\mathcal{S}$ là cặp đường thẳng. Nếu $\alpha > 1$ hoặc $\alpha < -1$ thì $\mathcal{S}$ là hypebol Nếu $-1 < \alpha < 1$ thì $\mathcal{S}$ là elip.

2.51. Sử dụng Bài 2.49.

2.52. Dùng tương đương afin.

2.53. Dùng tương đương afin.

2.54. Biến đổi phương trình của S đưa về dạng

$$(2x+y)(y+2z-2) = 0.$$

2.55. Ký hiệu

$$\lambda = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.$$

- Nếu $\lambda \neq 0$ thì tập hợp các điểm M là siêu cầu tổng quát;

- Nếu $\lambda = 0$ thì tập hợp các điểm M là siêu phẳng.

2.56. Xét khoảng cách từ tâm siêu cầu đến siêu phẳng α.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Không gian xạ ảnh

3.3. Lấy mục tiêu $\{O; \vec{e}_i\}$ với gốc O là điểm cố định. Gọi $\mathbf{V}^n$ là không gian liên kết của $\mathbf{A}^n$, ta có song ánh từ tập các không gian con 1 chiều của $\mathbf{V}^n$ với tập các siêu phẳng của $\mathbf{A}^n$ đi qua O.

3.4. Sử dụng kết quả hai không gian con 2 chiều trong không gian vectơ 3 chiều giao nhau khác vectơ 0.

3.5. Suy từ không gian con liên kết với m-phẳng chứa trong không gian con liên kết của $p-$phẳng.

3.6. b) Lấy D với $[D] = [A] + [B] + [C]$.

3.7. Hệ 3 điểm A'_1, A'_2, A'_3 độc lập và xét mục tiêu $\{A'_1, A'_2, A'_3; E'\}$ có cơ sở đại diện là

$$\vec{e'}_1 = (0, 2, 2), \vec{e'}_2 = (2, 0, 1), \vec{e'}_3 = (1, 1, 0).$$

Ma trận chuyển từ $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ sang $\{A'_1, A'_2, A'_3; E'\}$ là

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.8. a) Phương trình tổng quát của $m-$phẳng đi qua $m + 1$ đỉnh đầu tiên của mục tiêu:

$$x_{m+2} = \ldots = x_{n+1} = 0.$$

b) Phương trình tổng quát của $m-$phẳng đi qua $m + 1$ điểm cuối của mục tiêu:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-m+1}.$$

c) Phương trình tổng quát của siêu phẳng đi qua tất cả các đỉnh của mục tiêu trừ đỉnh thứ k:

$$x_k = 0.$$

3.9. Dễ thấy phương trình siêu phẳng β có dạng đã nêu chứa α. Ngược lại, siêu phẳng β có phương trình $c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_{n+1}x_{n+1} = 0$ chứa α thì ma trận lập nên từ các hệ số các phương trình của α và β có hạng bằng 2, vì nếu hạng bằng 3 thì giao của α và β là $(n-3)-$phẳng (do không gian liên kết của phẳng có chiều là $n-2$). Từ đó

$$(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}) = p\,(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) + q\,(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1})\,, p, q \neq 0.$$

3.10. Đường thẳng cần lập là giao tuyến của hai mặt phẳng qua M tương ứng chứa d_1, d_2.

3.11. Giao hai phẳng có không gian liên kết là giao các không gian liên kết của các phẳng. Tổng hai phẳng có không gian liên kết là tổng các không gian kiên kết của hai phẳng, áp dụng công thức về chiều của tổng hai không gian vectơ con suy ra kết quả.

3.12. Điều kiện cần và đủ để hai phẳng chéo nhau là $r+s=q-1$ trong đó $q = \dim\left(\mathbf{P}^{\mathrm{r}} + \mathbf{P}^{\mathrm{s}}\right)$.

3.13. Tổng của $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ liên kết với tổng của $\mathbf{V}^{r+1}$ và $\mathbf{V}^{s+1}$ ($\mathbf{V}^{r+1}$ liên kết với $\mathbf{P}^r, \mathbf{V}^{s+1}$ liên kết với $\mathbf{P}^s$).
Ký hiệu $\mathbf{R} = \{X \in MN, M \in \mathbf{P}^r, N \in \mathbf{P}^s\}$. Ta có $\mathbf{R} \subset \mathbf{P}^r + \mathbf{P}^s$ (vì $M \in \mathbf{P}^r, N \in \mathbf{P}^s$ nên $MN \subset \mathbf{P}^r + \mathbf{P}^s$).

Ngược lại, nếu $X \in \mathbf{P}^r + \mathbf{P}^s$ thì X có vec tơ đại diện $\vec{x} \in \mathbf{V}^{r+1} + \mathbf{V}^{s+1}, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}, \vec{y} \in \mathbf{V}^{r+1}, \vec{z} \in \mathbf{V}^{s+1}$. Gọi M là điểm có vec tơ đại diện là $\vec{y}, N$ là điểm có vec tơ đại diện là $\vec{z}$, thế thì $M \in \mathbf{P}^r, N \in \mathbf{P}^s$, do đó $X \in MN \subset \mathbf{R}$, từ đó $\mathbf{P}^r + \mathbf{P}^s \subset \mathbf{R}$. Vậy $\mathbf{R} = \mathbf{P}^r + \mathbf{P}^s$.

3.14 a) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$;

b) $(5, -5, -3)$.

3.15. a) $(x_1, x_2, 1)$ (vectơ đại diện cho X là $\vec{x} = \overrightarrow{OX} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$).

b) $(x_1, x_2, 0)$.

3.16. Nếu xét mục tiêu $\{A'_1, A'_2, A_3; E\}$ trong đó A'_1 là điểm vô tận của đường thẳng A_3 A_1, A_2 là điểm vô tận của đường thẳng A_3A_2 thì một điểm có tọa độ afin là (x_1, x_2) sẽ có tọa độ đối với mục tiêu $\{A'_1, A'_2, A_3; E\}$ là $(x_1, x_2, 1)$, ta tìm tọa độ của điểm đối với mục tiêu $\{A_1, A_2, A_3; E\}$. Đối với $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ tọa độ $A'_1 = A_3A_1 \times A_2E = (1, 0, 1); A'_2 = A_3A_2 \times A_1E = (0, 1, 1)$. Công thức đổi tọa độ từ $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ sang $\{A'_1, A'{}_2, A_3; E\}$ là

$$k[x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} [x'] \, .$$

Từ đó, thay tọa độ $[x']$ là $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$, ta có tọa độ của điểm đối với mục tiêu $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ là

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{bmatrix} .$$

Nếu đường thẳng afin có phương trình là $ax_1 + bx_2 + c = 0$, đường thẳng xạ ảnh bổ sung thêm điểm vô tận có phương trình đối với mục tiêu $\{A'_1, A'{}_2, A_3; E\}$ là $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. Do đó tọa độ điểm vô tận, tức điểm giao của đường thẳng này với đường thẳng vô tận có phương trình $x_3 = 0$ là $(b, -a, 0)$. Vì vậy đối với mục tiêu $\{A_1,\ A_2,\ A_3; E\}$ tọa độ điểm vô tận này là $(b, -a, b - a)$.

3.17. Thay tọa độ của A, B vào phương trình tổng quát của siêu phẳng (đường thẳng), từ đó tìm được các hệ số của phương trình như trên.

3.18. Giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất cho nghiệm là tọa độ của giao điểm như trên.

3.19. 3 điểm thẳng hàng khi và chỉ khi 3 vectơ đại diện có tọa độ của điểm là phụ thuộc tuyến tính.

3.20. Suy từ 3 đường đồng qui khi và chỉ khi hệ phương trình có nghiệm.

3.21. Bằng phương pháp tọa độ, sử dụng bài 3.19, 3.20.

3.22. Sử dụng định lý Desargues đối với hai tam giác ABC và $A'B'C'$.

3.23 a) $\mathbf{P} : \begin{cases} x_{m+1} - x_{m+2} = 0 \\ \ldots \\ x_{m+1} - x_{n+1} = 0 \end{cases}$; $\mathbf{Q} : x_1 = x_2 = \ldots = x_{m+1} = 0.$

b) $\mathbf{P}$ và $\mathbf{Q}$ chéo nhau.

c) $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{P}^n \Rightarrow \dim(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = $ n.

3.24. Gọi cơ sở đại diện của mục tiêu $\{A_i; E\}$ trong $\mathbf{P}^n$ là $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$. Giao điểm E' có tọa độ là $(1, 1, \ldots, 1, 0)$ và $\{A_1, A_2, \ldots, A_n; E'\}$ là mục tiêu trong $\mathbf{P}^{n-1}$ với cơ sở đại diện là $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Từ đó suy ra a) và dễ dàng suy ra b).

3.25. Giả sử đối với một mục tiêu $\{A_1, A_2, A_3; E'\}$ phương trình của e là $ax'_1 + bx'_2 + cx'_3 = 0$. Vì e không đi qua các đỉnh của tam giác $A_1A_2A_3$ nên $a, b, c \neq 0$. Lấy E có tọa độ đối với $\{A_1, A_2, A_3; E'\}$ là $(1/a, 1/b, 1/c)$. Công thức đổi mục tiêu $\{A_1, A_2, A_3; E'\}$ sang mục tiêu $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ là

$$k\,[x'] = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix} [x]$$

tức $x_1 = ax'_1, x_2 = bx'_2, x_3 = cx'_3$. Do đó ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ là phương trình của e đối với mục tiêu $\{A_1, A_2, A_3; E\}$.

3.26. Điều kiện là hệ phương trình thuần nhất gồm 4 phương trình chỉ có nghiệm tầm thường, tức ma trận hệ số là không suy biến.

Tỷ số kép

3.27. a) $(ABCD) = 4$.

b) $M(3, 0, 2)$.

3.28. Sử dụng tính chất của hình 4 cạnh toàn phần.

3.29. Ký hiệu $O = a \times b, m = OM$. Lấy đường thẳng d đi qua O sao cho $(mdab) = k$. Thế thì quĩ tích của N là đường thẳng d (trừ điểm O).

3.30. Ký hiệu $O = a \times b, m = OM$. Áp dụng tính chất của hình 4 cạnh toàn phần ta có quĩ tích của N là đường thẳng d đi qua O sao cho $(abmd) = -1$.

3.31. Trên đường thẳng xạ ảnh AB ta chọn mục tiêu $\{A, B; C\}$. Khi đó $A(1,0), B(0,1)$, $C(1,1), D(1,d)$ với $d > 0$ và $d \neq 1$. Gọi tọa độ của các điểm P, Q cần tìm là $P(1,p), Q(1,q)$. Thay các tọa độ này vào các biểu thức của tỉ số kép đã cho và giải phương trình, ta tìm được một cặp điểm là $(1, \sqrt{d}), (1, -\sqrt{d})$.

3.32. Giải bằng phương pháp tọa độ. Chọn mục tiêu $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ sao cho $d(1,1,1)$. Khi đó $L_1\left(0, a_1, a_2\right), L_2\left(b_1, 0, b_2\right), L_3\left(c_1, c_2, 0\right)$. Ta có

$$\left(A_2 A_3 K_1 L_1\right)\left(A_3 A_1 K_2 L_2\right)\left(A_1 A_2 K_3 L_3\right) = -\frac{a_1 b_2 c_1}{a_2 b_1 c_2}.$$

Tiếp theo, sử dụng điều kiện thẳng hàng của 3 điểm và điều kiện đồng qui của 3 đường thẳng khi biết tọa độ.

Ánh xạ và biến đổi xạ ảnh

3.38. Giả sử mục tiêu $\{A_1, A_2, \ldots A_{n+1}; E\}$ có cơ sở đại diện $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ và mục tiêu ảnh $\left\{A'_1, A'_2, \ldots A'_{n+1}; E'\right\}$ có cơ sở đại diện là $\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_{n+1}\}$. Gọi φ là ánh xạ đại diện của ánh xạ xạ ảnh f. Khi đó $\varphi\left(\vec{e}_i\right) = k_i \vec{e'}_i$ và $\varphi(\vec{e}) = k\vec{e'} = k\left(\vec{e'}_1 + \vec{e'}_2 + \ldots + \vec{e'}_{n+1}\right)$. Ta có $\varphi(\vec{e}) = \varphi\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \ldots + \vec{e}_{n+1}\right) = k_1\vec{e'}_1 + k_2\vec{e'}_2 + \ldots + k_{n+1}\vec{e'}_{n+1}$. Từ đó $k_i = k, \forall i = 1, 2, \ldots, n+1$. Do đó $\{\varphi\left(\vec{e}_1\right), \varphi\left(\vec{e}_2\right), \ldots, \varphi\left(\vec{e}_{n+1}\right)\}$ $= \left\{k\vec{e'}_1, k\vec{e'}_2, \ldots, k\vec{e'}_{n+1}\right\}$ cũng là cơ sở đại diện của mục tiêu ảnh $\left\{A'_1, A'_2, \ldots A'_{n+1}; E'\right\}$.

3.39 a) Sử dụng tính chất đơn cấu tuyến tính biến một không gian con thành không gian con có cùng số chiều.

b) Suy trực tiếp từ định nghĩa ánh xạ xạ ảnh và định nghĩa tỉ số kép.

3.40. $M' = f(M) = (4,2,1), d' = f(d)$ có phương trình $x_1 + x_2 = 0$.

3.41. a) $f(M) = (1,2), f^{-1}(M) = (-2,5)$.

b) Điểm kép của f có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} kx_1 = x_1 + 2x_2 \\ kx_2 = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}.$$

Tìm tọa độ điểm kép như tìm vectơ riêng của ánh xạ tuyến tính có ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hai điểm kép của f là $(1, -1)$ và $(2, 3)$.

3.42. Phương trình phép xạ ảnh có dạng

$$\begin{cases} kx'_1 = a_1x_1 \\ kx'_2 = a_2x_2 \\ \dots \\ kx'_{n+1} = a_{n+1}x_{n+1} \end{cases}, a_i \neq 0 .$$

3.43. Áp dụng bài trên và để ý mọi điểm $X\,(x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$ biến thành chính nó, suy ra phương trình của phép xạ ảnh có dạng

$$\begin{cases} kx'_1 = x_1 \\ kx'_2 = x_2 \\ \dots \\ kx'_{n+1} = ax_{n+1} \end{cases}, a \neq 0 .$$

Đường thẳng qua A_{n+1} chứa hai điểm kép nên nó bất biến.

3.44. f có 3 điểm kép là $A(1, 6, 5), B(1, 1, 0), C(0, 0, 1)$, từ đó 3 đường thẳng kép là AB, BC, CA, ngoài ra không có đường kép nào khác.

3.45 Ta có các trường hợp sau:

+ $a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1} = 0$: ta có phép đồng nhất nên mọi điểm là điểm kép.

+ $a_{n+1} = 0$ và $\exists a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots n$: có một siêu phẳng gồm toàn điểm kép, đó là $x_{n+1} = 0$.

+ $a_{n+1} \neq 0$: ngoài siêu phẳng $x_{n+1} = 0$ gồm toàn điểm kép còn có điểm kép $O\,(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$.

3.46. a) Ma trận của f là ma trận chuyển từ mục tiêu đã cho đến mục tiêu $\{A_3, E, A_1; A_2\}$, ma trận đó là

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Điểm kép gồm điểm có tọa độ $(1, 0, 1)$ và các điểm của đường thẳng $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

c) f là đối hợp, tức $f^2 = id$, bởi vì $B^2 = I$. Suy ra điều cần chứng minh.

3.47. Từ phương trình của f suy ra $[x] = kB^{-1}[x']$. Các điểm thuộc siêu phẳng P^{n-1} có tọa độ thỏa mãn phương trình $[a][x] = 0$ nên các điểm ảnh của chúng có tọa độ thỏa mãn phương trình $[a]B^{-1}[x'] = 0$. Do đó ảnh của P^{n-1} là siêu phẳng có tọa độ $[a]B^{-1}$.

3.48. Đường thẳng $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ có mọi điểm là kép và điểm $(1, 1, 1)$ (không thuộc đường thẳng) là kép.

3.49. Đường thẳng $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ có mọi điểm là kép và không có điểm kép nào khác là cơ sở của phép thấu xạ. Tâm thấu xạ là giao của đường thẳng MM' (nối một cặp điểm tương ứng) và cơ sở của phép thấu xạ. Tọa độ của tâm là $(-1, 1, 2)$.

3.50. a) Đường thẳng có 3 điểm kép nên mọi điểm của nó là điểm kép.

b) Sử dụng mối liên hệ tọa độ của một điểm với tọa độ của điểm ảnh và liên hệ tọa độ của một đường thẳng với đường thẳng ảnh, ngoài ra một điểm (hay đường thẳng) là kép đối với f cũng kép đối với f^{-1}. Do đó một điểm là kép khi và chỉ khi đường thẳng có tọa độ của điểm kép cũng là đường thẳng kép. 3 đường thẳng kép đồng qui (tọa độ của chúng phụ thuộc) suy ra tọa độ 3 điểm kép tương ứng với tọa độ này phụ thuộc, tức 3 điểm kép thẳng hàng. Theo câu a) suy ra f là phép thấu xạ.

3.51. Các đỉnh $A_1(1, 0, 0), A_2(0, 1, 0)$ thuộc đường thẳng $x_3 = 0$. Ma trận phép thấu xạ cặp là

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix}, p, q \neq 0.$$

Siêu mặt bậc hai

3.52. a) Thay tọa độ các điểm A_1, A_2, A_3, E vào siêu mặt bậc hai, suy ra phương trình của siêu mặt bậc hai có dạng

$$ax_1x_2 + bx_1x_3 - (a+b)x_2x_3 = 0.$$

b) Chỉ cần lấy $a = 1$, còn b nhận tất cả các số thực ta được vô số đường bậc hai như trên. Nếu $M\,(m_1, m_2, m_3)$ không thuộc các đường thẳng $A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3, A_1E, A_2E,\ A_3E$ thì $m_1, m_2, m_3 \neq 0$ và đôi một khác nhau. Thay tọa độ M vào phương trình có dạng ở câu a) khi chọn $a = 1$ (vì $a \neq 0$), ta tìm được b. Phương trình của đường bậc hai lúc này là $(m_1m_3 - m_2m_3)\,x_1x_2 + (m_2m_3 - m_1m_2)\,x_1x_3 + (m_1m_2 - m_1m_3)\,x_2x_3 = 0$.

3.53. a) $z_1^2 - z_2^2 = 0$ (cặp đường thẳng thực cắt nhau).

b) Đường conic.

c) $(x_1 - 2x_2 + x_3)^2 = 0$ (cặp đường thẳng thực trùng nhau).

3.54. $\lambda = \dfrac{1}{2}$ và $\lambda = -1$.

3.55. a) $(1, -1, -3), (1, -2, -5)$;

b) $(1, -2, 0)$.

3.56. Chọn mục tiêu $\{A_i; E\}$ trong $\mathbf{P}^n$ sao cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thuộc siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$. Từ phương trình của $\mathcal{S} \cap \mathbf{P}^{n-1}$ trong $\mathbf{P}^{n-1}$ đối với mục tiêu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n; E'\}$, $E' = A_{n+1}E \cap \mathbf{P}^{n-1}$ suy ra $\mathcal{S} \cap \mathbf{P}^{n-1} = \mathbf{P}^{n-1}$ hoặc $\mathcal{S} \cap \mathbf{P}^{n-1}$ là siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{P}^{n-1}$.

3.57. a) Chọn mục tiêu sao cho phương trình của siêu mặt bậc hai có dạng chuẩn tắc

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0.$$

Khi đó đơn hình n chiều $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ là đơn hình tự đối cực với $\mathcal{S}$.

b) Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ là đơn hình tự đối cực với $\mathcal{S}$. Chọn mục tiêu

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}; E\},$$

giả sử phương trình của $\mathcal{S}$ có dạng

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0.$$

Phương trình siêu phẳng đối cực Π_{A_1} của A_1 là

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n+1}x_{n+1} = 0.$$

Do $A_2, \ldots, A_{n+1} \in \Pi_{A_1} \Rightarrow a_{12} = \ldots = a_{1n+1} = 0$. Tương tự, ta có $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$. Vì vậy phương trình của siêu mặt bậc hai trở thành

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{n+1n+1}x_{n+1}^2 = 0.$$

Bằng phép đổi mục tiêu thích hợp (giữ nguyên các đỉnh A_1, A_2, …, A_{n+1}) đưa được phương trình trên về dạng chuẩn tắc.

3.58. a) $\Pi_{A_1} : 2x_1 - 3x_2 = 0$

$\Pi_{A_2} : -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$

$\Pi_{A_3} : x_2 - x_3 = 0$

$\Pi_E : x_1 = 0$

$\Pi_M : 7x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 0.$

b) $(1, 3, -2)$.

3.59. Điểm liên hợp với A đối với S và nằm trên a chính là giao điểm của Π_A với a. Điểm đó có tọa độ là $(5, 1, 1)$.

3.60. I không phải là điểm kỳ dị của $\mathcal{S}$ nên có siêu phẳng đối cực Π_I. Khi đó $I \in \Pi_A \cap \Pi_B \cap \Pi_C \cap \ldots \Leftrightarrow A, B, C, \ldots \in \Pi_I$.

3.61. Sử dụng tính chất của hình 4 cạnh toàn phần, các điểm chéo đôi một liên hợp với nhau làm thành tam giác tự đối cực đối với $\mathcal{S}$.

3.62. Ta có AP', BQ', CR' tương ứng là đối cực của P, Q, R. Vì P, Q, R thẳng hàng nên AP', BQ', CR' đồng qui.

3.63. Gọi $\alpha = BC \times B'C', \beta = CA \times C'A', \gamma = AB \times A'B'$. Sử dụng định lý Desargues chỉ cần chứng minh α, β, γ thẳng hàng. Bằng cách chọn mục tiêu trong mặt phẳng, chẳng hạn $\{A, B, C; E\}$, từ phương trình của S ta có phương trình của đường $B'C'$ (đối cực của A) và tọa độ của $\alpha = BC \times B'C'$. Tương tự, có tọa độ của β, γ. Từ đó chỉ ra sự thẳng hàng của 3 điểm này.

3.64. Tiếp tuyến là đường thẳng qua A và giao điểm của S với siêu phẳng đối cực của A đối với S. Hai tiếp tuyến đó có phương trình: $x_2 + x_3 = 0$ và $6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$.

3.65. A_2, A_3 thuộc đường bậc hai và A_1A_2, A_1A_3 tương ứng là đường thẳng đối cực của A_2, A_3, suy ra phương trình của đường bậc hai là $x_1^2 + ax_2x_3 = 0, a \neq 0$.

3.66. a) Được, vì đường thẳng không trùng với đường thẳng vô tận $x_3 = 0$.

b) Được, vì đường bậc hai không nằm trong đường thẳng vô tận $x_3 = 0$.

Liên hệ xạ ảnh giữa hai hàng điểm, giữa hai chùm đường thẳng và một số định lí cổ điển về đường bậc hai xạ ảnh

3.67 a) Dựa vào liên hệ giữa số kép của hàng 4 điểm và chùm 4 đường thẳng với chú ý rằng f bảo tồn tỉ số kép của chùm 4 đường thẳng bất kỳ.

b) $\overline{f}$ là phép phối cảnh khi $a \times a'$ là điểm tự ứng, tức a và a' cùng đi qua giao điểm của một cặp đường thẳng tương ứng qua f.

3.68. Đối ngẫu với bài 67 .

3.69. a) Sử dụng định lý Steiner.

b) Không tồn tại.

3.70. Đỉnh C là giao điểm của hai đường thẳng tương ứng thuộc hai chùm $\{\alpha\}, \{\beta\}$ trong liên hệ xạ ảnh. Xảy ra hai trường hợp:

+ α, β, γ không thẳng hàng, liên hệ xạ ảnh không là phép phối cảnh nên quĩ tích C là conic đi qua $\alpha, \beta, a \times b$ (trừ $a \times b$).

+ α, β, γ thẳng hàng, liên hệ xạ ảnh là phép phối cảnh nên quĩ tích C là đường thẳng đi qua $a \times b$ (trừ $a \times b$).

3.71. Từ liên hệ giữa tỉ số kép của hàng điểm và tỉ số kép của chùm đường thẳng, suy ra phép đặt tương ứng đường thẳng AN với đường thẳng BM xác định liên hệ xạ ảnh giữa hai chùm tâm A và tâm B. Khi P, A, B thẳng hàng, liên hệ xạ ảnh là phối cảnh, quĩ tích K là một đường thẳng (trục của phép phối cảnh). Khi P, A, B không thẳng hàng, liên hệ xạ ảnh không là phối cảnh, quỹ tích K là một đường conic đi qua A và B.

3.72. I là giao điểm của hai đường thẳng tương ứng trong liên hệ xạ ảnh $\{A; AN\}$, $\{B; BM\}$ giữa hai chùm. Tùy thuộc vào đường thẳng d có đi qua cực điểm của AB hay là không, ta có quĩ tích của I là đường thẳng đi qua cực điểm của AB hay đường conic đi qua A, B và cực điểm của AB.

3.73. Sử dụng định lý Pascal và định lý Brianchon đảo.

3.74. Áp dụng định lý Pascal cho lục giác nội tiếp suy biến

$$A'A'B'B'C'C'.$$

3.75. Sử dụng định lý Brianchon cho lục giác suy biến.

3.76. Sử dụng định lý Brianchon cho lục giác suy biến.

3.77. Sử dụng định lý Brianchon cho lục giác suy biến.

3.78. Sử dụng định lý Pascal cho lục giác suy biến.

3.79. Áp dụng định lý Pascal cho lục giác suy biến.

3.80. Áp dụng định lý Pascal cho lục giác nội tiếp suy biến, suy ra $B'C'$ luôn đi qua giao điểm I của AD và BC.

3.81. Sử dụng định lý Brianchon chứng minh AB', BA', PQ đồng qui.

Mô hình xạ ảnh của không gian afin

3.84. Sử dụng tính chất của cực, đối cực đối với đường conic trong mặt phẳng xạ ảnh và liên hệ giữa tỉ số kép của hàng điểm và chùm đường thẳng.

3.86. Bài toán xạ ảnh tương ứng là hệ quả trực tiếp của tính chất trên hình 4 cạnh toàn phần.

3.87. Sử dụng định lý Pascal để chứng minh các đường thẳng là đồng qui.

3.88. Trên mô hình xạ ảnh của mặt phẳng afin, mỗi đường kính của parabol là đường thẳng đối cực của một điểm nằm trên đường thẳng vô tận (đường thẳng tiếp xúc với conic), do đó các đường thẳng này có chung một điểm, đó là tiếp điểm của đường thẳng vô tận với conic, có nghĩa là trong mặt phẳng afin, các đường thẳng này song song hay có cùng phương.

PHỤ LỤC

Hình học giải tích của các mặt bậc hai trong không gian 3 chiều

Trong không gian 3 chiều thông thường, một số mặt thường gặp là mặt bậc hai, phương trình của chúng được thiết lập khi cho trước một hệ tọa độ (mục tiêu) trực chuẩn, còn gọi là hệ tọa độ Descartes vuông góc. Trong mục này, chúng ta sẽ khảo sát cụ thể hình học của một số mặt đó.

1. Mặt elipxoit

Trong mặt phẳng Oxz của không gian với hệ tọa độ trực chuẩn $Oxyz$, xét đường elip có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Quay đường elip quanh trục Oz ta được một mặt bậc hai, gọi là mặt elipxoit tròn xoay có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Giao tuyến của mặt này với mặt phẳng $z = m$ (hằng số), $|m| < c$ là một đường tròn, hình chiếu của nó lên mặt phẳng Oxy có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 - \frac{m^2}{c^2}.$$

Với mỗi điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thuộc mặt trên, lấy điểm $M(x, y, z)$ sao cho

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = ky_0 \\ z = z_0 \end{cases}.$$

trong đó k là một số dương cố định. Phép tương ứng M_0 với M được gọi là phép co về mặt phẳng Oxz. Vì điểm M_0 nằm trên mặt elipxoit tròn xoay nên

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

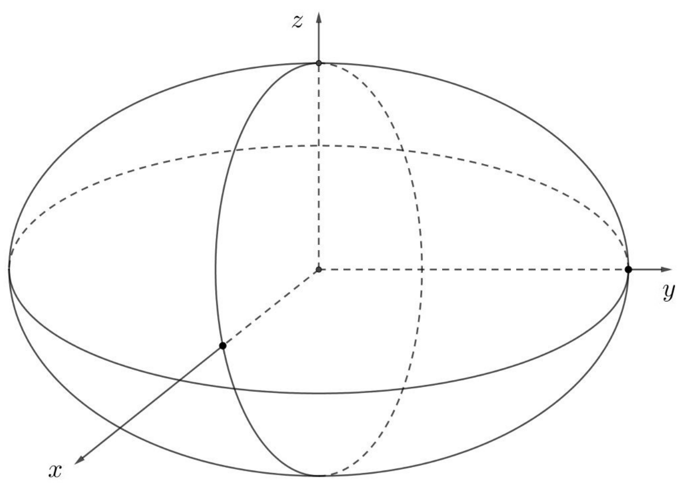
Bởi vậy,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(ka)^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Nếu đặt $b = ka$, các điểm M sẽ nằm trên mặt có phương tình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ta gọi mặt này là mặt elipxoit (tổng quát).



Hình 3.35: Mặt elipxoit

2. Mặt nón

Trong mặt phẳng Oxz của không gian với hệ tọa độ trực chuẩn $Oxyz$, xét đường thẳng qua gốc có phương trình

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0.$$

Quay đường thẳng quanh trục Oz, mặt nón tròn xoay tạo thành có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

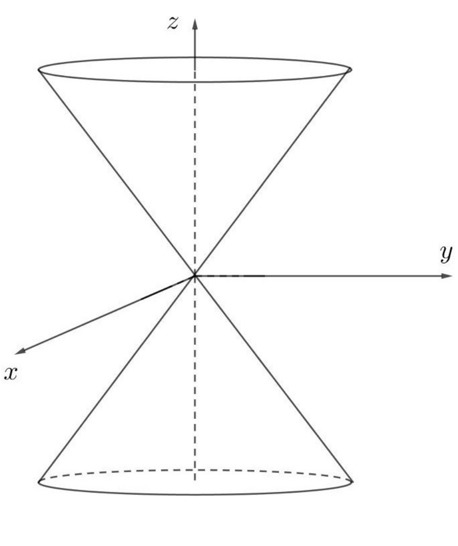
Như vậy, mặt nón tròn xoay là một mặt bậc hai. Giao tuyến của mặt này với mặt phẳng $z = m$ là một đương tròn và hình chiếu của nó lên mặt phẳng Oxy có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{m^2}{c^2}.$$

Thực hiện phép co mặt về mặt phẳng Oxz (như ở trên), ta nhận được mặt có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Ta gọi mặt này là mặt nón elipxoit, giao tuyến với mặt phẳng $z = m$ là một đường elip.



Hình 3.36: Mặt nón tròn xoay

3. Mặt trụ

Trong mặt phẳng Oxz của không gian với hệ tọa độ trực chuẩn $Oxyz$, xét đường thẳng có phương trình

$$x = a, a > 0.$$

Quay đường thẳng trên quanh trục Oz, ta được mặt trụ tròn xoay (trục Oz), đó là một mặt bậc hai có phương trình

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Đây cũng là phương trình của đường tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính a, nằm trong mặt phẳng Oxy (hay $z = 0$).

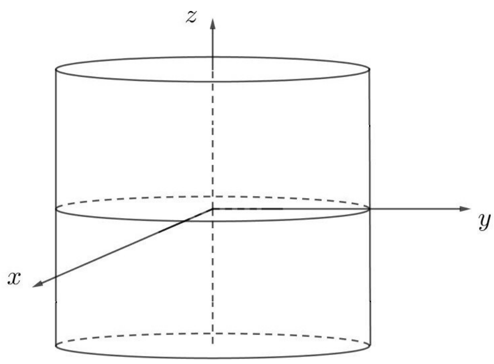
Phương trình mặt trụ tròn xoay ở trên có thể viết lại là

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Thực hiện phép co mặt về mặt phẳng Oxz, ta nhận được mặt có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ta nhận được mặt trụ eliptic. Giao tuyến của mặt trụ eliptic với mặt phẳng $z = m$ là một elip.



Hình 3.37: Mặt trụ tròn xoay

4. Mặt hypeboloit

Trong mặt phẳng Oxz của không gian với hệ tọa độ trực chuẩn $Oxyz$, xét đường hypebol có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, a, c > 0.$$

Quay đường hypebol quanh trục Oz, mặt tròn xoay tạo thành có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Đây là một mặt bậc hai, gọi là mặt hypeboloit tròn xoay 1 tầng. Giao tuyến của mặt trên với mặt phẳng $z = m$ là một đường tròn. Thực hiện phép co mặt trên về mặt phẳng Oxz, ta được mặt hypeboloit eliptic 1 tầng có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Nếu quay đường hypebol trên quanh trục Ox, mặt tròn xoay tạo thành có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Đây là một mặt bậc hai, gọi là mặt hypeboloit tròn xoay 2 tầng. Giao tuyến của mặt với mặt phẳng $x = m, |m| > a$, là một đường tròn. Thực hiện phép co mặt trên về mặt phẳng Oxz, ta được mặt bậc hai, gọi là mặt hypeboloit eliptic 2 tầng có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

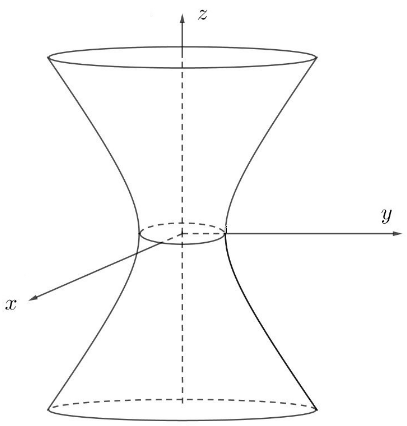
5. Mặt paraboloit

Trong mặt phẳng Oxz của không gian với hệ tọa độ trực chuẩn $Oxyz$, xét đường parabol có phương trình

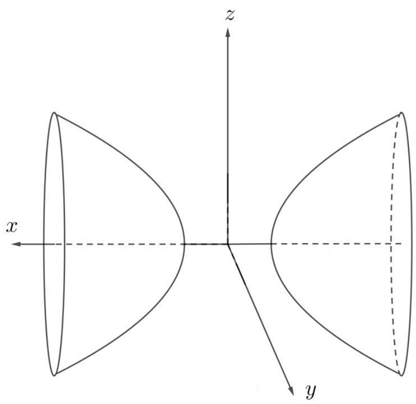
$$x^2 = kz, k > 0.$$

Quay đường parabol quanh trục Oz, mặt tròn xoay tạo thành có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = z, k = a^2.$$



Hình 3.38: Mặt hypeboloit 1 tầng



Hình 3.39: Mặt hypeboloit 2 tầng

Đây là một mặt bậc hai, được gọi là mặt paraboloit tròn xoay. Giao tuyến của mặt với mặt phẳng $z = m > 0$ là một đường tròn. Thực hiện phép co mặt trên về mặt phẳng Oxz, ta được mặt paraboloit eliptic có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Giao tuyến của mặt này với mặt phẳng $x = m$ là đường parabol, hình chiếu của nó lên mặt phẳng Oyz có phương trình

$$\frac{y^2}{b^2} = z - \frac{m^2}{a^2}.$$

Chúng ta có thể xem mặt paraboloit eliptic nói trên được tạo thành khi tịnh tiến đường parabol sau trong mặt phẳng Oyz

$$\frac{y^2}{b^2} = z$$

theo phương trục Ox sao cho đỉnh của nó luôn nằm trên parabol

$$\frac{x^2}{a^2} = z$$

Bây giờ, nếu tịnh tiến theo phương trục Ox đường parabol

$$-\frac{y^2}{b^2} = z$$

sao cho đỉnh của nó luôn nằm trên parabol

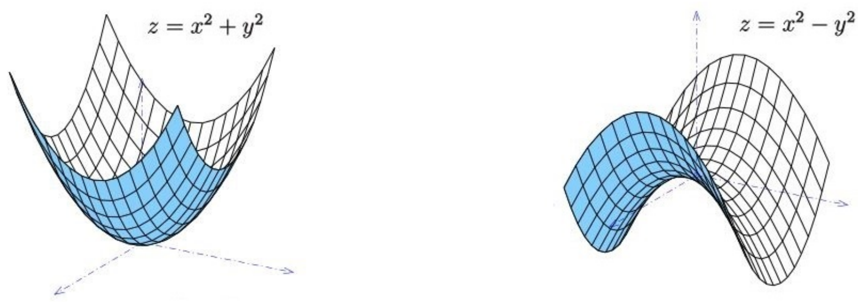
$$\frac{x^2}{a^2} = z$$

ta nhận được mặt bậc hai có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z,$$

được gọi là mặt paraboloit hypebolic (hay mặt yên ngựa). Giao tuyến của mặt này với mặt phẳng $z = m$ là đường hypebol, hình chiếu của nó lên mặt phẳng Oxy có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = m.$$



Hình 3.40: Mặt paraboloit.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Khu Quốc Anh, Phạm Bình Đô, Tạ Mân (1984), *Bài tập Hình học cao cấp.* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

[2] Nguyễn Duy Bình, Phạm Ngọc Bội, Trương Đức Hinh, Nguyễn Hữu Quang (1988), *Bài tập hình học afin và hình học Euclid.* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

[3] Văn Như Cương (1999), *Hình học xạ ảnh.* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

[4] Văn Như Cương, Tạ Mân (1988), *Hình học afin và Hình học Euclid.* Nxb ĐHQG Hà Nội.

[5] Nguyễn Mộng Hy (1999), *Hình học cao cấp.* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

[6] Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Hoàng Xuân Sính (1988), *Đại số tuyến tính và hình học.* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

[7] Đỗ Đức Thái, Phạm Việt Đức, Phạm Hoàng Hà (2013), *Giáo trình Đại số tuyến tính và Hình học.* Nxb Đại học Cần Thơ.

[8] Hà Trầm (2005), *Bài tập Hình học afin và Hình học Euclid.* Nxb Đại học Sư phạm, Hà Nội.

Tiếng Anh

[9] M. Audin (2002), *Geometry.* Springer Science - Business Media.

[10] F. Ayres (1967), *Projective Geometry.* Shaum Publish Company, The United States of America.

[11] A. Beck (2007), *On the convexity of a class of quadratic mappings and its application to the problem of finding the smallest ball enclosing a given intersection of balls.* Journal of Global Optimization, 39, 113–126.

[12] L. Brickmen (1941), *On the Field of Values of a Matrix.* Proceedings of the American Mathematical Society, 12, 61–66.

[13] R. Casse (2006), *Projective Geometry: A Introduction.* Oxford University Press.

[14] L. L. Dines (1941), *On the mapping of quadratic forms.* Bulletin of the American Mathematical Society, 47, 494–498.

[15] F.B. Fabián and F. Opazo (2016), *Characterizing the convexity of joint-range for a pair of inhomogeneous quadratic functions and strong duality.* Minimax Theory Appl, 1, 257–290.

[16] R. Kaye, R. Wilson (1998), *Linear Algebra.* Oxford University Press.

[17] H. Q. Nguyen and R. L. Sheu (2019), *Geometric properties for level sets of quadratic functions.* Journal of Global Optimization, 73, 349–369.

[18] H. Q. Nguyen and R. L. Sheu (2020), *Separation properties of quadratic functions.* Available from: `https://doi.org/10.13140/RG.2.2.18518.88647`.

[19] H. Q. Nguyen, R. L. Sheu and Y. Xia (2020), *Solving a new type of quadratic optimization problem having a joint numerical range constraint.* Available from: `https://doi.org/10.13140/RG.2.2.23830.98887`.

[20] H. Q. Nguyen, Ya Chi and R. L. Sheu (2022), *Two quadratic mappings have a convex joint range when their level sets do not mutually separate.* Journal of Industrial and Management Optimization, 18, 575–592.

[21] B. T. Polyak (1998), *Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization,* Journal of Optimization Theory and Applications. 99, 553–583.

[22] I. Pólik and T. Terlaky (2007), *A survey of the S-lemma.* SIAM review, 49, 371–418.

[23] H. Tuy and H. D. Tuan (2013), *Generalized S-lemma and strong duality in nonconvex quadratic programming.* Journal of Global Optimization, 56, 1045–1072.

[24] Y. Xia, S. Wang and R. L. Sheu (2016), *S-lemma with equality and its applications.* Mathematical Programming, 156, 513–547.

[25] V. A. Yakubovich (1971), *S-procedure in nolinear control theory.* Vestnik Leninggradskogo Universiteta, Ser. Matematika, 62–77.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC VINH
182 Lê Duẩn, Vinh, Nghệ An
Điện thoại: 0238. 3551 345 (Máy lẻ: 312) * Fax: 0238. 3855 269

GIÁO TRÌNH HÌNH HỌC TUYẾN TÍNH

Chịu trách nhiệm nội dung và xuất bản:
Giám đốc kiêm Tổng biên tập
PGS.TS. NGUYỄN HỒNG QUẢNG

Chịu trách nhiệm nội dung khoa học:
HỘI ĐỒNG NGHIỆM THU TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

Người nhận xét:
PGS.TS NGUYỄN HUỲNH PHÁN
PGS.TS NGUYỄN THÀNH QUANG

Biên tập sơ bộ:
PGS.TS NGUYỄN HUỲNH PHÁN

Biên tập:
VÕ THỊ HOÀI THƯƠNG

Bìa, trình bày:
QUANG MINH

Sửa bản in:
TÁC GIẢ

ISBN 978-604-923-664-8

In 300 cuốn, khổ 16 x 24 cm
Tại Công ty TNHH In Hòa Nhơn - Số 6/6 Lê Khôi, TP. Vinh, Nghệ An
Xác nhận đăng ký kế hoạch xuất bản số: 2891-2022/CXBIPH/02-09/ĐHV
Quyết định xuất bản số: 41-2022/QĐXB-NXB ngày 14 tháng 11 năm 2022
In xong và nộp lưu chiểu Quý IV năm 2022